

ANALISI II CIV

ORA II

Titolo nota

17/10/2006

Strumenti per max / min di funzioni di 2 variabili su insiemi compatti (chiusi + limitati).

In questo caso sappiamo per W. che max e min esistono.
Non resta che trovare p.ti di max / min

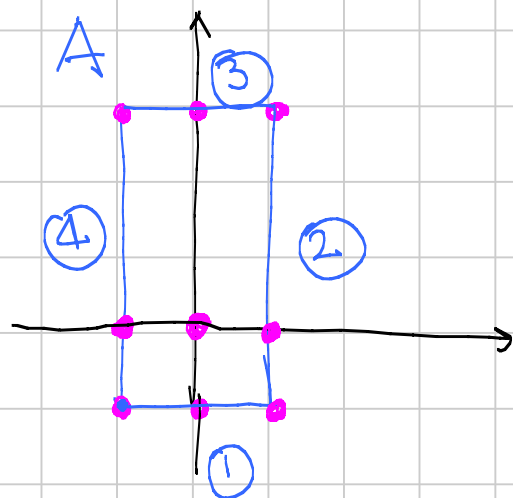
- * staz. interni $\nabla f = 0$
- * sing. interni ∇f non esiste
- * bordo

Bordo $\begin{cases} \nearrow \text{Parametrizzazione} \\ \searrow \text{Moltiplicatori (e) di LAGRANGE} \end{cases}$

Esempio

$$f(x, y) = x^2 + 3y^3$$

$$A = [-1, 1] \times [-1, 3]$$



* Sing. interni : $\emptyset$

* Stat. interni : $\nabla f = 0$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 6y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (0, 0)$$

unico p.to stat.
interno

* BORDO con parametrizzazione
parametro

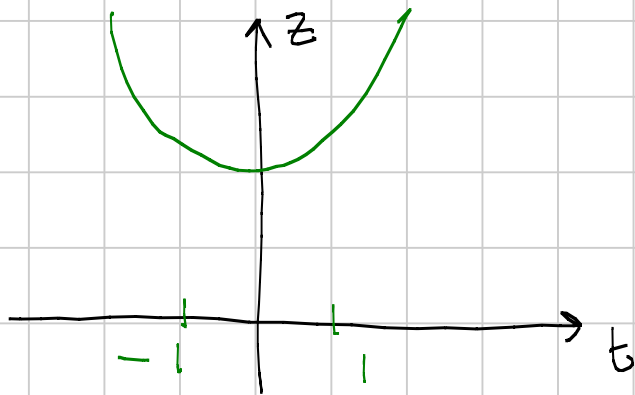
$$\textcircled{1} = \{ (\overset{\downarrow}{t}, -1) : t \in [-1, 1] \}$$

$$\textcircled{2} = \{ (1, t) : t \in [-1, 3] \}$$

$$\textcircled{3} = \{ (t, 3) : t \in [-1, 1] \}; \quad \textcircled{4} = \{ (-1, t) : t \in [-1, 3] \}$$

Per ogni pezzo del bordo, sostituisco la param. nella funzione e studio la funzione di t così ottenuta nell'int.
dato Sost. param.

Pezzo ① $\varphi_1(t) = f(\overbrace{t, -1}) = t^2 + 3$ che studio per $t \in [-1, 1]$



min per $t=0 \rightarrow$ corrisponde in ① a $(0, -1)$

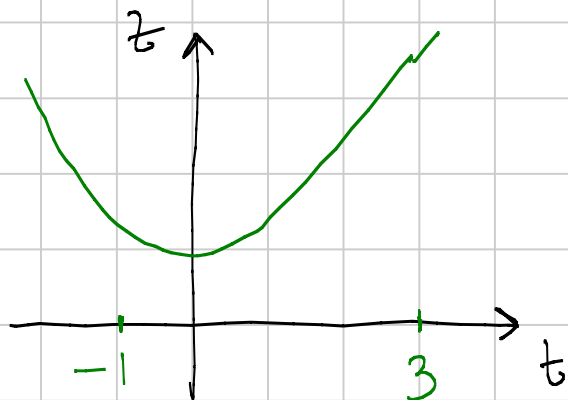
max per $t=1$ e $t=-1$

↓
corrispondono in ① ai p.ti $(1, -1)$ e $(-1, -1)$

Il grafico vuole rappresentare la quota a cui si trova un omio che percorre il pezzo ①

Perzo ②

$$\varphi_2(t) = f(1, t) = 1 + 3t^2 \quad t \in [-1, 3]$$

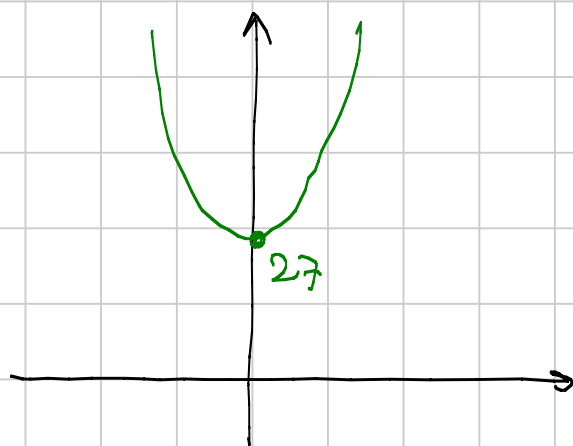


max per $t = 3 \rightarrow$ corrisp. a $(1, 3)$

min per $t = 0 \rightarrow$ corrisp. a $(1, 0)$

Perzo ③

$$\varphi_3(t) = f(t, 3) = t^2 + 27 \quad t \in [-1, 1]$$

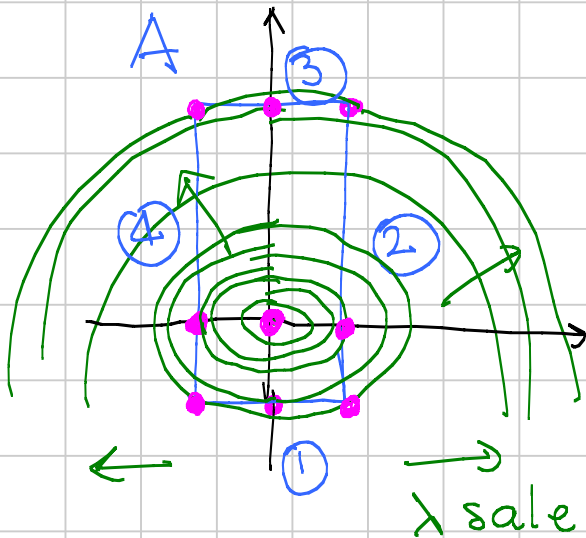


max per $t = \pm 1 \rightarrow$ corr. a $(-1, 3), (1, 3)$

min per $t = 0 \rightarrow$ corr. a $(0, 3)$

[Perzo ④] $\varphi_4(t) = f(-1, t) = 3t^2 + 1 \quad t \in [-1, 3]$

Uguale al perzo ②. I p.ti interessanti saranno ancora
 per $t=0$ e per $t=3$
 $\downarrow$ $\downarrow$
 $(-1, 0)$ $(-1, 3)$



Conclusione: abbiamo ottenuto 3
 CANDIDATI al ruolo di p.to di max/min.

Basta sostituirli tutti e 3 nella funzione
 per trovare chi è p.to max e chi
 p.to / min.

Con qualche calcolo

$$\min = 0$$

p.ti di min: $(0,0)$

$$\max = 28$$

p.ti di max: $(1,3), (-1,3)$

Interpretazione con linee di livello

$$x^2 + 3y^2 = \lambda \quad \text{ellissi}$$

Era possibile vedere a priori che il pezzo ② è uguale al pezzo ④? Sì, infatti

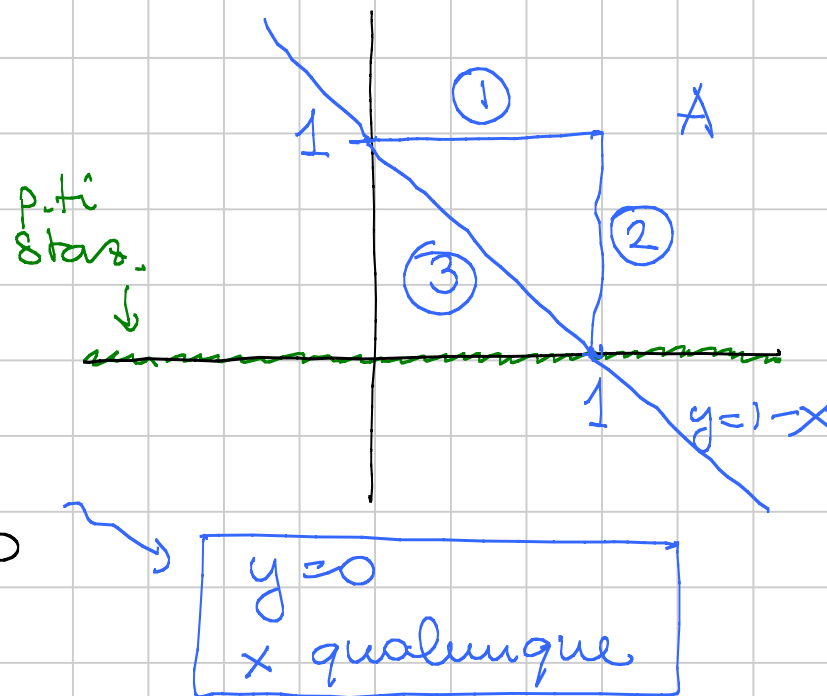
- * f è pari rispetto alla variabile x (se cambio x con $-x$ non succede nulla)
- * Se cambio x con $-x$ il pezzo ② diventa il pezzo ④

Esempio 2 $f(x,y) = xy^2$

* p.ti sing. interni: $\emptyset$

* p.ti staz. interni

$$\nabla f = 0 \quad \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$



Quindi tutti i p.ti con $y=0$ sono stazionari $\Rightarrow \infty$
p.ti stazionari

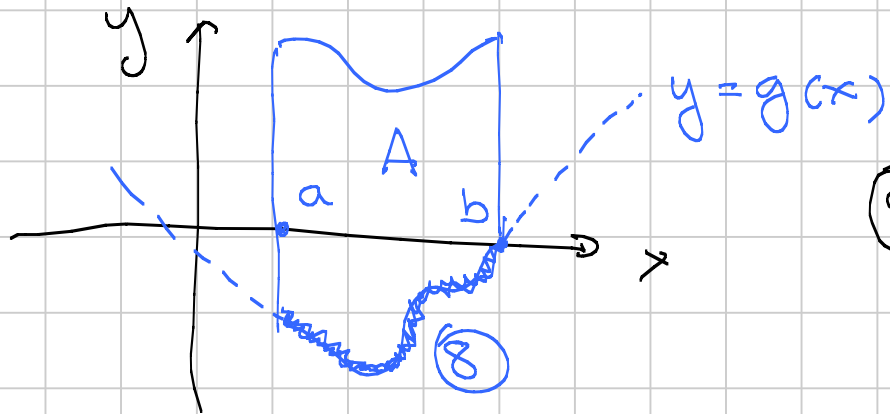
Nessuno di questi è interno.

$$\textcircled{1} = \{(t, 1) : t \in [0, 1]\}$$

$$\textcircled{2} = \{(1, t) : t \in [0, 1]\}$$

$$\textcircled{3} = \{(t, 1-t) : t \in [0, 1]\}$$

In generale, se devo parametrizzare un pezzo di bordo
che è grafico di una funzione $y = g(x)$



$$\textcircled{g} = \{ (t, g(t)) \mid t \in [a, b] \}$$