

ANALISI II CIV NUCL.

ORA 3

Derivate parz, gradiente, p.to stazionario $\nabla f = 0$

↑
↑
VETTORI

- Esistenza (teo. WEIERSTRASS)

- Ricerca p.ti max/min

1) STAZ. INTERNI

$$f'(x) = 0$$

2) SING. INT.

$f'(x)$ NON ESISTE

3) BORDO

$$\begin{aligned} x &= a \\ x &= b \end{aligned}$$

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

↑
cerchiamo max/min

In 2 variabili $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^2$

Not.
vett.

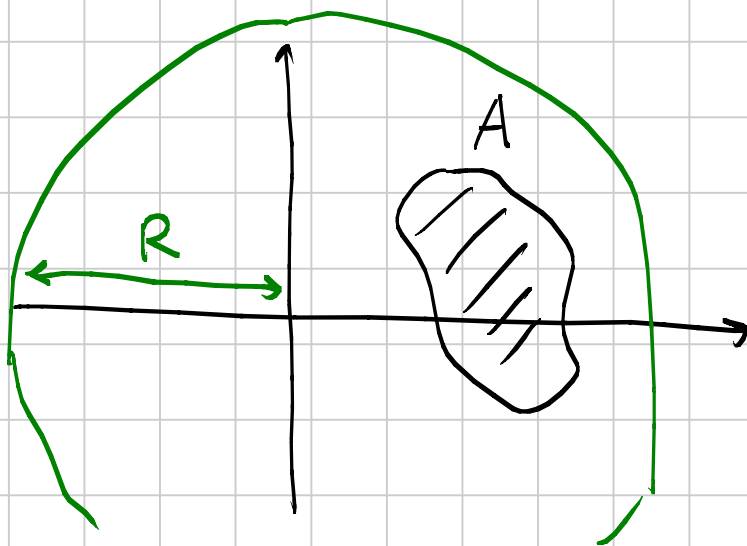
$\max \{ f(x) : x \in A \}$
 $\min \{ f(x) : x \in A \}$

Valori max/min
"delle z"

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice limitato se $\exists R > 0$ t.c.

↑ RAGGIO

$A \subseteq B_R(0,0)$ ↗ cerchio con raggio R
e centro in $(0,0)$



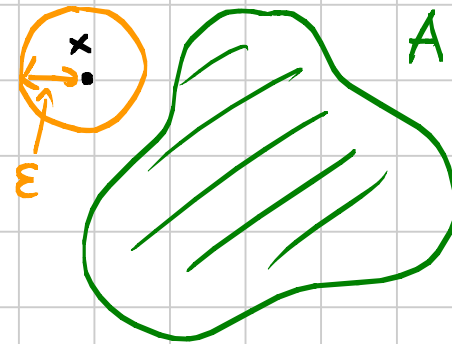
Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice chiuso "se contiene tutto il suo bordo",

+ rigorosamente: A è chiuso se preso un qualunque

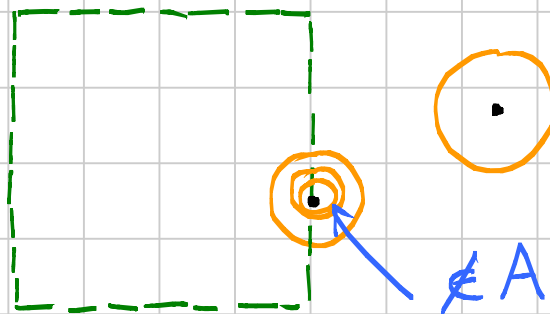
p.to $x \notin A \exists \varepsilon > 0$

tale che

$$B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$$



Esempio 1 Sia A un quadrato senza il bordo

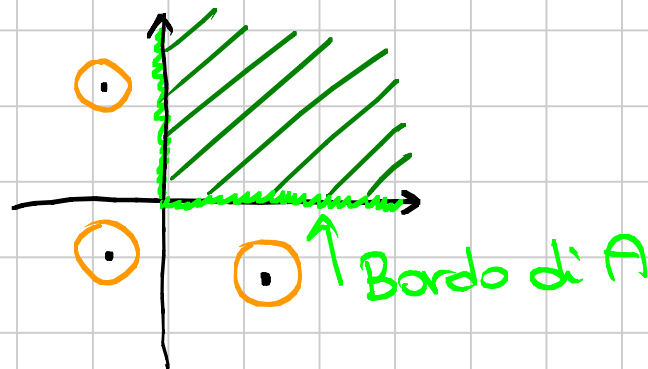


ogni cerchio con centro
in x interseca A
 $\Rightarrow A$ NO CHIUSO

Esempio 2 $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \}$ I quadrante

A non è limitato

A è chiuso

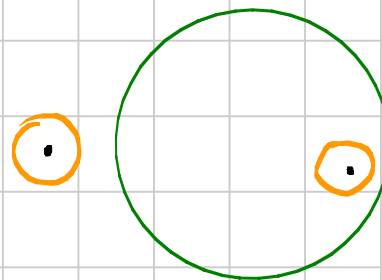


Esempio 3 Ogni poligono e ogni cerchio sono limitati
Sono chiusi ($\Rightarrow$) contengono il bordo

Esempio 4 $A =$ circonferenza (solo contorno).

LIMITATO : SI

CHIUSO : SI



Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice COMPATTO se è
CHIUSO + LIMITATO.

TEO. WEIERSTRASS. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) A sia COMPATTO

(ii) f continua

Allora esistono $\max$ e $\min$ di f in A .
— o — o —

ACHTUNG!!! Se A non è compatto, $\max$ e $\min$ potrebbero
esistere ugualmente, ma è + complicato
verificarlo,

Una volta che max e min esistono, si cercano i p.ti di max / min in queste 3 categorie

① PUNTI STAZIONARI INTERNI $\times$ interni ad A (non sul bordo)
dove $\nabla f(x) = 0$

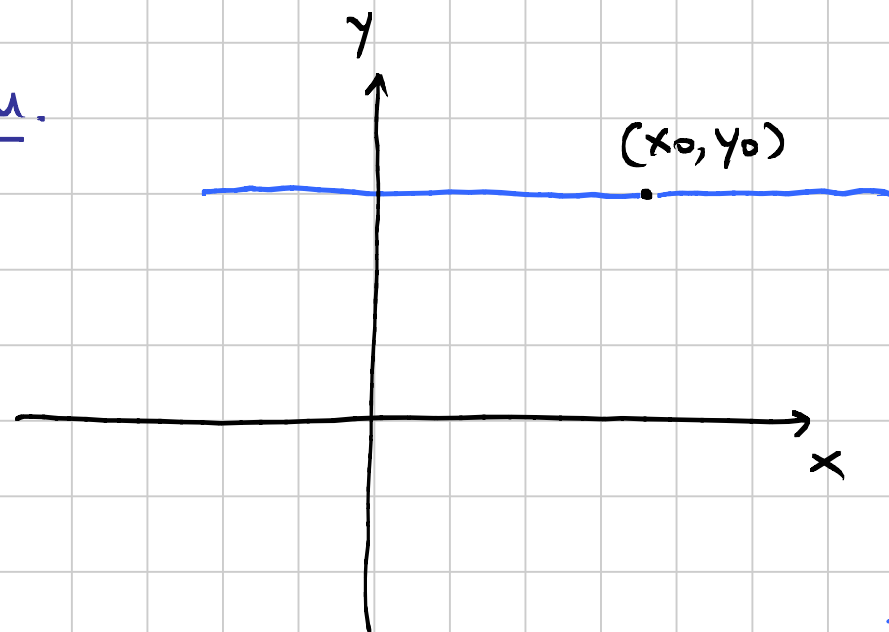
② PUNTI SINGOLARI INTERNI $\times$ interni ad A
dove $\nabla f(x)$ NON ESISTE

③ PUNTI SUL BORDO DI A $\leftarrow$ sono infiniti punti

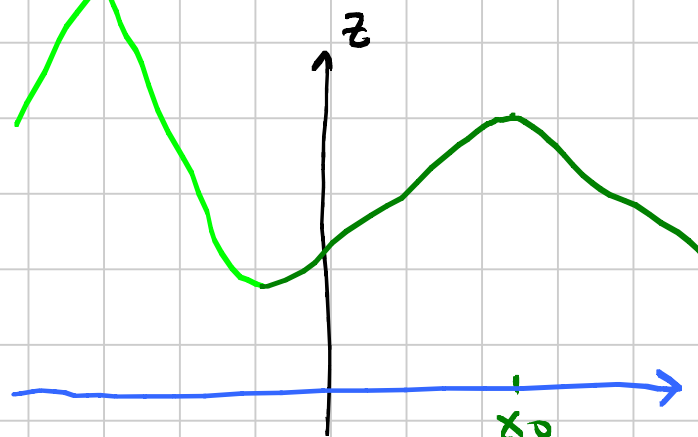
Teorema Se x_0 è interno ad A ed è un p.to di $\max(\min)$
allora $\nabla f(x_0) = 0$, cioè $f_x = 0$, $f_y = 0$

↓
BASTA
LOCALE

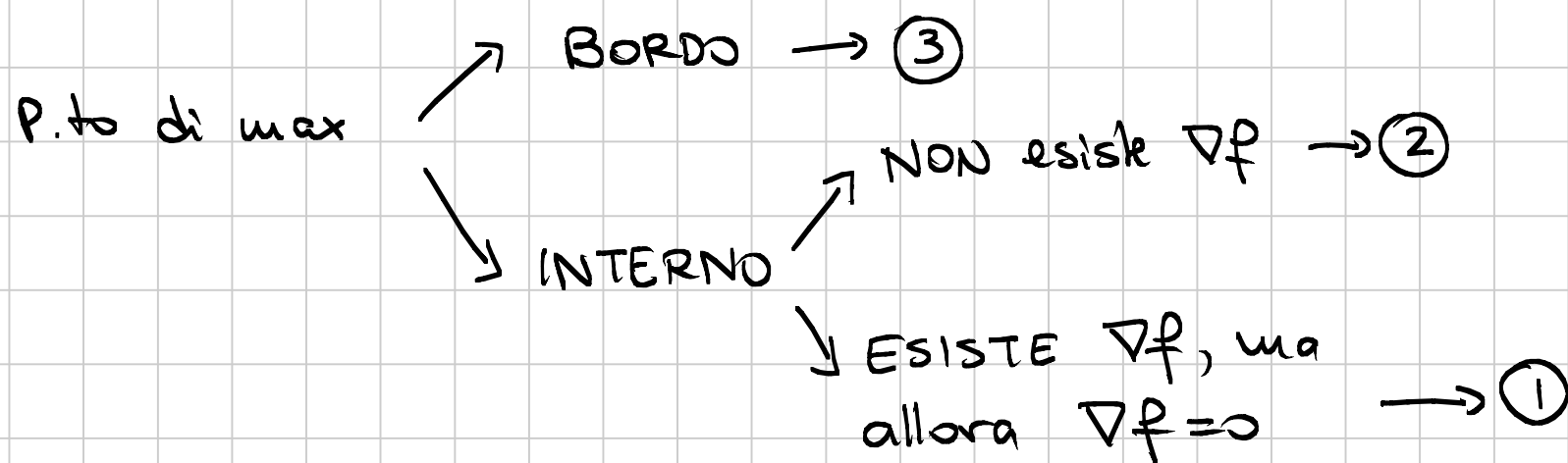
Dim.



Supponiamo sia p.to max



$f_x(x_0, y_0) =$ derivata curva verde
nel p.to $x_0 = 0$ per tes. uno dimensionale
IDEM per $f_y(x_0, y_0)$.



Notazioni x_0 si dice p.to di max ASSOLUTO GLOBALE in A se $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in A$.

[in blue] x_0 batte tutti i p.ti di A

x_0 si dice p.to di max RELATIVO LOCALE se $f(x) \leq f(x_0)$

$\forall x \in B_r(x_0) \quad r = \text{raggio opportuno}$

[in blue] x_0 batte un suo intorno



Oss. x_0 p.to max GLOBALE $\Rightarrow x_0$ p.to max LOCALE