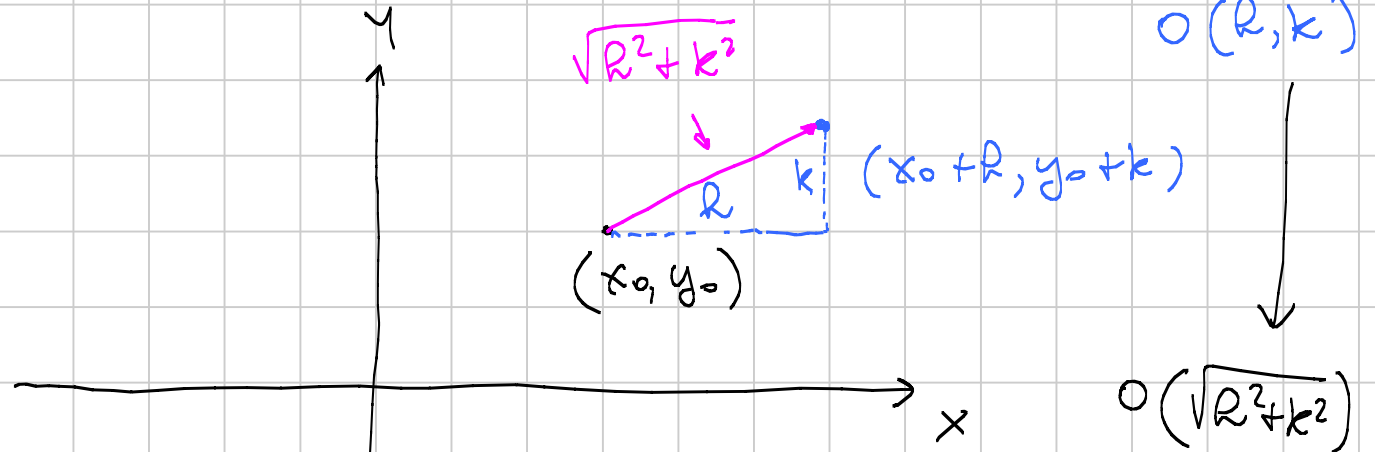


ANALISI II CIV.

ORA 7

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0) + \boxed{?}$$

spostamento
descritto da 2
variabili
INDIPENDENTI



Cosa vuol dire $o(\sqrt{h^2 + k^2})$? Vuol una funzione $r(h, k)$ tale che

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{r(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

LIMITE IN
2 VARIABILI

In n variabili. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $R \in \mathbb{R}^n$
 $x = (x_1, \dots, x_n)$ $\uparrow R = (R_1, \dots, R_n)$

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \boxed{R_1 f_{x_1}(x_0) + R_2 f_{x_2}(x_0) + \dots + R_n f_{x_n}(x_0)} + o(\sqrt{R_1^2 + \dots + R_n^2})$$

↙ $\downarrow \|R\|$
lungh. spost.

PRODOTTO SCALARE TRA IL VETTORE R

ed il vettore $(f_{x_1}(x_0), f_{x_2}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0))$

$\updownarrow$

Def. Questo vettore si chiama GRADIENTE di f nel p.to x_0 . (= vettore che ha come componenti le n deriv. parz. di f nel p.to x_0)

Si indica con
NABLA

↖ $\nabla f(x_0)$

Con queste notazioni: DIFF. IN PIÙ VARIABILI

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot \nabla f(x_0) + o(\|h\|)$$

vettori

prodotto scalare

Derivate direzionali e differenziale. Prendiamo una direzione

v con $\|v\| = 1$ (versore). L'incremento è $t v = h$

numero che $\rightarrow 0$ $\nearrow$ vett. $\uparrow$ vett.

Uso formula prec.

$$f(x_0 + tv) = f(x_0) + t \underbrace{(v \cdot \nabla f(x_0))}_{\text{NUMERO}} + o(t)$$

$\uparrow$ $\|tv\| = t$
 $\uparrow$ o piccolo

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \\
 &\stackrel{\text{sostituisci}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{f(x_0)} + t(v \cdot \nabla f(x_0)) + o(t) - \cancel{f(x_0)}}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[v \cdot \nabla f(x_0) + \underbrace{\frac{o(t)}{t}}_0 \right] = v \cdot \nabla f(x_0)
 \end{aligned}$$

Formula per calcolare le derivate direzionali

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = v \cdot \nabla f(x_0)$$

Vale anche se v
non è un versore

Esempio ① $f(x, y) = x^2 - 3xy$ $(x_0, y_0) = (2, 1)$
 $U = (1, 1)$, Calcolare $\frac{\partial f}{\partial U}(2, 1)$

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (2x - 3y, -3x)$$

$$\nabla f(2, 1) = (2 \cdot 2 - 3 \cdot 1, -3 \cdot 2) = (1, -6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial U}(2, 1) = U \cdot \nabla f(2, 1) = (1, 1) \cdot (1, -6)$$

$$= 1 - 6 = -5$$

Esempio ② $f(x, y) = e^{xy} + x^3 e^y$ $U = (-1, 3)$

Calcolare $\frac{\partial f}{\partial U}(0, 1)$

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (ye^{xy} + 3x^2e^y, xe^{xy} + x^3e^y)$$

$$\nabla f(0, 1) = (1, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}(0, 1) = v \cdot \nabla f(0, 1) = (-1, 3) \cdot (1, 0) = -1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}(x_0) = \underbrace{v \cdot \nabla f(x_0)}_{\text{pr. sc.}}$$

Supp. v versore

$$= \|v\| \cdot \|\nabla f(x_0)\| \cdot \cos \theta$$

$\uparrow$ mod.
 $\uparrow$ mod.
 $\nwarrow$ Angolo tra
v e $\nabla f(x_0)$

$$= \|\nabla f(x_0)\| \cdot \cos \theta$$

Se voglio $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ massima, devo prendere $\theta = 0$, cioè

devo prendere v nella stessa direzione di $\nabla f(x_0)$ (stesso verso)

Se voglio $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ minima, devo prendere $\theta = 180^\circ$, cioè

v nella stessa direzione di $\nabla f(x_0)$, ma verso opposto.

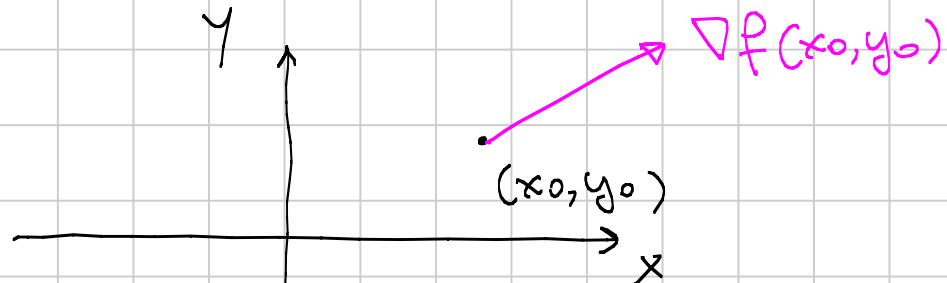
Se voglio $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$, basta che prenda $v \perp \nabla f(x_0)$.

GRADIENTE = direzione nella quale la funzione
tende a salire + rapidamente

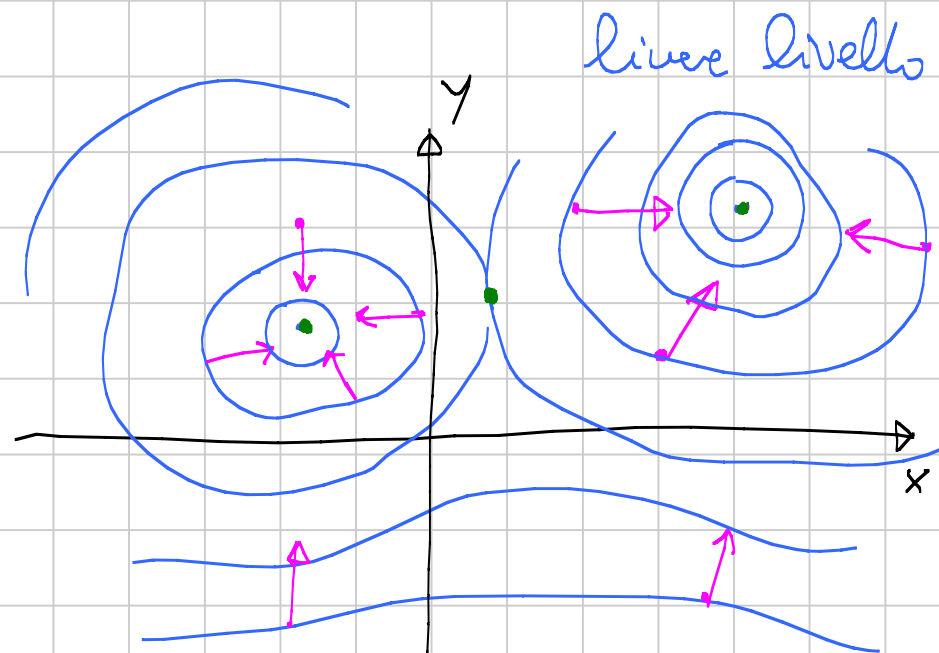
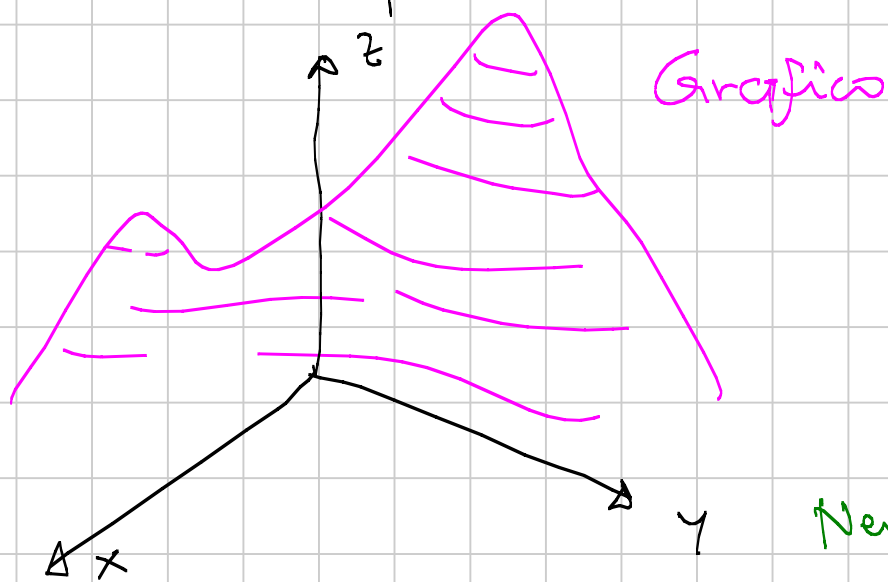
$f(x, y)$ 2 variabili

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Il gradiente si

rappresenta nel piano



∇f è $\perp$ alle
linee di livello



Nei p.ti verdi $\nabla f = 0$