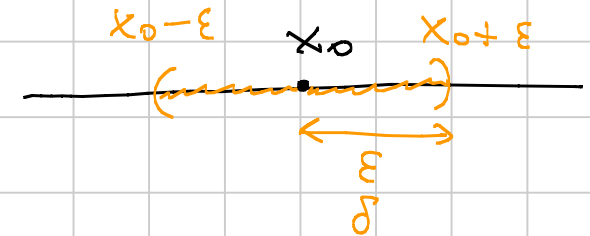


ANALISI 2 CIVILI

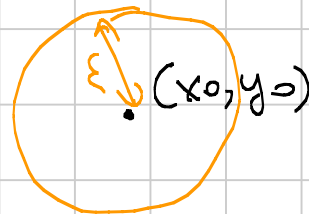
ORA 3

limiti e continuità per funzioni di più variabili

Intorno di un p.to in 1 variabile



Intorno di un p.to in 2 variabili: cerchio con centro in (x_0, y_0) e raggio ε



Intorno di un p.to in $\mathbb{R}^3$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^3$
↑ vettore con 3 comp.

Int. di x_0 e ampiezza $\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(x, x_0) < \varepsilon\}$
↑ vett., ↑ numero
 $\|x - x_0\| < \varepsilon$

Limiti in più variabili

1 var. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} \\ +\infty \\ -\infty \\ \text{N.E.} \end{cases}$

In 2 variabili

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ +\infty & \textcircled{2} \\ -\infty & \textcircled{3} \\ \text{N.E.} & \textcircled{4} \end{cases}$$

In n variabili

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

vettori

Def. ① Nessuna delle precedenti

Def. ② $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$

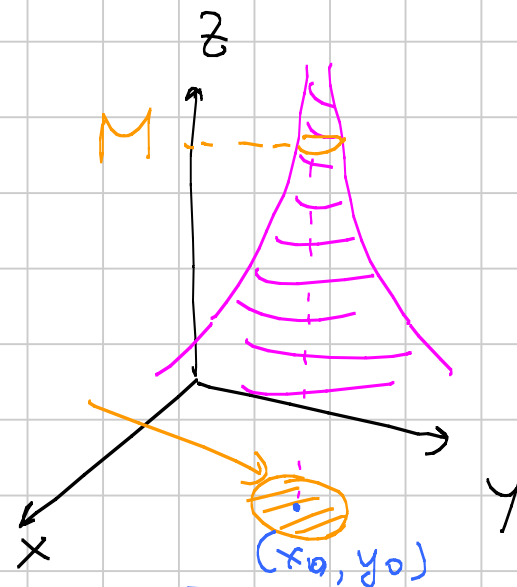
$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto grande)
si ha che $\exists \delta > 0$

$$f(x,y) \geq M \quad \forall (x,y) \in B_\delta(x_0,y_0) \setminus \{(x_0,y_0)\}$$

↑
intorno di (x_0,y_0)
e raggio δ
(Ball)

↑
il valore
di f nel
centro di B non
conta

qui f
vale $\geq M$



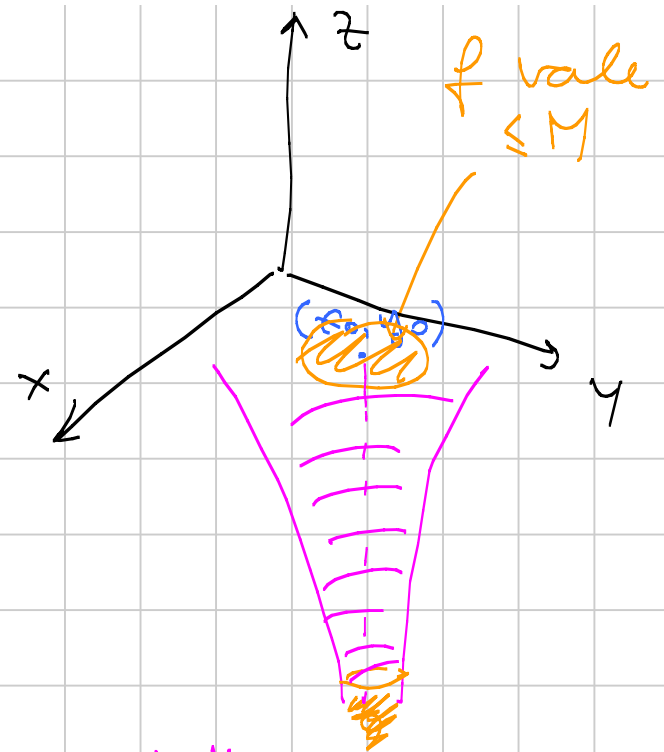
Def. ③ $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = -\infty$

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorm. negativo)

$\exists \delta > 0$ tale che

$$f(x,y) \leq M$$

$$\forall (x,y) \in B_\delta(x_0,y_0) \setminus \{(x_0,y_0)\}$$



Moralmente "più M è basso, più δ è piccolo"

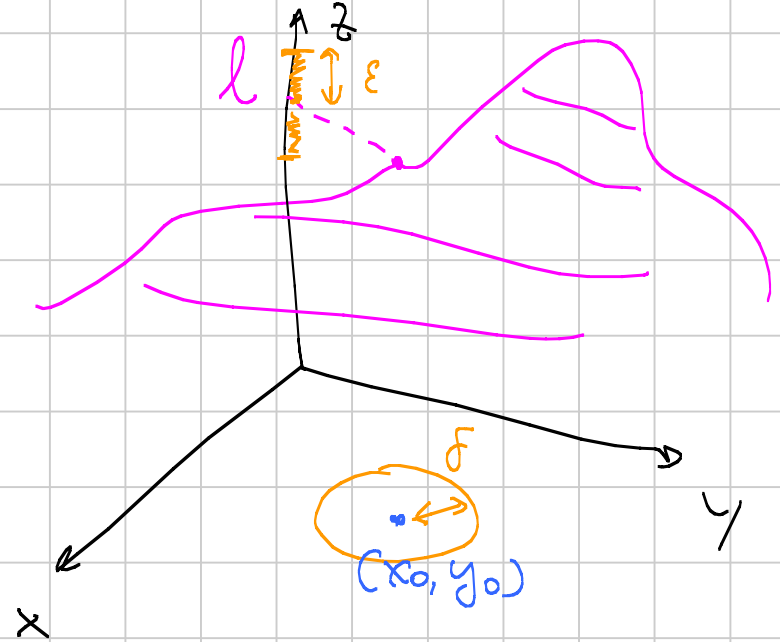
Def. di ① $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = l \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a zero)

$\exists \delta > 0$ tale che

$$|f(x,y) - l| < \varepsilon$$

$$\forall (x,y) \in B_\delta(x_0,y_0) \setminus \{(x_0,y_0)\}.$$



CONTINUITÀ

continua nel p.to (x_0, y_0) se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Una funzione $f(x,y)$ si dice

[limite = valore nel p.to]

Quali sono le funzioni continue?

Teorema

Tutte le funzioni ottenute a partire dalle funz. elementari mediante composizioni o op. alg. sono continue dove non presentano problemi burocratici (denominatori che si annullano, log. di roba ≤ 0 , radici di roba $< 0, \dots$)

Esempio

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)}$

$$\frac{x + y^2 + e^{xy} + \sin(\log(1 + x^2 y^2))}{\arctan(x + y + 3 \cos x)}$$

$$= \frac{1}{\arctan 3}$$

$f(x,y)$

$f(x,y)$ è ottenuta con op. alg. e comp. a partire da x e y .

In $(0,0)$ non ci sono problemi $\Rightarrow f(x,y)$ continua in $(0,0)$

$$\Rightarrow \lim = f(0,0) = \frac{1}{\arctan(3)}$$

I limiti si fanno interessanti quando sono forme indeterminate

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \frac{0}{0}$$

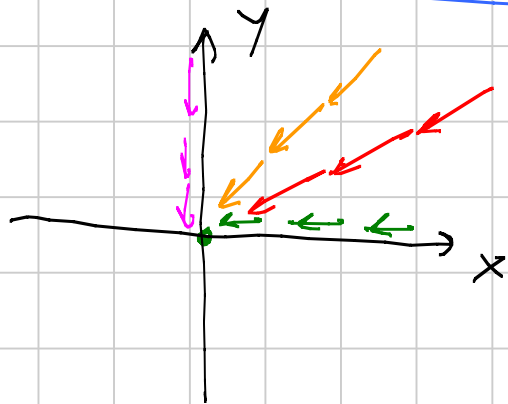
"
In più variabili i limiti hanno pochissima voglia di esistere"

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)}$

$$\frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$f(x,y)$

Quanto potrebbe fare?



$$f(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0$$

$\Rightarrow$ ovunque sempre a quota 0

$\Rightarrow$ per lui $\lim = 0$

$$f(0,y) = \frac{0}{y^2} = 0 \Rightarrow \text{anche per lui } \lim = 0.$$

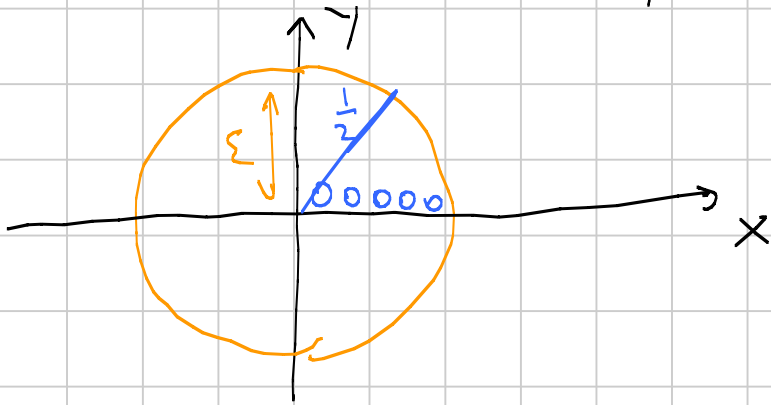
$$f(x,x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ovunque sempre a quota } \frac{1}{2} \Rightarrow \text{per lui } \lim = \frac{1}{2}$$

retta $y = ux$

$$f(x, ux) = \frac{x \cdot ux}{x^2 + u^2 x^2} = \frac{u}{1 + u^2}$$

Il limite dipende
dalla retta di
avvicinamento

Questo impedisce al limite di esistere. Se il limite fosse un certo $l \in \mathbb{R}$, vicino al p.to $(0,0)$ $f(x,y)$ avrebbe valori vicini ad l , in particolare vicini tra di loro



Esempio 2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ $\left[\frac{0}{0} \right]$

Onico sulle rette $y = mx$

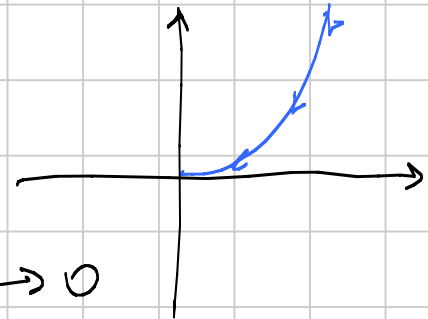
$$f(x, mx) = \frac{x \cdot m^2 x^2}{x^2 + m^4 x^4} = \frac{m^2 x^3}{x^2 + m^4 x^4}$$

$$= \frac{m^2 x}{1 + m^4 x^2} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0 \text{ qualunque sia } m.$$

Tutti gli omici sulle rette sono d'accordo che il $\lim = 0$

Omico sulla parabola $y = x^2$

$$f(x, x^2) = \frac{x \cdot x^4}{x^2 + x^8} = \frac{x^5}{x^2 + x^8} = \frac{x^3}{1 + x^6} \rightarrow 0$$



Da fare * Omico

$$x = y^2$$

* Provare con

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^4}$$