

ANALISI II CIN

ORA 6

Titolo nota

10/10/2006

Funzioni di più variabili

$$\begin{aligned} f(x, y) \\ f(x, y, z) \\ f(x_1, x_2, x_3, x_4) \end{aligned}$$

In 2 variabili

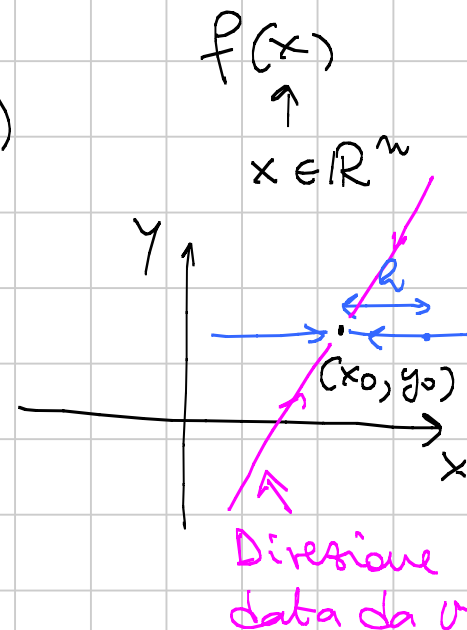
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \dots$$

Deriv. direzionale

$$v = (\alpha, \beta) \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial v}$$



Stesse definizioni in notazione vettoriale.

Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sia $v \in \mathbb{R}^n$ $\|v\| \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

Derivata parziale rispetto a $x_i = i$ -esima componente in $\mathbb{R}^n$.
Prendo $e_1, e_2, \dots, e_n$ base canonica di $\mathbb{R}^n$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0) \quad \dots \quad e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posizione } i\text{-esima}}}{1}, 0, \dots, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h}$$

aggiungo h all' i -esima variabile e lascio immutate le altre

PARENTESI DI ANALISI 1

o piccolo e differenziale

Def di o piccolo. Siano $f(x)$ e $g(x)$ 2 funzioni e sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si dice che f è o piccolo di g per $x \rightarrow x_0$ se esiste una

funzione $w(x)$ tale che

$$f(x) = g(x) w(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 0$$

In tal caso si scrive

$$f = o(g) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Altro modo di dare la definizione (quasi equivalente)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad (\text{Serve poter dividere per } g(x))$$

BRUTALMENTE. Supponiamo che $f(x) \rightarrow 0$ e $g(x) \rightarrow 0$
per $x \rightarrow x_0$

"f tende a zero + velocemente di g"

Esempi: ① $x^2 = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

$$x^2 = x \cdot x$$

↑ ↑ ↑
f g w

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\boxed{\sin x - x} = o(\boxed{x^2}) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$f(x)$ $g(x)$

Tanti modi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0.$$

Taylor

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \boxed{o(x^4)}$$

Qualcosa che nei limiti
per $x \rightarrow 0$ batte x^4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \cancel{x}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x}{6} + \frac{o(x^4)}{x^2} \right) = 0$$

$\downarrow 0$ $\downarrow 0$ $\downarrow 0$

Differenziale. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

Dico che f è DIFFERENZIABILE in x_0 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

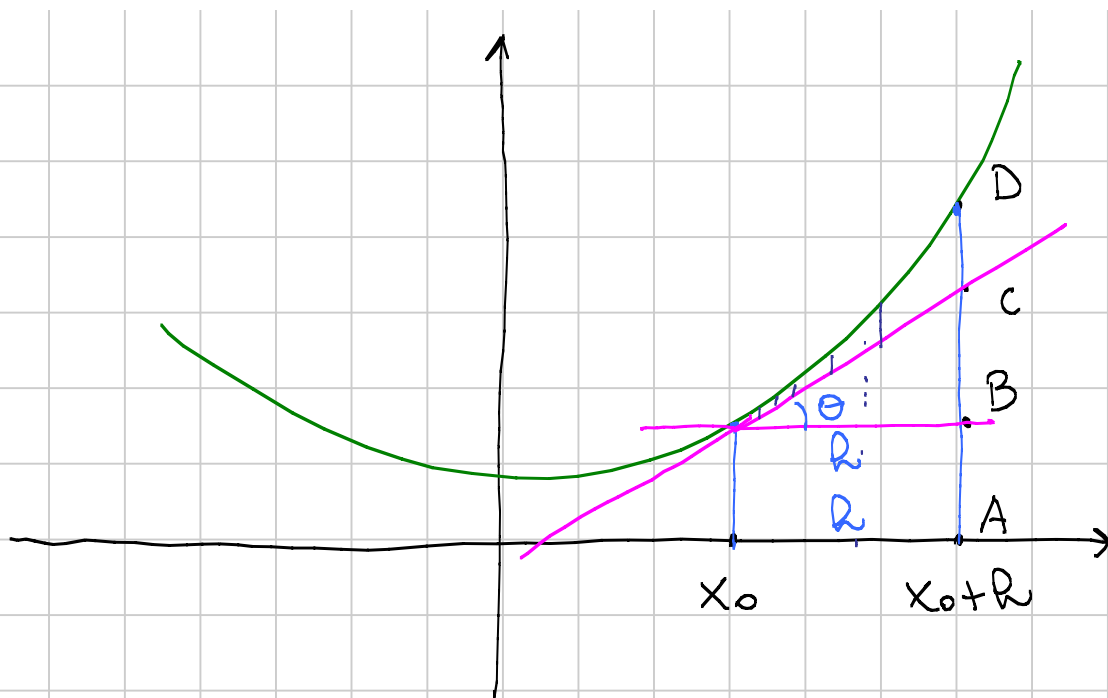
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Teorema f è differenziabile in $x_0 \Leftrightarrow f$ è derivabile in x_0 .

Inoltre $\alpha = f'(x_0)$.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

FORMULA DEL DIFFERENZIALE
IN UNA VARIABILE



triangoli rettangoli

$$BC = R \cdot \tan \theta$$

↑
coeff. ang.
retta tg.,
cioè $f'(x_0)$

$$AD = AB + BC + CD$$

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + R \cdot f'(x_0) + o(R)$$

Per $R \rightarrow 0$

NON
CAMBIA

→ o linearm.
con R

→ o + velocemente
di R

Derivate parziali e o piccolo

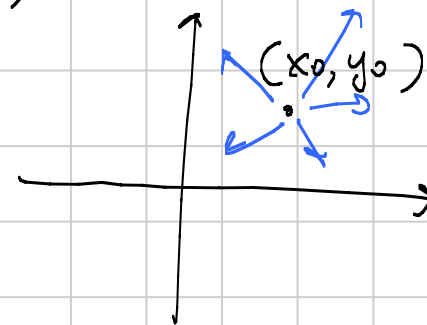
In 2 variabili. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Derivata parziale risp. ad x :

$$f(x_0 + h, y_0) = f(x_0, y_0) + h f_x(x_0, y_0) + o(h)$$

Deriv. parz. rispetto ad y

$$f(x_0, y_0 + h) = f(x_0, y_0) + h f_y(x_0, y_0) + o(h)$$



$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0) + \boxed{?}$$

$O(h, k)$

spostamento
descritto da 2
variabili
INDIPENDENTI