

A.A. 2006/2007
Analisi Matematica 2
Stampato integrale delle lezioni

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 01. Vettori n-dimensionali	5
Lezione 02. Linee di livello e restrizioni a rette	9
Lezione 03. Limiti di funzioni di più variabili	14
Lezione 04. Funzioni di più variabili: esempi	19
Lezione 05. Derivate parziali e direzionali	23
Lezione 06. Funzioni di più variabili: differenziale	28
Lezione 07. Relazioni tra gradiente e derivate direzionali	33
Lezione 08. Funzioni di più variabili: esempi	37
Lezione 09. Teorema di Weierstrass in più variabili	42
Lezione 10. Massimi e minimi in più variabili mediante linee di livello	46
Lezione 11. Studio del bordo mediante parametrizzazioni	50
Lezione 12. Moltiplicatori di Lagrange	54
Lezione 13. Moltiplicatori di Lagrange: esempi	59
Lezione 14. Formula di Taylor in più variabili	64
Lezione 15. Forme quadratiche e matrici simmetriche	68
Lezione 16. Massimi e minimi su insiemi non limitati	73
Lezione 17. Limiti all'infinito per funzioni di 2 variabili	78
Lezione 18. Segnatura di forme quadratiche	83
Lezione 19. Massimi e minimi locali in più variabili	88
Lezione 20. Massimi e minimi in più variabili: esempi	93
Lezione 21. Funzioni convesse e concave in più variabili	97
Lezione 22. Esempi di studio locale/globale di funzioni di più variabili	102

Lezione 23. Esempi di studio locale/globale di funzioni di più variabili	106
Lezione 24. Ripasso tecniche di integrazione in una variabile	111
Lezione 25. Ripasso tecniche di integrazione in una variabile	116
Lezione 26. Integrali doppi: notazione, significato geometrico, definizione	120
Lezione 27. Integrali doppi: formule di riduzione 1	125
Lezione 28. Integrali doppi: formule di riduzione 2	129
Lezione 29. Calcolo di integrali doppi mediante coordinate polari e cambi di variabili	133
Lezione 30. Integrali doppi: esempi	138
Lezione 31. Integrali tripli: introduzione e formula di riduzione sui parallelepipedi . .	143
Lezione 32. Integrali tripli: formula di riduzione per colonne e per sezioni	147
Lezione 33. Coordinate cilindriche e sferiche nello spazio	151
Lezione 34. Integrali tripli: cambi di variabile ed esempi	154
Lezione 35. Baricentri di figure piane e solide. Volume di un solido di rotazione	158
Lezione 36. Integrali impropri: definizione nel caso monoproblema	162
Lezione 37. Integrali impropri: criterio del confronto e del confronto asintotico	167
Lezione 38. Integrali impropri: casi limite di confronto asintotico ed assoluta integrabilità	172
Lezione 39. Integrali impropri: studio mediante l'integrazione per parti	176
Lezione 40. Integrali impropri in 2 o 3 variabili	180
Lezione 42. Equazioni differenziali: problema di Cauchy	184
Lezione 43. Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili	189
Lezione 44. Equazioni differenziali: esempi di studio del problema di Cauchy	193
Lezione 45. Equazioni differenziali del primo ordine lineari	198
Lezione 46. Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti omogenee	202
Lezione 47. Equazioni differenziali lineari non omogenee: ricerca per tentativi di una soluzione	206
Lezione 48. Equazioni differenziali lineari non omogenee: ricerca per tentativi di una soluzione	211

ANALISI 2 CIVILI

ORA 1

Titolo nota

03/10/2006

$\mathbb{R}^n$ = insieme dei vettori n -dimensionali

$$x \in \mathbb{R}^n$$

↑
vettore

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

↑ ↑ ↑
componenti = numeri

L'ordine è importante $(2, 3, 1) \neq (1, 2, 3)$

$$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

vettori

↑ numero

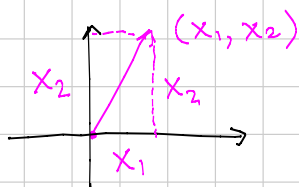
$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \leftarrow \text{prodotto numero} \cdot \text{vettore}$$

NORMA DI UN VETTORE



$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \leftarrow \text{NUMERO}$$

$|x|$

lunghezza
(Teo. Pitagora)

DISTANZA TRA

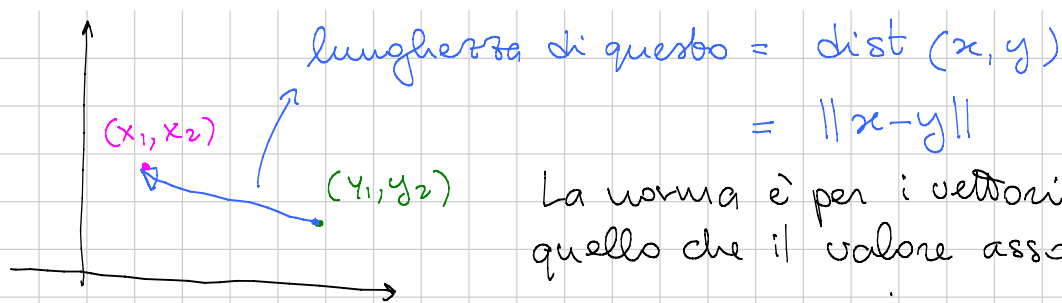
x e y

vettori

$$\text{dist}(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Oss. La distanza tra x e y è uguale alla norma del vettore $x - y$

$$x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$$



La norma è per i vettori
 quello che il valore assoluto
 era per i numeri

PRODOTTO SCALARE

TRA 2 VETTORI

$$x \cdot y$$

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

$\langle x, y \rangle$
 VETTORI
 Numero

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$$

$$\|x - y\|^2 = (x - y) \cdot (x - y) = x \cdot x - x \cdot y - y \cdot x + y \cdot y$$

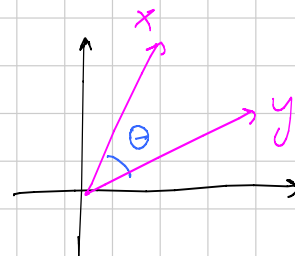
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2x \cdot y$$

Distanza

Interpretazione geometrica di $x \cdot y$

$$x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \theta$$

vett. $\rightarrow$ x
 prod. scalare $\rightarrow$ $\cdot$
 vett. $\rightarrow$ y
 prod. di numeri $\rightarrow$ $\cdot$
 angolo compreso $\rightarrow$ $\cos \theta$



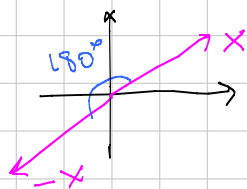
Cosa vuol dire se

$$x \cdot y = 0 \quad ?$$

Casi banali $\rightarrow x = \boxed{0} \leftarrow$ VETTORE Nullo $(0, 0, \dots, 0)$
 $\rightarrow y = \boxed{0} \leftarrow$

Se $x \neq 0, y \neq 0$ $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x$ e y sono
 PERPENDICOLARI
 $(\theta = 90^\circ \Rightarrow \cos \theta = 0)$

Es. $x \cdot (-x) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 = -\|x\|^2$



$$x \cdot (-x) = \|x\| \cdot \|-x\| \cdot \cos(180^\circ)$$

$$\|x\| \cdot \|x\| \cdot (-1) = -\|x\|^2$$

FUNZIONE DI PIÙ VARIABILI

$$f: A \rightarrow B$$

insieme
di partenza

insieme di
arrivo

legge che ad ogni el.
dell'insieme di partenza
associa uno e un solo
el. insieme di arrivo

Nelle funzioni di più variabili l'insieme di partenza
è un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

L'insieme di arrivo (inizialmente) è $\mathbb{R}$

Esempi

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

↑ ↑
componenti (← NUMERI)
del vettore
 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2) = (x_1)^2 + (x_2)^2$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y, z) =$$

$$\boxed{\sin(xy) + e^{zx} + \cos x}$$

COMPONENTI

$$f(x, y, z)$$

↑ ↑ ↑
componenti

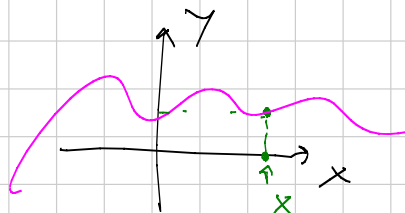
$$f(x)$$

vettoe $x = (x_1, \dots, x_n)$

ANALISI 2 CIVILI

ORA 2

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



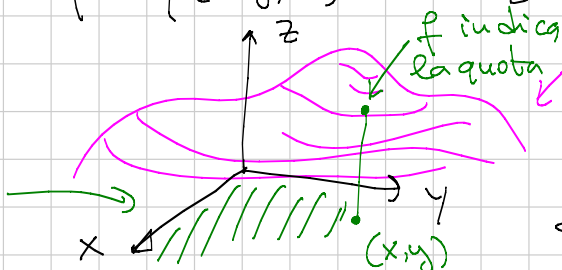
Asse x =
insieme di
partenza

$$\text{Grafico } f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) \}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Grafico di } f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y) \}$$

insieme di
partenza =
piano x, y



SUPERF.

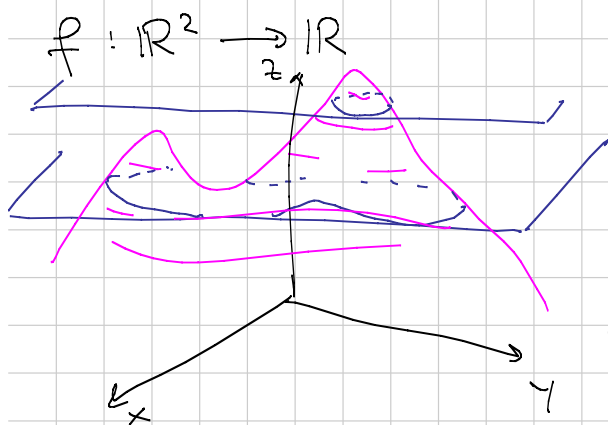
$f(x, y)$ indica
l'altezza della sup.
sopra il p.to (x, y)

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Grafico di } f = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w = f(x, y, z) \}$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Grafico di } f = \{ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n) \}$$

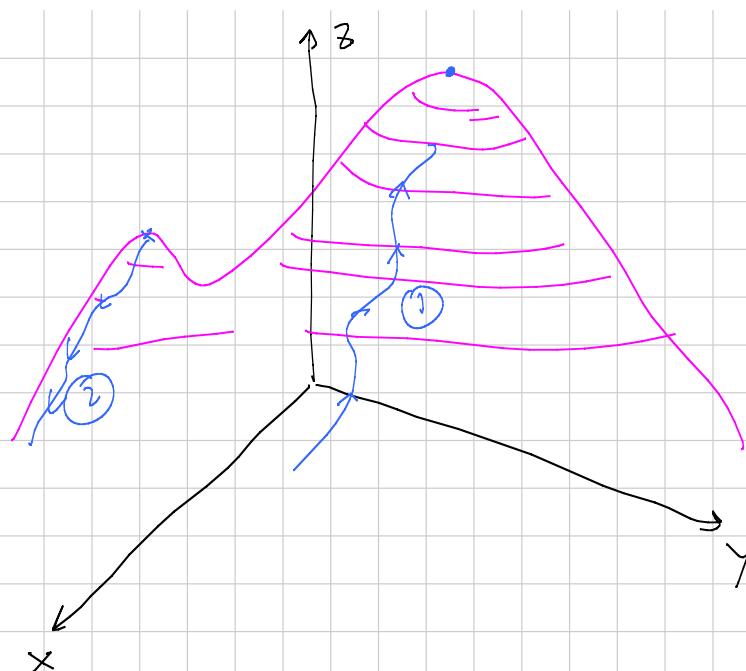


* linee di livello

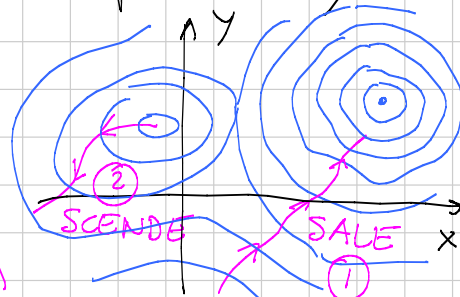
* restrizioni a
rette

LINEE LIVELLO

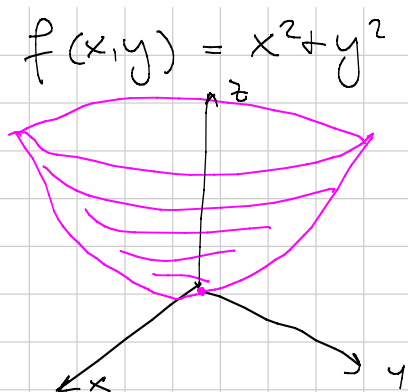
Fisso (altezza) $\lambda \in \mathbb{R}$ e
taglio con un piano ad
altezza λ parallelo a terra



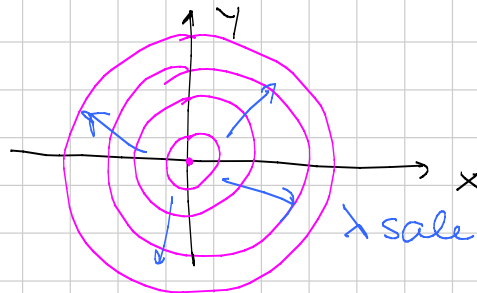
Le linee di livello
si rappresentano
nel piano x, y



↑
linee di livello
(CARTA DEI
SENTIERI)



Linee di livello



Algebricamente: Fisso $\lambda \in \mathbb{R}$

$f(x, y) = \lambda \leftarrow$ cerco i p.ti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in cui
la funzione vale λ

$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = \lambda \end{array} \right. \leftarrow$ circ. con centro in $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{\lambda}$

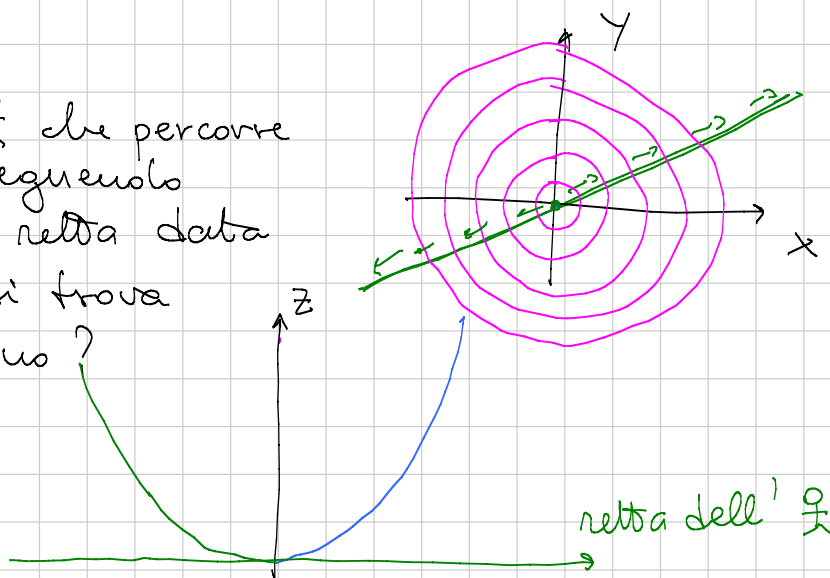
RESTRIZIONI A RETTE

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Fisso una retta nell'insieme di partenza (piano x, y)

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Penso ad un $\frac{0}{1}$ che percorre la montagna seguendo sulla cartina la retta data. A quale altezza si trova lungo il cammino?



Algebricamente: retta sia asse x

Equazione: $y=0$ → sostituisco nella funzione

$$f(x, 0) = x^2$$

↑
messo $y=0$

retta = bisettrice

$$y=x$$

sia retta = asse y

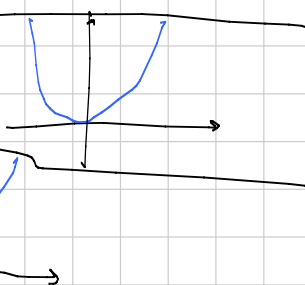
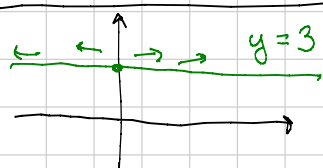
$$x=0$$

↓ sost.

$$f(0, y) = y^2$$

$$f(x, x) = x^2 + x^2 = 2x^2$$

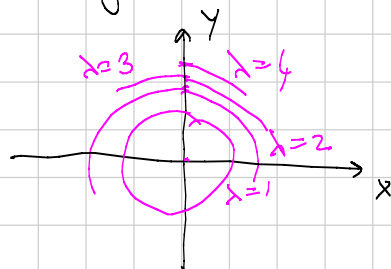
$$f(x, 3) = x^2 + 9$$



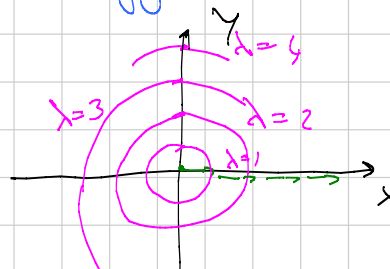
Esempio 2 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Linee di livello $f(x,y) = \lambda$; $\sqrt{x^2+y^2} = \lambda \geq 0$

$x^2+y^2 = \lambda^2 \leftarrow$ circ. centro in $(0,0)$ e raggio λ .

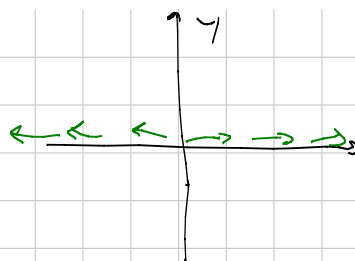
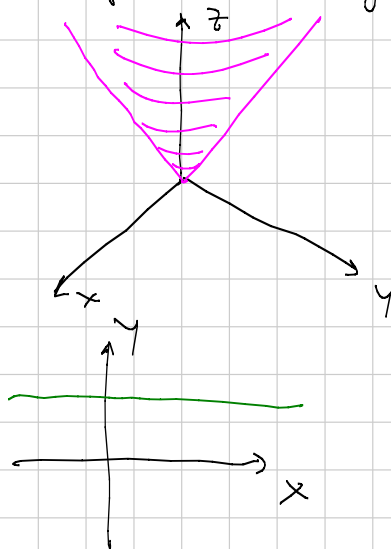


PRIMA
raggio = $\sqrt{\lambda}$

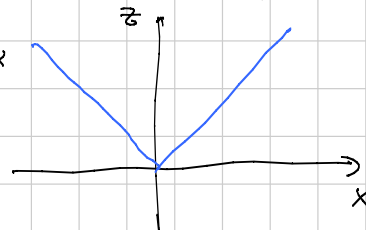


ORA
raggio = λ

Grafico di $\sqrt{x^2+y^2}$

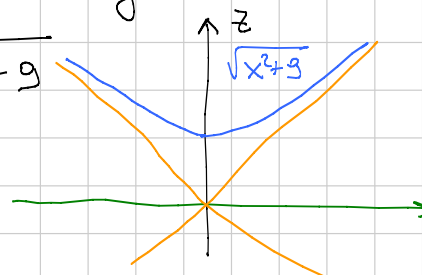


omnis lungo
asse x



omnis lungo retta $y=3$

Alg. $f(x,3) = \sqrt{x^2+9}$



Esempio 3

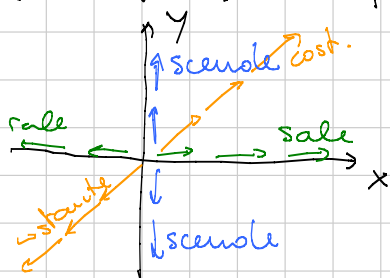
$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

ovvio asse x

$$f(x, 0) = x^2$$

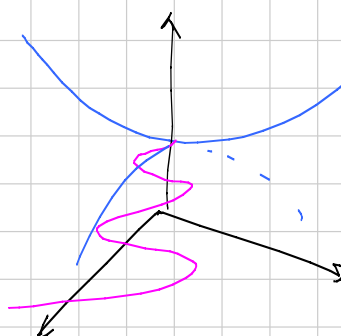
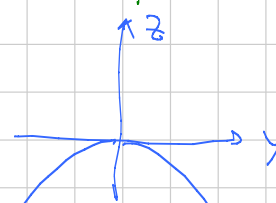
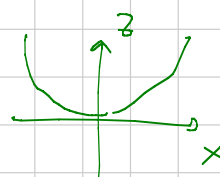
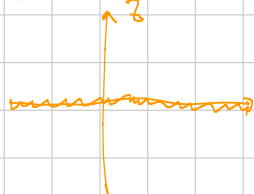
ovvio asse y

$$f(0, y) = -y^2$$



ovvio bisettrice $y = x$

$$f(x, x) = 0$$



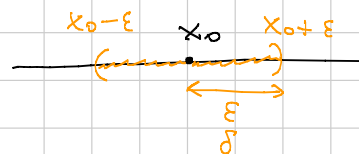
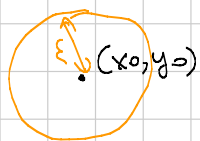
MOUNTAIN
PASS

ANALISI 2 CIVILI

ORA 3

limiti e continuità per funzioni di più variabili

Intorno di un p.to in 1 variabile

Intorno di un p.to in 2 variabili: cerchio con centro in (x_0, y_0) e raggio ϵ Intorno di un p.to in $\mathbb{R}^n$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$
↑ vettore con n comp.Int. di x_0 e ampiezza $\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, x_0) < \epsilon\}$
↑ vett. ↑ numero $\|x - x_0\| < \epsilon$ Limiti in più variabili

1 var.

 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} \\ +\infty \\ -\infty \\ \text{N.E.} \end{cases}$

In 2 variabili

 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ +\infty & \textcircled{2} \\ -\infty & \textcircled{3} \\ \text{N.E.} & \textcircled{4} \end{cases}$

In n variabili

 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
↑
↑
↑
vettori

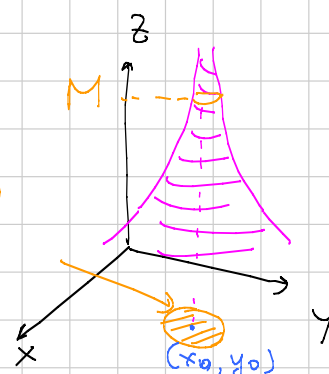
Def. ① Nessuna delle precedenti

Def. ② $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto grande)
si ha che $\exists \delta > 0$

$$f(x,y) \geq M \quad \forall (x,y) \in B_\delta(x_0,y_0) \setminus \{(x_0,y_0)\}$$

$\uparrow$ intorno di (x_0,y_0) e raggio δ (Ball)
 $\uparrow$ il valore di f nel centro di B non conta



Def. ③ $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = -\infty$

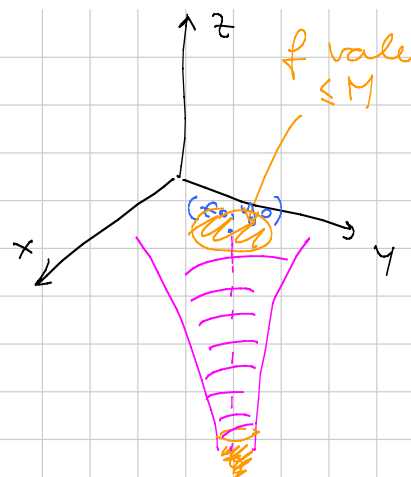
$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorm. negativo)

$\exists \delta > 0$ tale che

$$f(x,y) \leq M$$

$$\forall (x,y) \in B_\delta(x_0,y_0) \setminus \{(x_0,y_0)\}$$

Moralmente "più M è basso, più δ è piccolo"



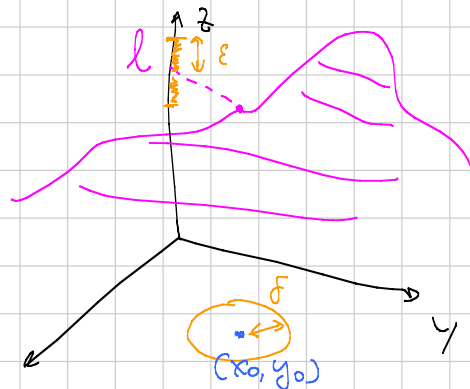
def. di ② $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = l \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a zero)

$\exists \delta > 0$ tale che

$$|f(x,y) - l| < \varepsilon$$

$$\forall (x,y) \in B_\delta(x_0,y_0) \setminus \{(x_0,y_0)\}.$$



CONTINUITÀ Una funzione $f(x,y)$ si dice
continua nel p.to (x_0,y_0) se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ [limite = valore nel p.to]

Quali sono le funzioni continue?

Teorema Tutte le funzioni ottenute a partire dalle funz. elementari mediante composizioni o op. alg. Sono continue dove non presentano problemi: burocratici (denominatori che si annullano, log. di roba ≤ 0 , radici di roba < 0 , ...)

Esempio

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)}$$

$$\frac{x + y^2 + e^{xy} + \sin(\log(1 + x^2 y^2))}{\arctan(x + y + 3 \cos x)}$$

$f(x,y)$

$$= \frac{1}{\arctan 3}$$

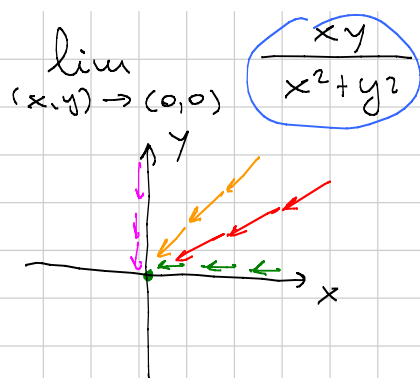
$f(x,y)$ è ottenuta con op. alg. e comp. a partire da x e y .

In $(0,0)$ non ci sono problemi $\Rightarrow f(x,y)$ continua in $(0,0)$
 $\Rightarrow \lim = f(0,0) = \frac{1}{\arctan(3)}$

I limiti si fanno interessanti quando sono forme indeterminate

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \frac{0}{0}$$

"
 In più variabili i limiti hanno pochissima voglia di esistere"



Quanto potrebbe fare?

$f(x,y)$

$$f(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0$$

$\Rightarrow$ omni sempre a quota 0

$\Rightarrow$ per lui $\lim = 0$

$$f(0,y) = \frac{0}{y^2} = 0 \Rightarrow \text{anche per lui } \lim = 0.$$

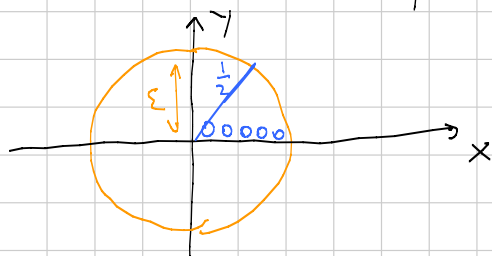
$$f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{omni sempre a quota } \frac{1}{2} \Rightarrow \text{per lui } \lim = \frac{1}{2}$$

retta $y = mx$

$$f(x, mx) = \frac{x \cdot mx}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Il limite dipende dalla retta di avvicinamento

Questo impedisce al limite di esistere. Se il limite fosse un certo $l \in \mathbb{R}$, vicino al p.to $(0,0)$ $f(x,y)$ avrebbe valori vicini ad l , in particolare vicini tra di loro



Esempio 2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ $\left[\frac{0}{0} \right]$

Onius sulle rette $y = mx$

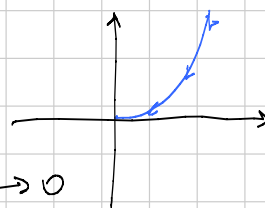
$$f(x, mx) = \frac{x \cdot m^2 x^2}{x^2 + m^4 x^4} = \frac{m^2 x^3}{x^2 + m^4 x^4}$$

$$= \frac{m^2 x}{1 + m^4 x^2} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0 \text{ qualunque sia } m.$$

Tutti gli onius sulle rette sono d'accordo che il $\lim = 0$

Onius sulla parabola $y = x^2$

$$f(x, x^2) = \frac{x \cdot x^4}{x^2 + x^8} = \frac{x^5}{x^2 + x^8} = \frac{x^3}{1 + x^6} \rightarrow 0$$



Da fare * Onius $x = y^2$

* Provare con $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^4}$

ANALISI 2 CIV

ORA 4

Titolo nota

04/10/2006

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

$$\left[\frac{0}{0} \right]$$

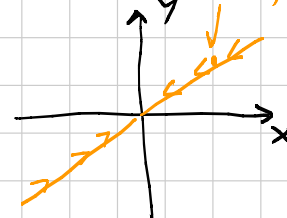
Provo lungo rette

$$y = mx$$

$$f(x, mx) = \frac{x^2 \cdot mx}{x^4 + m^2 x^2} = \frac{mx}{x^2 + m^2}$$

simpl. x^2

$$\downarrow \quad \text{per } x \rightarrow 0$$



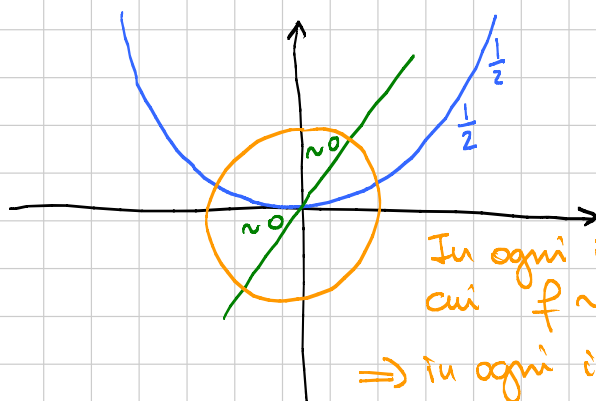
Quindi il limite su tutte le rette è $= 0$

Provo con $y = x^2$

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$$

Sulla parabola $y = x^2$ la funzione vale costantemente $\frac{1}{2}$

Questo dice che il lim. non esiste



MORALE : se esistono due modi diversi di andare a $(0,0)$ per cui il limite risulta diverso, allora il limite non esiste.

Come si dimostra che un limite esiste ?

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^4+y^2} = 0 \quad \text{Perché?}$$

$$\boxed{-x} \leq x \cdot \underbrace{\frac{y^2}{x^4+y^2}}_{\leq 1} \leq \boxed{x}$$

Quando $(x,y) \rightarrow (0,0)$ Quando $(x,y) \rightarrow (0,0)$

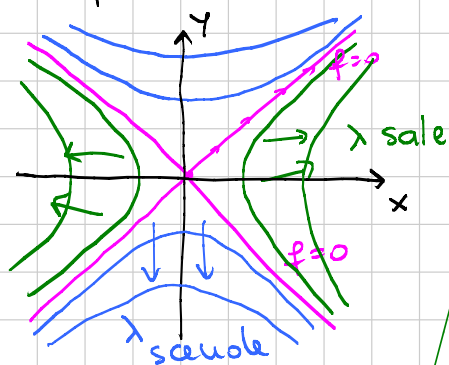
Esempio...

$$f(x,y) = x^2 - y^2 \quad \text{Linee di livello}$$

$$f(x,y) = \lambda$$

$$\lambda = 0 \quad x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm x$$

$$\lambda \neq 0 \quad x^2 - y^2 = \lambda \leftarrow \text{iperbole}$$

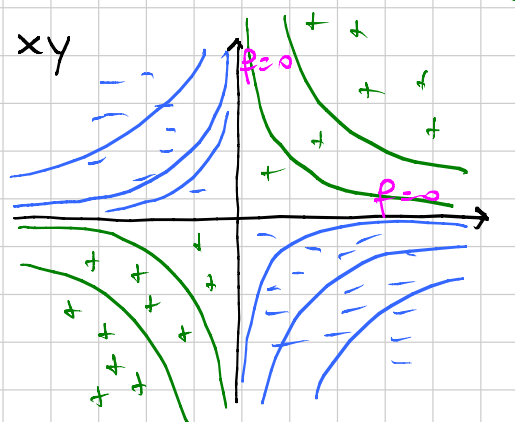


$$f(x,y) = 0 \text{ sugli assi}$$

$$f(x,y) = \lambda \neq 0$$

$$xy = \lambda$$

$$f(x,y) = xy$$



$$f(x,y) = x + 2y$$

Linee di livello

$$x + 2y = \lambda$$

Famiglia rette //

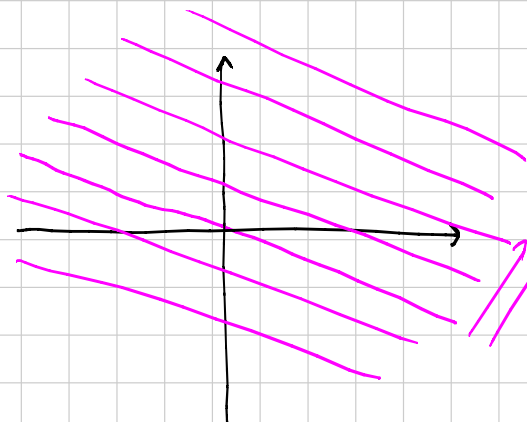


Grafico = piano

 λ sale

ANALISI 2 CIV

ORA 5

Derivate in + variabili

1 variabileFisso $x_0 \in \mathbb{R}$

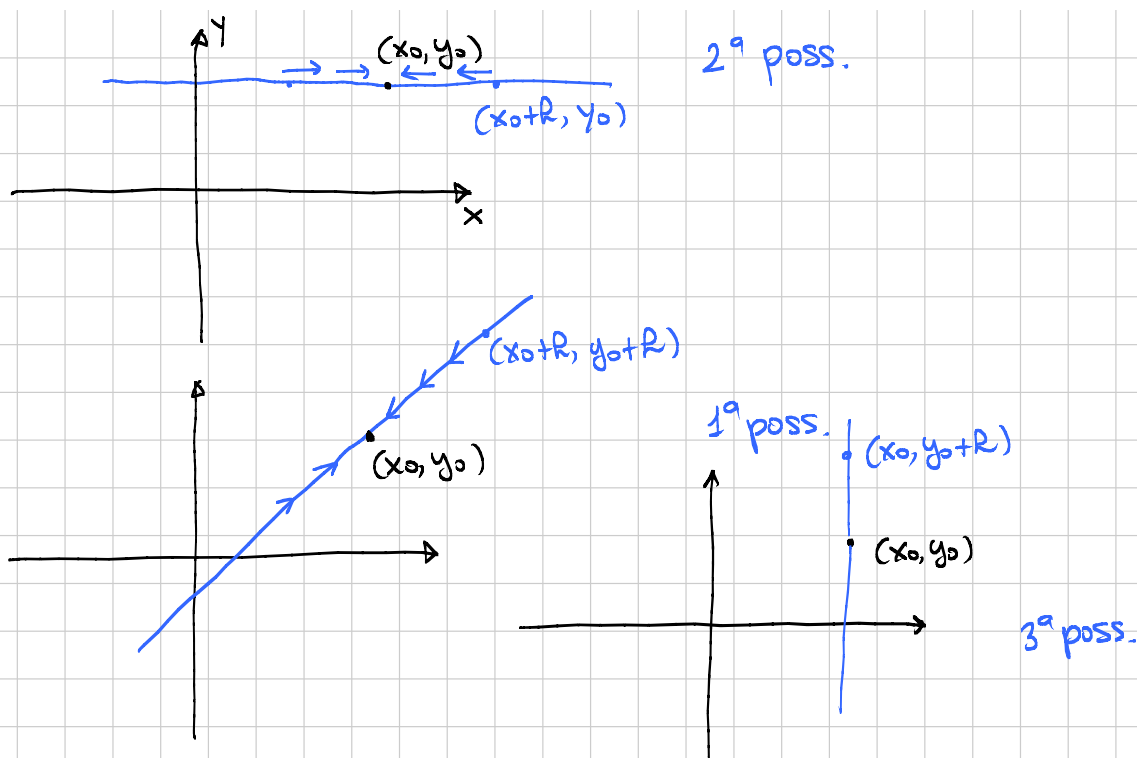
$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

2 variabiliFisso $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

1^a possib.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad 2^{\text{a}} \text{ poss}$$



4^a poss. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta h) - f(x_0, y_0)}{h}$

purché $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$$

Def

Derivata PARZIALE risp. a x nel p.to (x_0, y_0)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$$

Der. parz. risp. y .

Posto $v = (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$

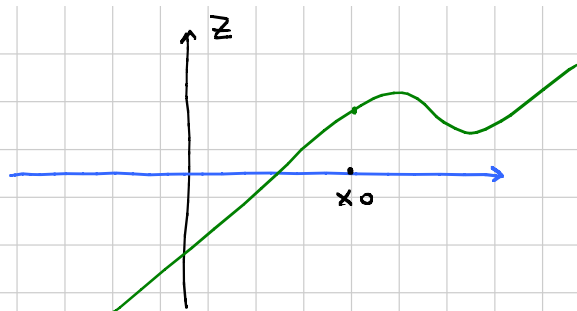
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$$

Derivata DIREZIONALE nella dir v

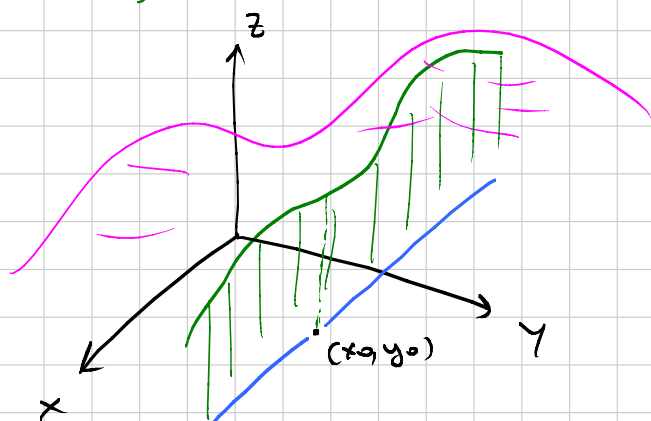
CAPIRE : 1) SIGNIFICATO GEOM.

2) COME SI CALCOLANO ?

Significato geom. di $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Supponiamo un ξ in (x_0, y_0) che si muove in $\longleftrightarrow$. La sua quota sarà una funzione



$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ è la derivata
(di analisi 1) della
funzione *verde* calcolata
in x_0



$\frac{\partial f}{\partial y}$ IDEM nella
direzione
perpendicolare

Oss. 1 $\frac{\partial f}{\partial x}$ è una der. direzionale? SI corrisponde
a $v = (1, 0)$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ corr. a $v = (0, 1)$

Quali direzioni sono più interessanti?

$$v = (2, 0)$$

↑
stessa traiettoria,
ma velocità doppia

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h, y_0) - f(x_0, y_0)}{2h} = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

VERSOIRE = VETTORE DI NORMA 1

Le der. dir. + inter. sono quelle con $v = \text{VERSOIRE}$
 $= (\cos \theta, \sin \theta)$

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

(1,0)
(0,1)

$$f(x,0) = x^2$$

$$f(0,y) = y^2$$

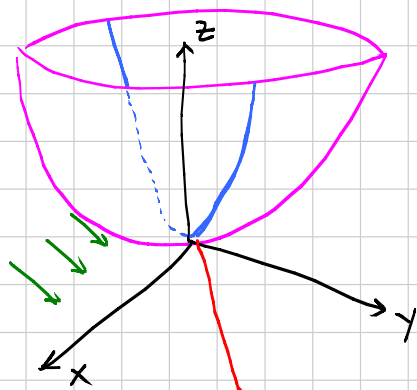
$$f(x,x) = 2x^2$$

$$f(x,2x) = 5x^2$$

(1,2)

NORMA $\sqrt{5}$

(1,1) NORMA $\sqrt{2}$



COME SI CALCOLANO ?

$$f(x,y) = 2x + 3y^2 + 5xy$$

$5ax \leadsto 5a$

$$f_x(x,y) = \text{Derivo facendo finta che } y \text{ sia un numero}$$

$$= 2 + 0 + 5y$$

$$f_y(x,y) = 0 + 6y + 5x$$

$$f(x,y) = \sin(xy)$$

$$f_x(x,y) = y \cos(xy)$$

$$f_y(x,y) = x \cos(xy)$$

$$f(x,y) = x^2y + y^8 + \sin x$$

$$f_x(x,y) = 2xy + 0 + \cos x$$

$$f_y(x,y) = x^2 + 8y^7$$

$\sin(ax) \leadsto a \cos(ax)$

$$f(x, y) = x \sin y \quad f_x = \sin y \quad f_y = x \cos y$$

$$a \sin y$$

$$f(x, y) = y \sin(xy^2)$$

$$f_x = y^3 \cos(xy^2)$$

$$a \sin(a^2 x)$$

$$f_y = \sin(xy^2) + 2xy^2 \cos(xy^2) \cdot x$$

$$y \sin(ay^2)$$

$$(y)' \sin(ay^2) + y \cdot (\sin(ay^2))'$$

$$a \cdot 2y \sin(ay^2)$$

$$f(x, y) = x^y$$

$$f_x = ?$$

$$f_y = ?$$

ANALISI II CIV

ORA 6

Titolo nota

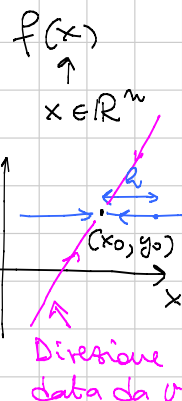
10/10/2006

Funzioni di più variabili

$$f(x, y)$$

$$f(x, y, z)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$



In 2 variabili

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \dots$$

Deriv. direzionale

$$v = (\alpha, \beta) \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial v}$$

Stesse definizioni in notazione vettoriale.

Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sia $v \in \mathbb{R}^n$ $\|v\| \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h v) - f(x_0)}{h}$$

Derivata parziale rispetto a $x_i = i$ -esima componente in $\mathbb{R}^n$.Prendo $e_1, e_2, \dots, e_n$ base canonica di $\mathbb{R}^n$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

posizione i -esima

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h e_i) - f(x_0)}{h}$$

aggiungo h all' i -esima variabile e lascio inmutate le altre

PARENTESI DI ANALISI 1 o piccolo e differenziale

Def di o piccolo. Siano $f(x)$ e $g(x)$ 2 funzioni e sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si dice che f è o piccolo di g per $x \rightarrow x_0$ se esiste una

funzione $w(x)$ tale che

$$f(x) = g(x) w(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 0$$

In tal caso si scrive

$$f = o(g) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

Altro modo di dare la definizione (quasi equivalente)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad (\text{Senza poter dividere per } g(x))$$

BRUTALMENTE. Supponiamo che $f(x) \rightarrow 0$ e $g(x) \rightarrow 0$
per $x \rightarrow x_0$

" f tende a zero + velocemente di g "

Esempi: ①

$$x^2 = o(x) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$x^2 = x \cdot x$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 f g w

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\boxed{\sin x - x} = o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$\underbrace{\sin x - x}_{f(x)} \quad \underbrace{o(x^2)}_{g(x)} \quad \text{Tautologia}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0.$$

Taylor $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \boxed{o(x^4)}$

Qualcosa che nei limiti per $x \rightarrow 0$ batte x^4

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \cancel{x}}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x}{6} + \frac{o(x^4)}{x^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Differenziale. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

Dico che f è DIFFERENZIABILE in x_0 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ b.c.

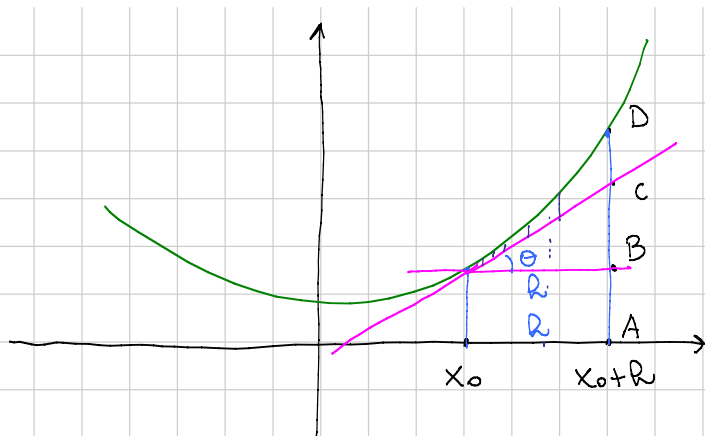
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Teorema f è differenziabile in $x_0 \Leftrightarrow f$ è derivabile in x_0 .

Inoltre $\alpha = f'(x_0)$.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

FORMULA DEL DIFFERENZIALE
IN UNA VARIABILE



triangoli rettangoli
 $BC = R \cdot \tan \theta$
 $\uparrow$
 coeff. ang.
 retta tg.,
 cioè $f'(x_0)$

$$AD = AB + BC + CD$$

$$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$$

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + R \cdot f'(x_0) + o(R)$$

$\uparrow$ per $R \rightarrow 0$
 $\downarrow$ NON CAMBIA
 $\downarrow$ $\rightarrow 0$ linearmente con R
 $\downarrow$ $\rightarrow 0$ + velocemente di R

Derivate parziali e o piccolo.

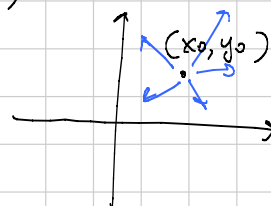
In 2 variabili. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Derivata parziale risp. ad x :

$$f(x_0 + R, y_0) = f(x_0, y_0) + R f_x(x_0, y_0) + o(R)$$

Deriv. parz. rispetto ad y

$$f(x_0, y_0 + R) = f(x_0, y_0) + R f_y(x_0, y_0) + o(R)$$



$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + h f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0) + \boxed{?}$$

$o(h, k)$

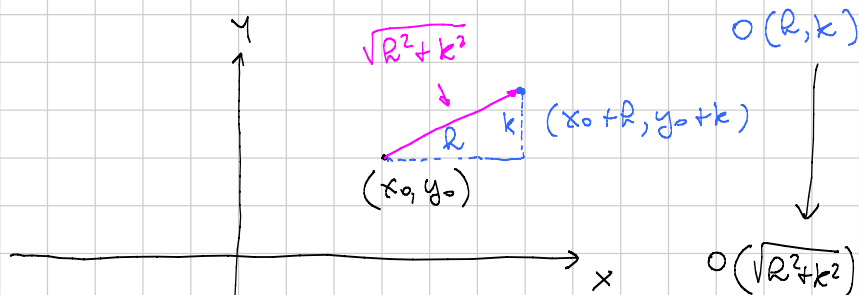
spostamento
descritto da 2
variabili
INDIPENDENTI

ANALISI II CIV.

ORA 7

$$f(x_0 + R, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + R f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0) + \boxed{?}$$

spostamento
descritto da 2
variabili
INDIPENDENTI

 $O(R, k)$ $O(\sqrt{R^2 + k^2})$

Cosa vuol dire $O(\sqrt{R^2 + k^2})$? Vuol una funzione $r(R, k)$ tale che

$$\lim_{(R, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{r(R, k)}{\sqrt{R^2 + k^2}} = 0 \quad \text{LIMITE IN 2 VARIABILI}$$

In n variabili. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $R \in \mathbb{R}^n$
 $x = (x_1, \dots, x_n)$ $\uparrow R = (R_1, \dots, R_n)$

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \boxed{R_1 f_{x_1}(x_0) + R_2 f_{x_2}(x_0) + \dots + R_n f_{x_n}(x_0)} + O(\sqrt{R_1^2 + \dots + R_n^2})$$

PRODOTTO SCALARE TRA IL VETTORE R

ed il vettore $(f_{x_1}(x_0), f_{x_2}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0))$

$\downarrow \|R\|$
lung. spost.

Def. Questo vettore si chiama GRADIENTE di f nel p.to x_0 . (= vettore che ha come componenti le n deriv. parz. di f nel p.to x_0)

Si indica con
NABLA

$$\nabla f(x_0)$$

Con queste notazioni: DIFF. IN PIÙ VARIABILI

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + R \cdot \nabla f(x_0) + o(\|R\|)$$

vettori

prodotto scalare

Derivate direzionali e differenziale. Prendiamo una direzione

v con $\|v\| = 1$ (versore). L'incremento è $t v = R$

numero che $\rightarrow 0$ $\uparrow$ vett. $\uparrow$ vett.

Uso formula prec.

$$f(x_0 + tv) = f(x_0) + t \underbrace{(v \cdot \nabla f(x_0))}_{\text{NUMERO}} + o(t)$$

$\uparrow$ $\|tv\| = t$
 $\uparrow$ o piccolo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

sostituendo $\downarrow$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{f(x_0)} + t(v \cdot \nabla f(x_0)) + o(t) - \cancel{f(x_0)}}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left[v \cdot \nabla f(x_0) + \underbrace{\frac{o(t)}{t}}_0 \right] = v \cdot \nabla f(x_0)$$

Formula per calcolare le derivate direzionali

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = v \cdot \nabla f(x_0)$$

Vale anche se v
non è un versore

Esempio ① $f(x,y) = x^2 - 3xy$ $(x_0, y_0) = (2, 1)$
 $U = (1, 1)$. Calcolare $\frac{\partial f}{\partial U}(2, 1)$

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (2x - 3y, -3x)$$

$$\nabla f(2,1) = (2 \cdot 2 - 3 \cdot 1, -3 \cdot 2) = (1, -6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial U}(2,1) = U \cdot \nabla f(2,1) = (1,1) \cdot (1,-6)$$

$$= 1 - 6 = -5$$

Esempio ② $f(x,y) = e^{xy} + x^3 e^y$ $U = (-1, 3)$
 Calcolare $\frac{\partial f}{\partial U}(0,1)$

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (y e^{xy} + 3x^2 e^y, x e^{xy} + x^3 e^y)$$

$$\nabla f(0,1) = (1, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial U}(0,1) = U \cdot \nabla f(0,1) = (-1, 3) \cdot (1, 0) = -1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial U}(x_0) = \underset{\substack{\text{pr. sc.} \\ \downarrow \\ \text{molt.}}}{U} \cdot \nabla f(x_0) \quad \text{Supp. } U \text{ versore}$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{molt.}}}{\|U\|} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{molt.}}}{\|\nabla f(x_0)\|} \cdot \cos \theta$$

← Angolo tra
 U e $\nabla f(x_0)$

$$= \|\nabla f(x_0)\| \cdot \cos \theta$$

Se voglio $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ massima, devo prendere $\theta = 0$, cioè
devo prendere v nella stessa direzione di $\nabla f(x_0)$ (stesso
verso)

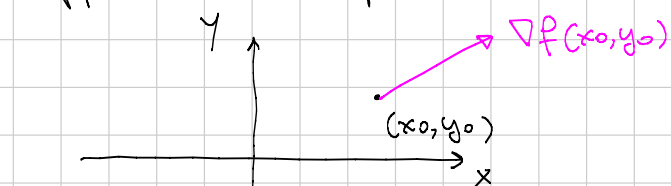
Se voglio $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ minima, devo prendere $\theta = 180^\circ$, cioè
 v nella stessa direzione di $\nabla f(x_0)$, ma verso opposto.

Se voglio $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$, basta che prenda $v \perp \nabla f(x_0)$.

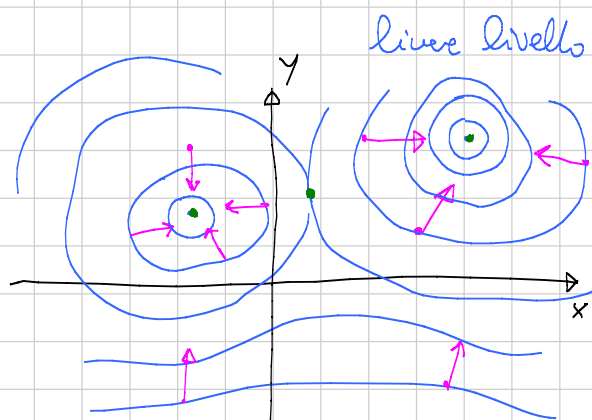
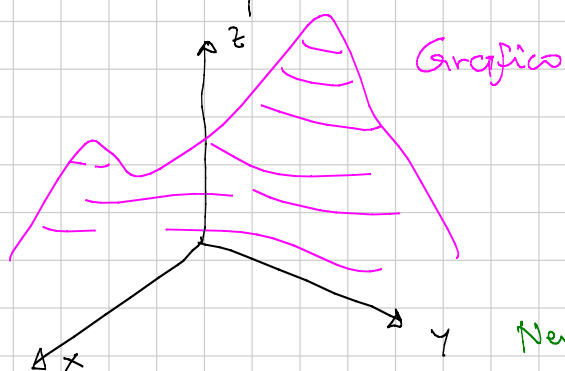
GRADIENTE = direzione nella quale la funzione
tende a salire + rapidamente

$f(x, y)$ 2 variabili $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Il gradiente si

rappresenta nel piano



∇f è $\perp$ alle
linee di livello



Nei p.ti verdi $\nabla f = 0$

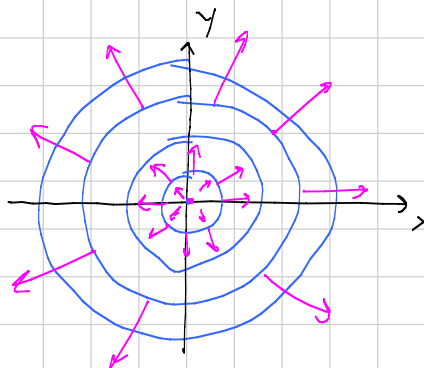
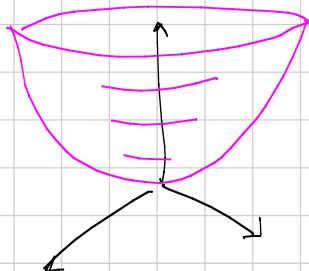
ANALISI II C/V
(NUCL.)

ORA 8

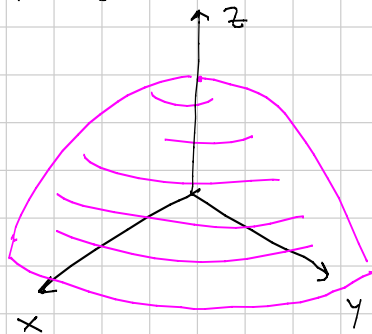
Esempi $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$$

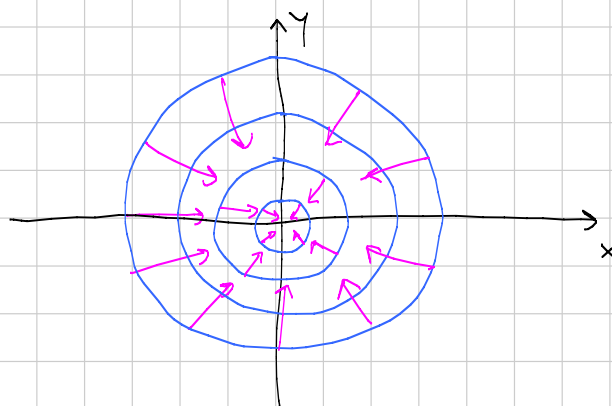
$$\text{In } (0,0), \nabla f(0,0) = (0,0)$$



$$f(x,y) = 5 - x^2 - y^2$$



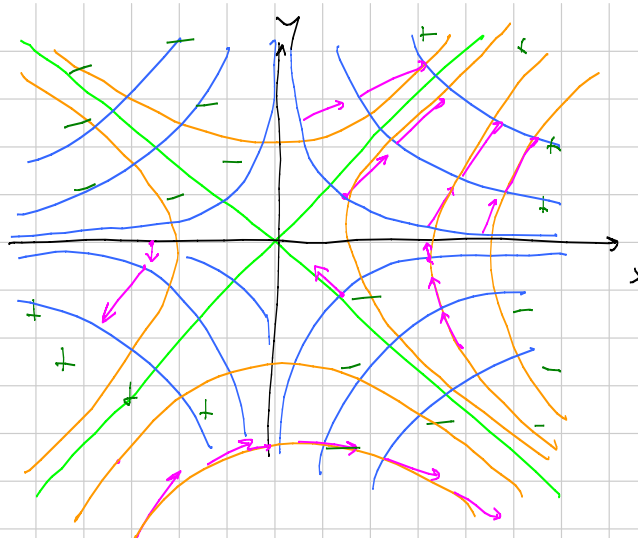
$$\nabla f(x,y) = (-2x, -2y)$$



$$f(x, y) = xy$$

$$xy = \lambda$$

Le iperboli arancio
& quelle blu sono
tra di loro $\perp$



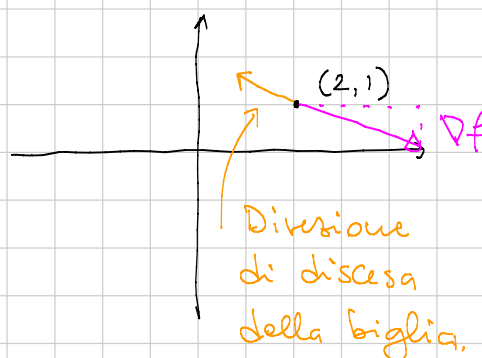
Esempio $f(x, y) = x^2 - y^4 + xy$ montagna

In quale direzione scende
una biglia posta nel p.to
con. a $(2, 1)$?

$$\nabla f(x, y) = (2x + y, -4y^3 + x)$$

$$\nabla f(2, 1) = (5, -2)$$

— o — o —



In 1 variabile : $f'(x_0) = \text{coeff. ang. retta tangente}$

$$y = f'(x_0) \underbrace{(x - x_0)}_h + f(x_0)$$

retta che passa
per $(x_0, f(x_0))$
e ha coeff.-ang. $f'(x_0)$

In 2 variabili il piano tangente al grafico ha equazione

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

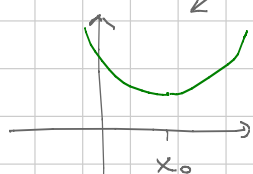
↑
eq. del piano che approssima il grafico di f vicino al p.to (x_0, y_0) commettendo un errore che è $o(\|R\|)$ $R = (x - x_0, y - y_0)$

In 1 variabile: $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$ retta tangente // asse x

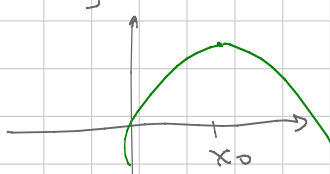
In 2 variabili: $\nabla f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f_x = 0$ e $f_y = 0$ nel p.to
 $\Leftrightarrow$ piano tangente // al piano base x, y

In 1 variabile

$$f'(x_0) = 0$$

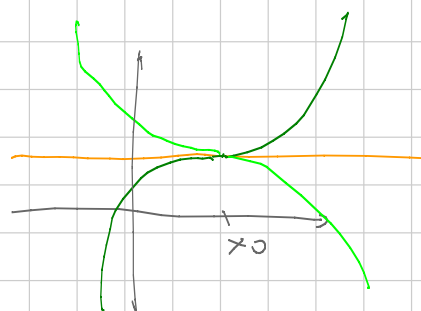


min. locale



max. locale

Flessi e roba strana
a tg. orizzontale



In 2 variabili

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$$

Max. locale

min. locale

MOUNTAIN PASS

PUNTI DI SELLA

Flessi e roba
strana

Def. Un p.to si dice stazionario se ∇f si annulla in quel p.to.

Massimi e minimi in + variabili

Teo. WEIERSTRASS

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua,

allora esistono

↑ ↑
estremi compresi

$$\max \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

$$\min \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

← Valori massi
mo e minimo
("delle y")

I p.ti in cui vengono assunti si chiamano p.ti di max
e p.ti di min

Dove cercare i p.ti di max e di min?

In uno di questi 3 posti

(1) Nei p.ti x dell'intervallo (a,b)
in cui $f'(x) = 0$

PUNTI
STAZIONARI
INTERNI

(2) Nei p.ti x dell'intervallo (a,b)
in cui f' non esiste

PUNTI SINGOLARI
INTERNI

(3) Agli estremi dell'intervallo
 $x=a$ e $x=b$

PUNTI DEL
BORDO

ANALISI II CIV
NUCL.

LORA 9

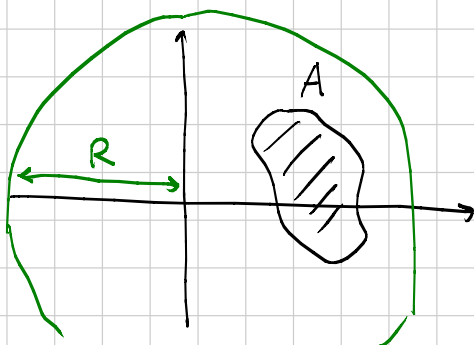
Derivate parz, gradiente, p.to stazionario $\nabla f = 0$ ↑
VETTORI

• Esistenza (teo. WEIERSTRASS)

• Ricerca p.ti max/min

1) STAB. INTERNI $f'(x) = 0$ 2) SING. INT. $f'(x)$ NON ESISTE3) BORDO $x=a$
 $x=b$ $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
↑
cerchiamo max/min

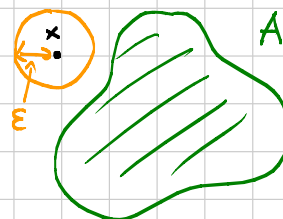
In 2 variabili

 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^2$ Not.
Vett. $\max \{ f(x) : x \in A \}$ $\min \{ f(x) : x \in A \}$ ↑ valori max/min
"delle z"Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice limitato se $\exists R > 0$ t.c.
↑ RAGGIO $A \subseteq B_R(0,0)$ ↑ cerchio con raggio R
e centro in (0,0)

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice chiuso "se contiene tutto il suo bordo".

+ rigorosamente: A è chiuso se preso un qualunque p.to $x \notin A \exists \varepsilon > 0$ tale che

$$B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$$



Esempio 1 Sia A un quadrato senza il bordo

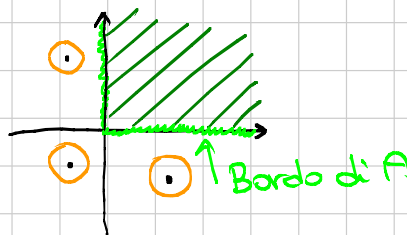


ogni cerchio con centro in x interseca A
 $\Rightarrow A$ NO CHIUSO

Esempio 2 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ I quadrante

A non è limitato

A è chiuso

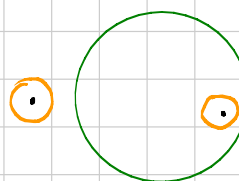


Esempio 3 Ogni poligono e ogni cerchio sono limitati
 Sono chiusi ($\Rightarrow$) contengono il bordo

Esempio 4 $A =$ circonferenza (solo contorno).

LIMITATO: SI

CHIUSO: SI



Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice COMPATTO se è
CHIUSO + LIMITATO.

TEO. WEIERSTRASS. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) A sia COMPATTO

(ii) f continua

Allora esistono max e min di f in A .

ACHTUNG !!! Se A non è compatto, max e min potrebbero
esistere ugualmente, ma è + complicato
verificarlo,

Una volta che max e min esistono, si cercano i p.ti
di max / min in queste 3 categorie

① PUNTI STAZIONARI INTERNI x interni ad A (non sul bordo)
dove $\nabla f(x) = 0$

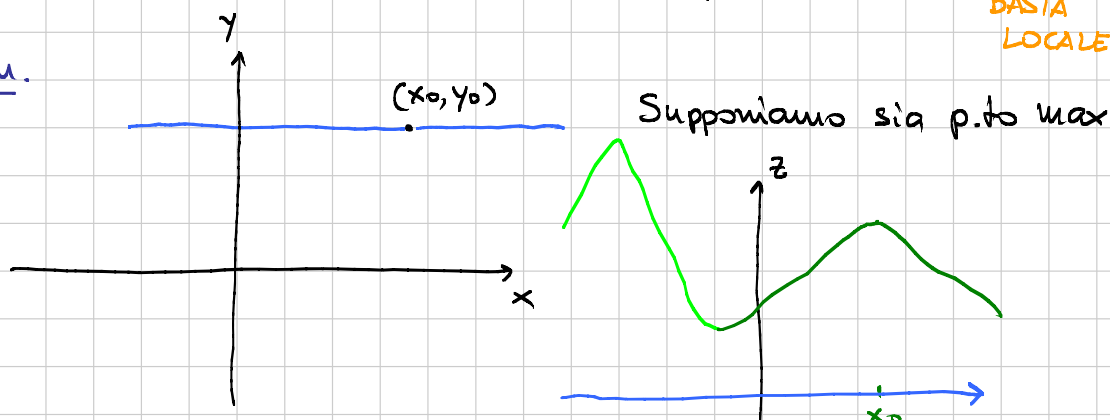
② PUNTI SINGOLARI INTERNI x interni ad A
dove $\nabla f(x)$ NON ESISTE

③ PUNTI SUL BORDO DI A $\leftarrow$ sono infiniti punti

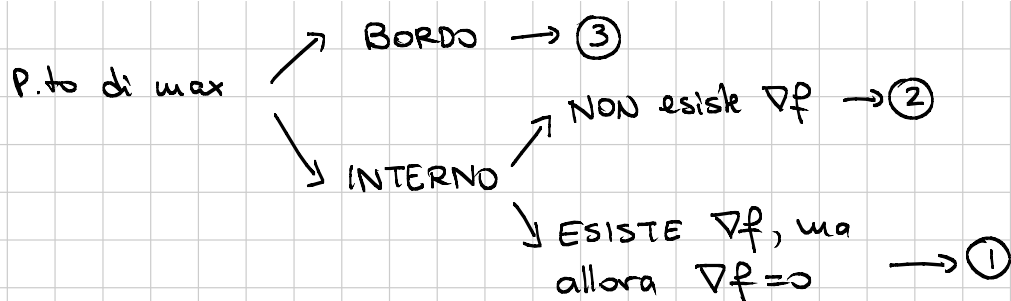
Teorema Se x_0 è interno ad A ed è un p.to di max(min)
allora $\nabla f(x_0) = 0$, cioè $f_x = 0$, $f_y = 0$

BASTA
LOCALE

Dim.



$f_x(x_0, y_0)$ = derivata curva verde
nel p.to $x_0 = 0$ per tes. uno dimensionale
IDEM per $f_y(x_0, y_0)$.



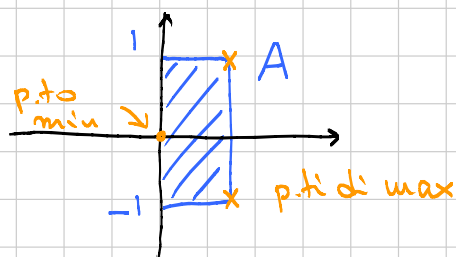
Notazioni x_0 si dice p.to di max ASSOLUTO GLOBALE in A se $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in A$.
] x_0 batte tutti i p.ti di A

x_0 si dice p.to di max RELATIVO LOCALE se $f(x) \leq f(x_0)$
 $\forall x \in B_r(x_0)$ r = raggio opportuno
] x_0 batte un suo intorno

Oss. x_0 p.to max GLOBALE $\Rightarrow x_0$ p.to max LOCALE

ANALISI II CIV

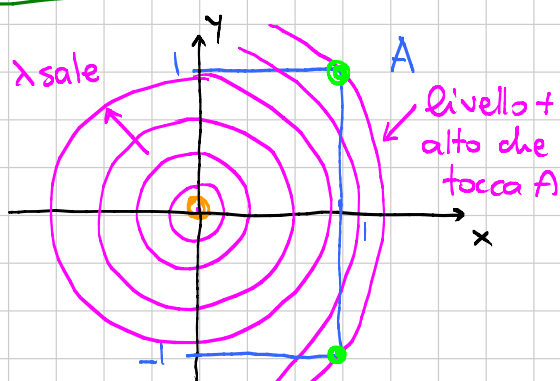
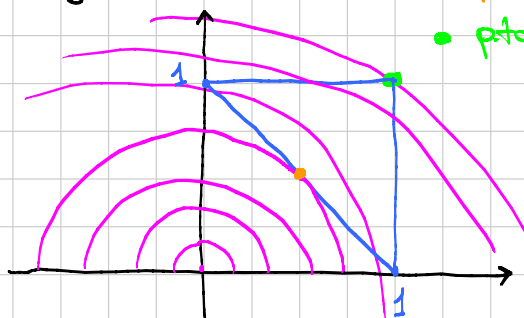
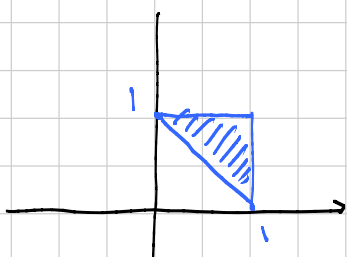
ORA 10

Esempio 1 $f(x,y) = x^2 + y^2$ $A = [0,1] \times [-1,1]$ 

Max = 2 p.to di max: (1,1), (1,-1)

min = 0 p.to di min: (0,0)

Metodo delle linee di livello
 minimo $\leadsto$ linea di livello
 + basso che
 tocca A

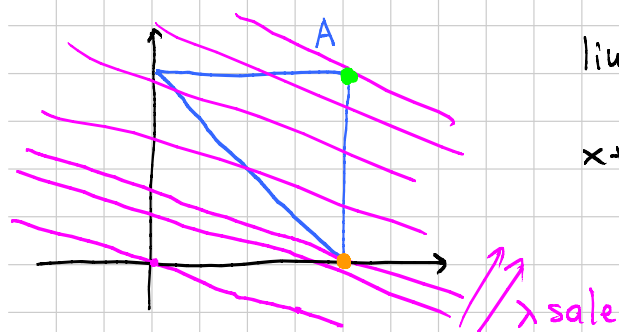
Esempio 2 $f(x,y) = x^2 + y^2$ 

Risposta:

max = 2 p.to di max (1,1)

min = $\frac{1}{2}$ p.to di min $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ " $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Esempio 3 A come in es. 2. $f(x,y) = x+3y$



linee di livello $f(x,y) = \lambda$

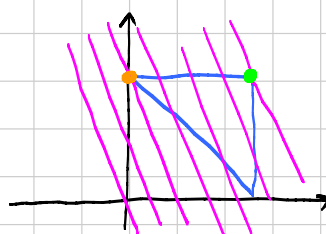
$x+3y = \lambda$ famiglia di rette //
con coeff. ang. $-\frac{1}{3}$

$$y = -\frac{x}{3} + \frac{\lambda}{3}$$

Risposta: max: 4
min: 1

p.to di max: (1,1)
p.to di min: (1,0)

Es. 4 $f(x,y) = 3x+y$



Es. 5: cosa accade
con $f(x,y) = x+y$

Derivate successive per funzioni di + variabili

$$f(x,y) = x^3 + 5x^2y + y^4$$

$$f_x = 3x^2 + 10xy$$

$$f_y = 5x^2 + 4y^3$$

$$f_{xx} = 6x + 10y$$

$$f_{xy} = 10x$$

$$f_{yx} = 10x$$

$$f_{yy} = 12y^2$$

Una funzione di 2 variabili ha 2 der. prime, 4 der. sec.,
8 der. terze, ..., 2^k derivate k-esime

Una funzione di n variabili ha n^k der. k-esime

S
E
M
B
R
A

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{xxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

Esempio $f(x, y) = \sin(x^2 y)$

$$f_x = 2xy \cos(x^2 y)$$

$$f_y = x^2 \cos(x^2 y)$$

$$f_{xx} = 2y \cos(x^2 y) - 4x^2 y^2 \sin(x^2 y)$$

$$f_{xy} = 2x \cos(x^2 y) - 2x^3 y \sin(x^2 y)$$

$$f_{yx} = 2x \cos(x^2 y) - 2x^3 y \sin(x^2 y)$$

UGUALI

$$f_{yy} = -x^4 \sin(x^2 y)$$

Teorema inversione dell'ordine di derivazione

Sotto ipotesi decenti (ad esempio se f_{xy} e f_{yx} esistono e sono continue) si ha che $f_{xy} = f_{yx}$

Conseguenza: in una derivata 2^{a} -esima di una funz. di 2 variabili conta solo quante derivo risp. a x e quante rispetto a y

$$f_{x \boxed{y} x y} = f_{x x y y}$$

INVECE

Deriv. 2^{a} in 2 var.
 3^{a} in "

f_{xx}	f_{xy}	f_{yy}	3	
f_{xxx}	f_{xxy}	f_{xyy}	f_{yyy}	4

k -esima $\leadsto k+1$ perchè risp. a x posso deriv.
 $0, 1, 2, \dots, k$

Esercizio $f(x,y) = \arctan(x^{3x} \sin x) + \frac{\log(1+e^y)}{\sin^5 y^6}$

$$f_{xy}(8,25) = 0$$

Quando faccio f_x scoppia il pezzo con la y e rimane un mostro con solo x

Ora derivo il mostro risp. a y e questo scoppia.

$$f_{xy}(x,y) = 0$$

IDEM per $f(x,y) = g(x) + h(y)$.

ANALISI II CIV

Titolo nota

ORA !!

17/10/2006

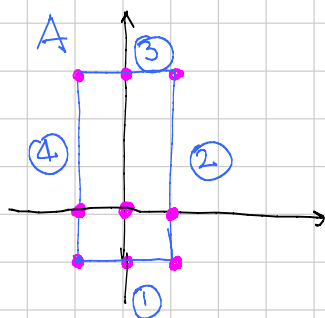
Strumenti per max / min di funzioni di 2 variabili su insiemi compatti (chiusi + limitati).

In questo caso sappiamo per W. che max e min esistono. Non resta che trovare p.ti di max / min

- * stat. interni $\nabla f = 0$
- * sing. interni ∇f non esiste
- * bordo

Bordo $\begin{cases} \nearrow \text{Parametrizzazione} \\ \searrow \text{Moltiplicatori (e) di LAGRANGE} \end{cases}$

Esempio $f(x, y) = x^2 + 3y^3$ $A = [-1, 1] \times [-1, 3]$



* Sing. interni : $\emptyset$

* Stat. interni : $\nabla f = 0$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(0, 0)}$$

unico p.to stat. interno

* BORDO con parametrizzazione

parametro

$$\textcircled{1} = \{ (\underset{\downarrow \text{parametro}}{t}, -1) : t \in [-1, 1] \}$$

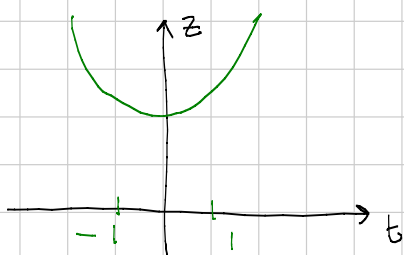
$$\textcircled{2} = \{ (1, t) : t \in [-1, 3] \}$$

$$\textcircled{3} = \{ (t, 3) : t \in [-1, 1] \}; \quad \textcircled{4} = \{ (-1, t) : t \in [-1, 3] \}$$

Per ogni pezzo del bordo, sostituisco la param. nella funzione e studio la funzione di t così ottenuta nell'int. dato

sost. param.

Pezzo ① $\varphi_1(t) = f(t, -1) = t^2 + 3$ che studio per $t \in [-1, 1]$



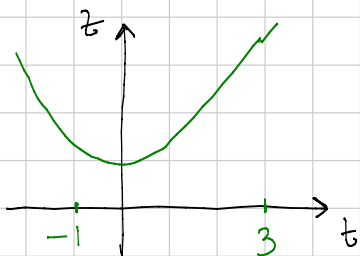
min per $t=0 \rightarrow$ corrisponde in ① a $(0, -1)$

max per $t=1$ e $t=-1$

$\downarrow$
corrispondono in ① ai p.ti $(1, -1)$ e $(-1, -1)$

Il grafico verde rappresenta la quota a cui si trova un omio che percorre il pezzo ①

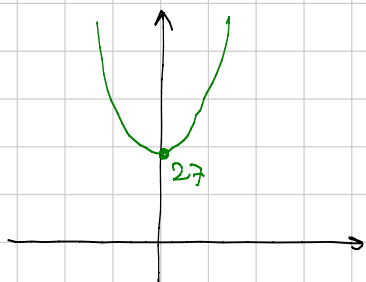
Pezzo ② $\varphi_2(t) = f(1, t) = 1 + 3t^2$ $t \in [-1, 3]$



max per $t=3 \rightarrow$ corrisp. a $(1, 3)$

min per $t=0 \rightarrow$ corrisp. a $(1, 0)$

Pezzo ③ $\varphi_3(t) = f(t, 3) = t^2 + 27$ $t \in [-1, 1]$

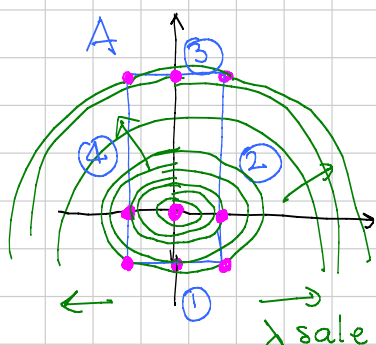


max per $t = \pm 1 \rightarrow$ corr. a $(-1, 3)$, $(1, 3)$

min per $t=0 \rightarrow$ corr. a $(0, 3)$

[Pezzo ④] $\varphi_4(t) = f(-1, t) = 3t^2 + 1 \quad t \in [-1, 3]$

Uguale al pezzo ②. I p.ti interessanti saranno ancora
 per $t=0$ e per $t=3$
 $\downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 $(-1, 0)$ $(-1, 3)$



Conclusione: abbiamo ottenuto 3
 CANDIDATI al ruolo di p.to di max/min.

Basta sostituirli tutti e 3 nella funzione
 per trovare chi è p.to max e chi
 p.to / min.

Con qualche calcolo

$$\min = 0$$

p.ti di min: $(0, 0)$

$$\max = 28$$

p.ti di max: $(1, 3), (-1, 3)$

Interpretazione con linee di livello

$$x^2 + 3y^2 = \lambda \quad \text{ellissi}$$

Era possibile vedere a priori che il pezzo ② è uguale
 al pezzo ④? Sì, infatti

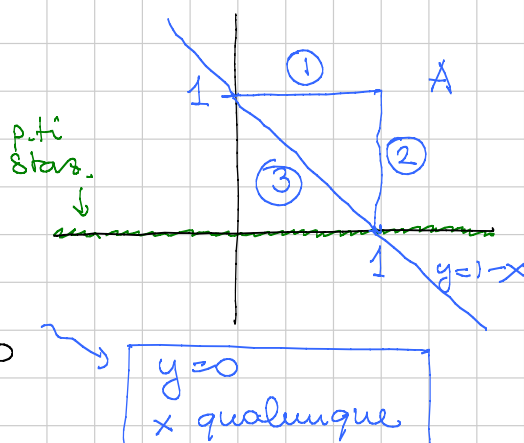
- * f è pari rispetto alla variabile x (se cambio x con $-x$ non succede nulla)
- * Se cambio x con $-x$ il pezzo ② diventa il pezzo ④

Esempio 2 $f(x,y) = xy^2$

* p.ti sing. interni : $\emptyset$

* p.ti staz. interni

$$\nabla f = 0 \quad \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$



Quindi tutti i p.ti con $y=0$ sono stazionari $\Rightarrow \infty$ p.ti stazionari

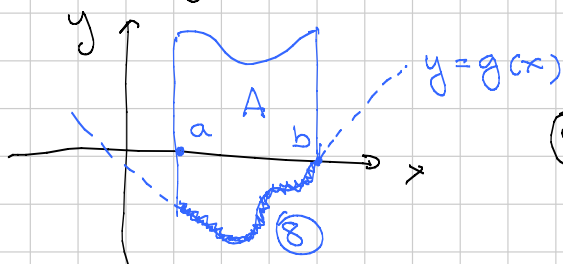
Nessuno di questi è interno.

$$\textcircled{1} = \{(t, 1) : t \in [0, 1]\}$$

$$\textcircled{2} = \{(1, t) : t \in [0, 1]\}$$

$$\textcircled{3} = \{(t, 1-t) : t \in [0, 1]\}$$

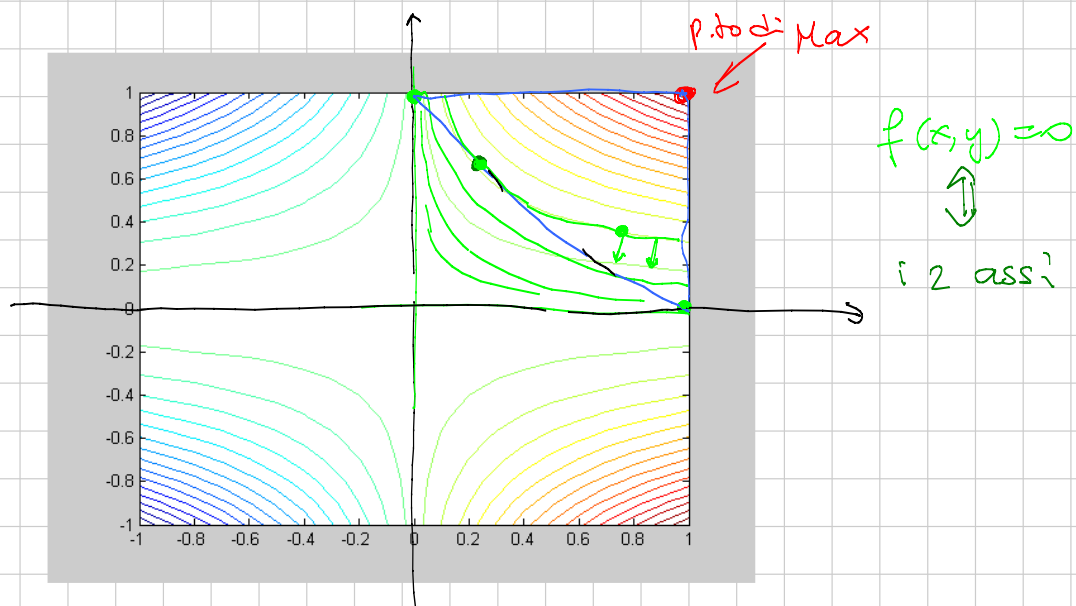
In generale, se devo parametrizzare un pezzo di bordo che è grafico di una funzione $y = g(x)$



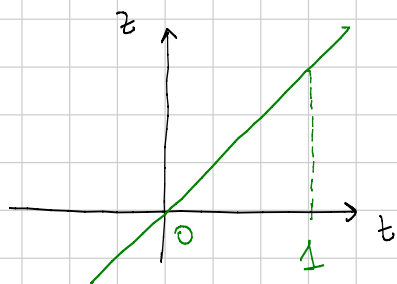
$$\textcircled{8} = \{(t, g(t)) : t \in [a, b]\}$$

ANALISI II CIN

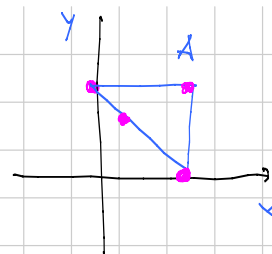
ORA 12



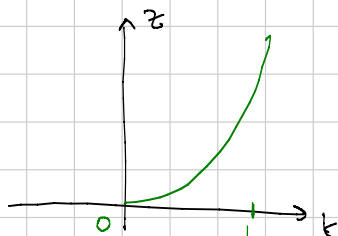
Passo ① $\varphi_1(t, 1) = t \quad t \in [0, 1]$



max per $t=1$
 min per $t=0$



Passo ② $\varphi_2(t) = f(1, t) = t^2 \quad t \in [0, 1]$



max per $t=1$
 min per $t=0$

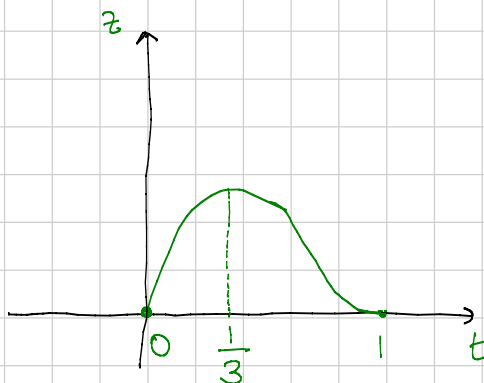
Punto ③ $\varphi_3(t) = f(t, 1-t) = t(1-t)^2 \quad t \in [0, 1]$

$$\varphi_3'(t) = (1-t)^2 - t \cdot 2(1-t)$$

$$= 1 - 2t + t^2 - 2t + 2t^2$$

$$= 3t^2 - 4t + 1$$

$$= (3t-1)(t-1)$$

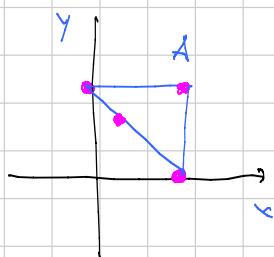


$$\varphi_3'(t) = 0 \Leftrightarrow t=1 \text{ oppure } t=\frac{1}{3}$$

$$\varphi_3'(t) < 0 \Leftrightarrow t \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

max per $t = \frac{1}{3} \rightarrow$ corrisponde a $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

min per $t=0$ e $t=1 \rightarrow$ corr. ai 2 estremi del punto 3



Conclusione: ho 4 candidati

$(1,0)$	$f(1,0) = 0$	min
---------	--------------	-----

$(1,1)$	$f(1,1) = 1$	Max
---------	--------------	-----

$(0,1)$	$f(0,1) = 0$	min
---------	--------------	-----

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \quad f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$$

Max = 1 p.to di max: $(1,1)$

min = 0 p.ti di min: $(0,1)$ e $(1,0)$

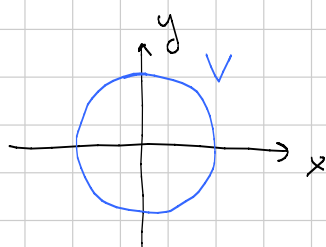
MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Def. Un insieme $V \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice luogo di zeri se esiste una funzione $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$V = \{ (x,y) : \Phi(x,y) = 0 \}$$

Equazione di V

Esempio $V = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 + y^2 - 3}_{\Phi(x,y)} = 0 \}$



solo il bordo!!!

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Sia V il luogo di zeri di una funzione $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile.

Sia poi $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile.

I p.ti di max / min di f su V sono da ricercarsi in queste 2 categorie

* PUNTI SINGOLARI SUL BORDO ^(su V), cioè p.ti di V in cui

$\nabla \Phi = 0$. Questi si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases}$$

Nota bene: 3 equazioni, 2 incognite: x, y
"spesso" il sistema non ha soluzioni

- * PUNTI STAZIONARI SUL BORDO (su V), cioè p.ti di V in cui ∇f e $\nabla \Phi$ sono paralleli, cioè esiste un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f = \boxed{\lambda} \nabla \Phi$$

↑ moltiplicatore

Questi punti si trovano risolvendo il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x = \lambda \Phi_x \\ f_y = \lambda \Phi_y \\ \Phi = 0 \end{array} \right\} \quad \nabla f = \lambda \nabla \Phi$$

} appartenere a V

3 equazioni

3 incognite: x, y, λ

"DI SOLITO" vengono fuori un po' di punti.

Operativamente:

- scrivo il bordo che mi interessa come luogo di zeri di una certa Φ
- risolvo il 1° sistema $\left\{ \begin{array}{l} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ \Phi = 0 \end{array} \right.$

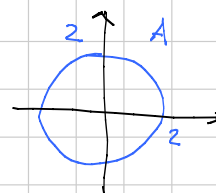
Tutte le sue soluzioni sono candidati

* risolvo il 2° sistema $\left\{ \begin{array}{l} f_x = \lambda \Phi_x \\ f_y = \lambda \Phi_y \\ \Phi = 0 \end{array} \right.$

Le soluzioni sono delle terne (x, y, λ) . Mi dimentico di λ e le coppie (x, y) così ottenute le metto fra i candidati.

Esempio $f(x,y) = x+3y$

A = cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 2.



* Stat. interni $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$

* Sing. interni : $\emptyset$

* Bordo = $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2+y^2-4=0}_{\Phi(x,y)}\}$

1° Sistema $\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2+y^2-4 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow x=0 \\ \rightarrow y=0 \end{matrix}$

NO SOLUZIONI INCOMPATIBILI

2° sistema $\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 1 = \lambda \cdot 2x \\ 3 = \lambda \cdot 2y \\ x^2+y^2-4 = 0 \end{cases} \begin{matrix} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{3}{2\lambda} \end{matrix}$

Sost. nella 3° eq.

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 4$$

$$10 = 16\lambda^2$$

$$\lambda^2 = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

$\lambda = \pm \frac{\sqrt{10}}{4}$. Noto λ , ricavo x e y e ho i candidati

CIVILI ANALISI II

ORA 13

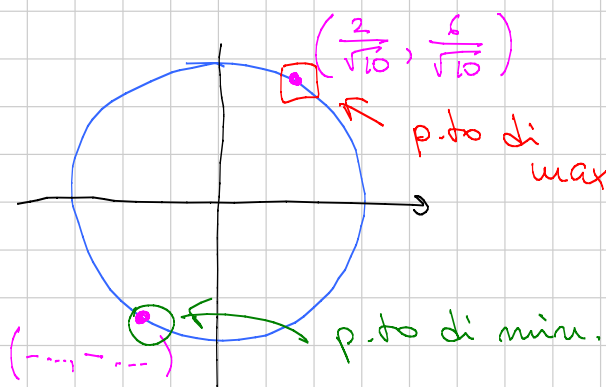
$$\lambda = + \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$\lambda = - \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$x = \frac{1}{2\lambda} = \frac{2}{\sqrt{10}} \quad y = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

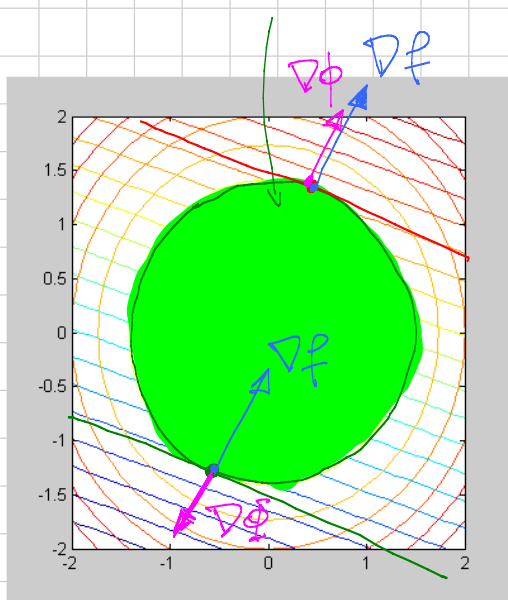
$$x = \frac{1}{2\lambda} = -\frac{2}{\sqrt{10}} \quad y = -\frac{6}{\sqrt{10}}$$

candidati



$$f(x, y) = x + 3y$$

Insieme A



Rette = linee di livello di f
 $x + 3y = \lambda$

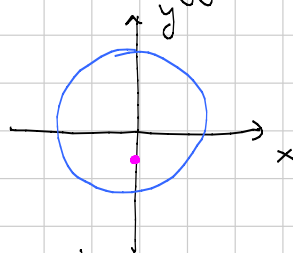
Cerchi: linee di livello di Φ
 $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = \lambda$

L'insieme A è quello che ha
 come bordo $\Phi = 0$

Nei p.ti di max / min di f sul
 bordo di A, le linee di livello
 di f sono tangenti a quelle di Φ
 Poiché le linee di livello sono
 tangenti, i gradienti (ad esse $\perp$)
 devono essere $\parallel$, di qui $\nabla f = \lambda \nabla \Phi$

Esempio 2 $A =$ cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 2

$$f(x,y) = x + xy$$



* Sing. interni : $\emptyset$

* Stat. interni $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \begin{cases} 1+y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases}$

* Bordo : è il luogo di zeri di $\Phi(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$

1° SISTEMA : Nessuna soluzione

2° SISTEMA $\begin{cases} f_x = \lambda \Phi_x \\ f_y = \lambda \Phi_y \\ \Phi = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 1+y = \lambda \cdot 2x \\ x = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

$y = 2\lambda x - 1$ (1° eq.) Sost. nella 2°

$x = 2\lambda (2\lambda x - 1) = 4\lambda^2 x - 2\lambda$

$x(1 - 4\lambda^2) = -2\lambda$

$$x = \frac{-2\lambda}{1 - 4\lambda^2}$$

$y = 2\lambda x - 1 = 2\lambda \left(\frac{-2\lambda}{1 - 4\lambda^2} \right) - 1$

$= \frac{-4\lambda^2 - 1 + 4\lambda^2}{1 - 4\lambda^2} = -\frac{1}{1 - 4\lambda^2} = y$

Sostituisco nella 3°

$x^2 + y^2 = 4$

$\frac{4\lambda^2}{(1 - 4\lambda^2)^2} + \frac{1}{(1 - 4\lambda^2)^2} = 4 \rightsquigarrow \begin{matrix} \text{ricavo } \lambda \\ \downarrow \\ \text{ricavo } x \text{ e } y \end{matrix}$

Esempio 3 $f(x, y) = x^2 + 3y^2$

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1 \}$$

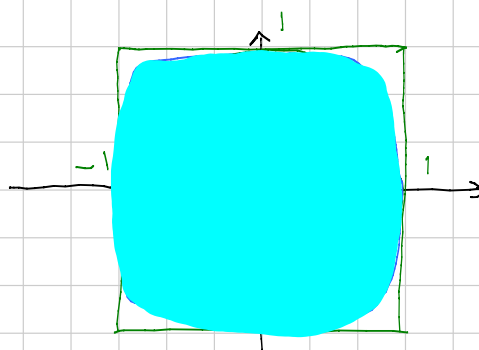
A è limitato? Sì, infatti di sicuro $-1 \leq x \leq 1$
 $-1 \leq y \leq 1$

A è chiuso? "Sì, perchè c'è il $\leq$ e non solo il $<$ "

Come è fatto A?

Sta dentro al quadrato

È + grande o + piccolo del cerchio?



Prendo P sul bordo del cerchio

$P(x, y)$ $x^4 + y^4 < x^2 + y^2 = 1$

Le coordinate di P verificano con il $<$ l'eq. di A

Conclusione: A è + piccolo del $\square$ e + grande del $\circ$

A è un "televisore"

Stessa cosa vale per gli insiemi del tipo

$$x^6 + y^6 \leq 1, \quad x^8 + y^8 \leq 1, \quad |x|^7 + |y|^7 \leq 1$$

+ l'esponente sale, + il televisore tende al $\square$

Tornando all'esercizio.

Sing. int.: $\emptyset$

Staz. int.: $(0,0)$

Bordo = luogo di zeri di $\Phi(x,y) = x^4 + y^4 - 1$

1° SISTEMA $\begin{cases} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases} \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \rightarrow \text{NO SOLUZIONI!}$

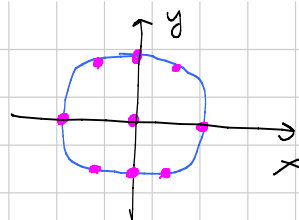
2° SISTEMA $\begin{cases} f_x = \lambda \Phi_x \\ f_y = \lambda \Phi_y \\ \Phi = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x = \lambda \cdot 4x^3 \\ 6y = \lambda \cdot 4y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x = \lambda \cdot 4x^3 \\ 6y = \lambda \cdot 4y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

1ª equazione

$$x - 2\lambda x^3 = 0$$

$$x(1 - 2\lambda x^2) = 0$$



$$x^2 = \frac{1}{2\lambda}$$

$$x^4 = \frac{1}{4\lambda^2}$$

$$1 - 2\lambda x^2 = 0$$

2ª eq.

$$3y - 2\lambda y^3 = 0$$

$$y(3 - 2\lambda y^2) = 0$$

$$y^2 = \frac{3}{2\lambda}$$

$$y^4 = \frac{9}{4\lambda^2}$$

$$3 - 2\lambda y^2 = 0$$

↓

$$y = 0$$

3ª eq.

$$x = \pm 1$$

$$x = 0$$

3ª eq.

$$y^4 = 1$$

$$y = \pm 1$$

3^a eq. $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 1$ $4\lambda^2 = 10$, $\lambda = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$

$$x^2 = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

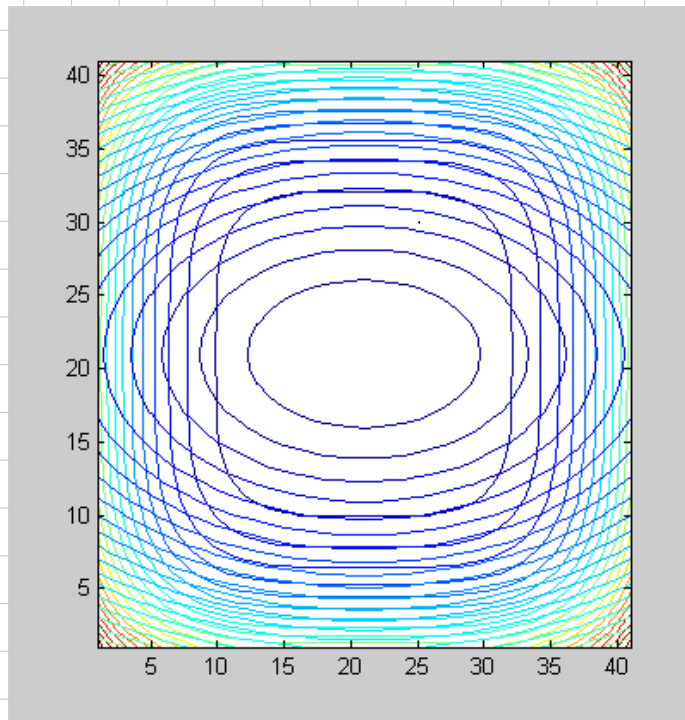
$$y^2 = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Questo non
produce
nulla

Vengono fuori 4 p.ti $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{10}}, \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \right)$

i segni si possono prendere
in 4 modi

Non resta ora che sostituire i 3 p.ti.



ANALISI II CIVILI (NUCL.)

Titolo nota

ORA 14

18/10/2006

* Formula di Taylor in + variabili

* Forme (o matrici) definite positive/negative
— o — o —

TAYLOR IN 1 VARIABLE centro $x_0 = 0$

Data una funzione f ed un intero positivo n , esiste un polinomio $P_n(x)$ tale che

DI GRADO $\leq n$

$$f(x) = P_n(x) + O(x^n)$$

resto che tende a zero
+ velocemente di x^n

↑ RESTO DI PEANO

Inoltre

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Se conosco tutte le derivate di f (fino alla n -esima) nel p.to $x=0$, posso determinare $P_n(x)$

RESTO DI LAGRANGE

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

RESTO
DI
LAGRANGE

Dato x , esiste un p.to ξ compreso tra 0 e x per cui vale la formula di sopra

In 2 variabili centro $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Data $f(x, y)$ ed n esiste un unico polinomio $P_n(x, y)$ tale che

DI GRADO $\leq n$

$$f(x, y) = P_n(x, y) + o((\sqrt{x^2 + y^2})^n)$$

RESTO DI
PEANO

↑
polinomio di
2 variabili

Formula per $P_n(x, y)$

$$P_n(x, y) = f(0, 0) + [f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y] \cdot \frac{1}{1!} +$$

$$+ \frac{1}{2!} [f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2]$$

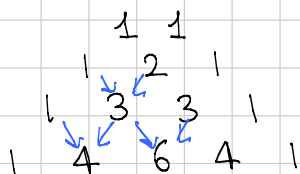
è come se ci fossero
sia xy sia yx

$$+ \frac{1}{3!} [f_{xxx}(0, 0)x^3 + 3f_{xxy}(0, 0)x^2y +$$

$$+ 3f_{xyy}(0, 0)xy^2 + f_{yyy}(0, 0)y^3]$$

CORRETTA
DOPPO
↓

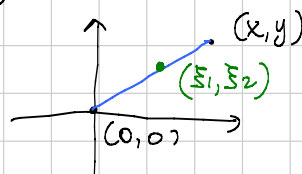
$$+ \frac{1}{4!} [f_{xxxx}(0, 0)x^4 + 4f_{xxx}(0, 0)x^3y + 6f_{xxy}(0, 0)x^2y^2 + \dots]$$



TRIANGOLO DI TARTAGLIA

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

RESTO DI LAGRANGE : il resto è come se fosse il termine successivo, solo che le derivate non sono calcolate in $(0,0)$, ma in punto (ξ_1, ξ_2) appartenente al segmento che congiunge (x,y) con $(0,0)$



Operativamente, come si calcola?

Ricordando i polinomi di Taylor in 1 variabile!

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots$$

sin 2t e cos 2t
sono come sin t e cos t,
solo con tutti +

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots$$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} - \dots$$

$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \dots$$

Esempi ① $f(x,y) = e^{xy}$

$$e^{xy} = \boxed{1 + xy} + o((x^2+y^2)^{3/2})$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}$$

il termine
successivo
 $\frac{x^2y^2}{2}$ è di
grado 4

Calcolare $\frac{\partial^5 f}{\partial x^3 \partial y^2}(0,0) = 0$

È il coeff. che compare
in $P_5(x,y)$ davanti a x^3y^2 ,
ma questo termine non
c'è nel polinomio.

$$\textcircled{2} \quad f(x, y) = x \sin(x+y) \quad P_3(x, y)$$

$$\sin(x+y) = (x+y) - \frac{(x+y)^3}{6} + \dots$$

INUTILE

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \dots$$

Moltiplico per x :

NON ENTRA NEL $P_3(x, y)$

$$x \sin(x+y) = x(x+y) - x \frac{(x+y)^3}{6} + \dots$$

$$P_3(x, y) = x^2 + xy \quad \text{! i termini successivi hanno grado } \geq 4$$

Cosa si può dire delle derivate terze di f in $(0,0)$?
Sono tutte $= 0$.

$\textcircled{3}$

$$\sin(xy) \cos(x+y) \quad P_4(x, y)$$

$$\sin(xy) = xy - \frac{x^3 y^3}{6} + \dots$$

$$\cos(x+y) = 1 - \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^4}{24} + \dots$$

4!

$$\sin(xy) \cos(x+y) = xy - \frac{xy(x+y)^2}{2}$$

$P_4(x, y)$

Tutto il resto
è di grado > 4

ANALISI II CIV

ORA 15

FORME QUADRATICHE E MATRICI

II

polinomio in n variabili con tutti termini di grado 2

Esempi $\boxed{n=2}$ $q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$

$\boxed{n=3}$ $q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$

Le forme quadratiche intervengono come termini di grado 2 nei pol. di Taylor

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{SIMMETRICA}$$

$$q(x,y) = (x,y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(x,y) \begin{pmatrix} ax+by \\ bx+cy \end{pmatrix} =$$

$$= x(ax+by) + y(bx+cy)$$

$$= ax^2 + bxy + bxy + cy^2$$

Ad ogni forma corrisponde una matrice SIMMETRICA
 IN n VARIABILI e VICEVERSA $n \times n$

$$q(x, y, z) = 3x^2 + 6xy + z^2 - 3yz$$

metà di 6

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \leadsto q(x, y, z) = y^2 + 2z^2 + 6xy + 10xz$$

$$f_{xx}(0,0) x^2 + 2 f_{xy}(0,0) xy + f_{yy}(0,0) y^2 = q(x, y)$$

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix} \quad \text{MATRICE HESSIANA DI } f \text{ in } (0,0) \quad Hf(0,0)$$

Def. Una forma quadratica (o una matrice simm.) si dice

DEFINITA POSITIVA se $q(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$

" NEGATIVA se $q(x, y) < 0$ per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$

SEMIDEFINITA POSITIVA se $q(x, y) \geq 0$ per ogni (x, y)

" NEGATIVA se $q(x, y) \leq 0$

Problema: data una forma, stabilire se ricade in una di queste 4 categorie

Oss. Una forma non è obbligata a cadere in una delle 4 categorie

$$q(x, y) = x^2 - y^2 \quad \begin{array}{l} \text{positiva in } (1, 0) \\ \text{negativa in } (0, 1) \end{array}$$

Si dice in questo caso che è NON DEFINITA

METODI $\begin{cases} \nearrow \text{ Completamento dei quadrati } \textcircled{1} \\ \rightarrow \text{ Autovalori } \textcircled{2} \\ \searrow \text{ Minori ORLATI } \textcircled{3} \end{cases}$

Metodo ② Calcolo gli autovalori della matrice.
Essendo la matrice simmetrica, vengono per forza numeri REALI

La forma risulta

* DEF. POS. se tutti gli autov. sono > 0

* SEMI " " " " ≥ 0

DEF NEG " " " " < 0

SEMI " " " " ≤ 0

NON DEFINITA se ci sono autov. pos. e autov. neg.

Esempio $q(x, y) = x^2 - y^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Gli autovalori sono gli el. della diagonale (è vero perché la matrice è DIAGONALE), dunque uno pos. e uno neg $\Rightarrow$ non definita.

$$q(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 2y^2$$

$\uparrow \quad \uparrow$

$$= (x+y)^2 + 2y^2$$

Essendo somma di 2 $\square$, sarà sempre ≥ 0 . Quando si annulla?

Se e solo se $x+y=0$ e $y=0$, cioè per $(x,y)=(0,0)$

Quindi è definita positiva.

$$\begin{aligned}
 q(x,y) &= x^2 + xy + y^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{y}{2} + y^2 \\
 &\quad \uparrow \quad \uparrow \text{DOPPIO PRODOTTO} \\
 &= x^2 + 2x \cdot \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{3}{4}y^2 \\
 &= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2
 \end{aligned}$$

$\square + \square \Rightarrow$ definita positiva

$$\begin{aligned}
 q(x,y) &= x^2 + 3xy + y^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{3y}{2} + y^2 \\
 &= x^2 + 2x \cdot \frac{3y}{2} + \frac{9y^2}{4} - \frac{5}{4}y^2 \\
 &= \left(x + \frac{3y}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}y^2 \\
 &= \square - \square \\
 &\quad \text{NON DEFINITA}
 \end{aligned}$$

$\underline{x^2 + 2xy} + xy + y^2$
 $(x+y)^2 + \boxed{xy}$
 $\downarrow$
 No $\square$

Se voglio $q(x,y) > 0$ basta prendere $y=0$, x qualunque

$q(x,y) < 0$ basta prendere $x + \frac{3y}{2} = 0$
e y qualunque

Esempio di $q(x,y)$ semidef. pos., ma non def. pos.

$$\begin{aligned} q(x,y) &= x^2 - 2xy + y^2 \\ &= (x-y)^2 \end{aligned}$$

$$q(x,y) \geq 0 \quad \text{per ogni } (x,y)$$

Quando $q(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$ dunque si annulla anche
per $(x,y) \neq (0,0)$

ANALISI II

Titolo nota

CIV
(NUCL)

ORA 16

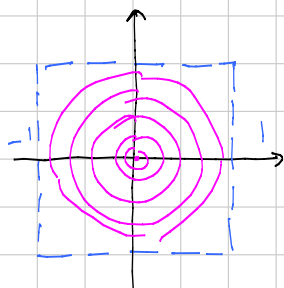
24/10/2006

- Introduzione ai pb. di max / min su insiemi non limitati (non chiusi)
- Limiti all' ∞ per funzioni di + variabili
↳ coord. polari
- Metodo dei minori orlati
- Studio locale di funzioni di + variabili

MAX / MIN su insiemi limitati, ma non chiusi

Non si può applicare Weierstrass $\Rightarrow$ max e min non sono obbligati ad esistere

Esempio 1 Max / min di $f(x,y) = x^2 + y^2$ sul quadrato $(-1,1) \times (-1,1)$



min = 0 p.to di min: (0,0)

max: N.E. [il max vorrebbe essere nei 4 vertici che però non appartengono all'insieme]

Sup = 2

valore di $f(x,y)$
nei 4 vertici

In generale: devo calcolare (se esistono) max/min di $f(x,y)$ su un insieme A limitato, ma non chiuso.

Se si può, risolvo il problema sulla "chiusura di A " (A unito il suo bordo). Qui max e min esistono per W .

occorre che f si estenda alla chiusura in modo continuo

In fine quando se i pts di max/min stanno in A o sul bordo.

Esempio 2 $A = (-1, 1) \times (-1, 1)$

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x}$$

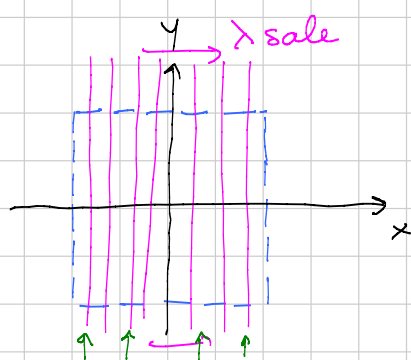
max/min N.E.

$$f(x,y) = \lambda$$

$$\frac{1}{1-x} = \lambda$$

$$1-x = \frac{1}{\lambda}$$

$$x = 1 - \frac{1}{\lambda}$$



Il min vorrebbe essere sul lato di dx , quindi

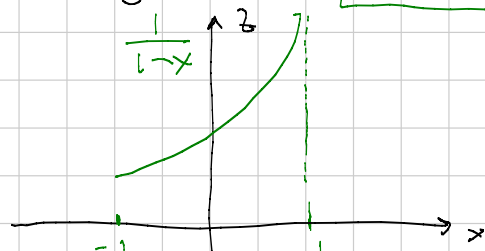
$$\inf = \frac{1}{2}$$

Il max vorrebbe essere sul lato di dx , sul quale f non è nemmeno definita (sul quadrato chiuso non avrei nemmeno potuto considerare il problema).

Ma mano che ci si avvicina al lato di dx $x \rightarrow 1^-$, quindi $f \rightarrow +\infty$.

Conseguenza:

$$\sup = +\infty$$



Esempio 1 $f(x, y) = x^2 + y^2$

$\min = \inf = 0$ p.to min: $(0, 0)$

$\sup = +\infty$, max N.E.



un onius che fa questo percorso vede
 $f(0, x) = x^2$, che tende a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$

$y=0$, x enorme

$A = \mathbb{R}^2$

N.B. INF e SUP esistono
 per forza

MAX e MIN possono
 non esistere

Esempio 2 $f(x, y) = x^2 - y^4$

$A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=0$, x enorme) max N.E.

$\inf = -\infty$ ($x=0$, y enorme) min N.E.

Esempio 3 $f(x, y) = xy$

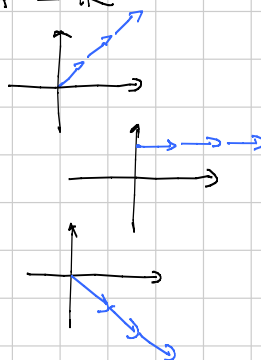
$A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=x$ e x enorme)

max: N.E. ($y=3$ e x enorme)

$\inf = -\infty$ ($y=-x$ e x enorme)

min: N.E. ($y=3$ e x enorm. neg.)



Esempio 4 $f(x, y) = x^3 + y^3$

$A = \mathbb{R}^2$

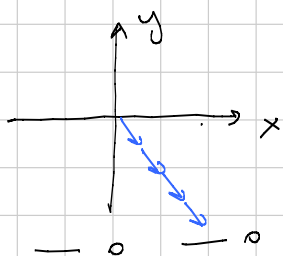
$\sup = +\infty$ ($y=0$, x enorme) max N.E.

$\inf = -\infty$ ($y=0$, x enorm. neg.)

Esempio 5 $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=0$, x enorme)

$\inf = -\infty$ ($y = -x \Rightarrow$ diventa $f(x, -x) = x^2 - 3x^2 + x^2 = -x^2$)

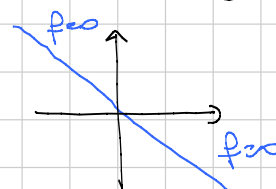


Con x enorme $\rightarrow -\infty$)

Esempio 6 $f(x,y) = x^2 + 3xy + 2y^2$

$\sup = +\infty$ ---

$y = -x$ $f(x, -x) = x^2 - 3x^2 + 2x^2 = 0$



$$x^2 + 3xy + 2y^2 = \left[x^2 + 2x \cdot \frac{3y}{2} + \left(\frac{3y}{2} \right)^2 \right] - \left(\frac{3y}{2} \right)^2 + 2y^2$$

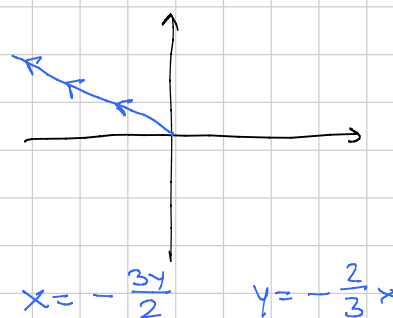
$$= \left(x + \frac{3y}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}y^2$$

COMPLETAMENTO
DEI QUADRATI

Poniamo $x = -\frac{3y}{2}$, e y enorme

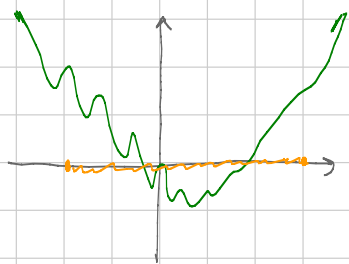
$f\left(-\frac{3y}{2}, y\right) = -\frac{1}{4}y^2 \rightarrow -\infty$

$\inf f = -\infty$



Esempio 7 $f(x,y) = x^4 + y^4 + xy$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ Max N.E. ($y=0$, x enorme)

In 1 variabile

$$f(x) = x^4 - 17x^2 + 8\sin x^3 \quad A = \mathbb{R}$$
$$\sup = +\infty \quad (x \text{ enorme})$$

Weierstrass esteso ; $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua

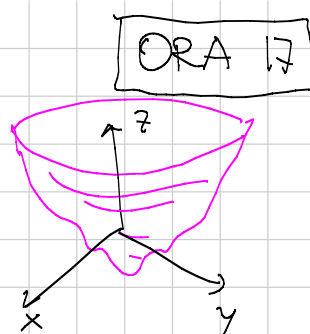
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Allora esiste $\min \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$

ANALISI II CIV

" $\lim f(x,y) = +\infty$ tutto intorno"

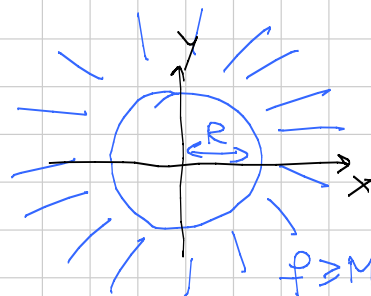
"La funzione diventa enorme man/mano che ci si allontana dall'origine"



Def. Si dice che

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$$

allontanarsi dall'origine



se $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme) $\exists R > 0$ b.c.

$$f(x,y) \geq M \quad \forall (x,y) : \|(x,y)\| \geq R$$



Analogamente:

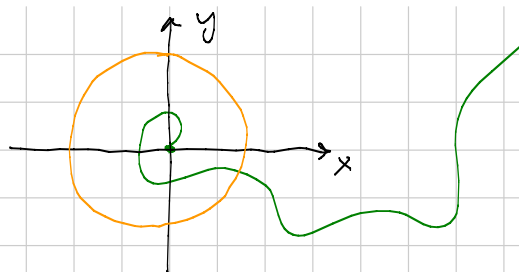
$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = -\infty$$

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorm. neg.) $\exists R > 0$ b.c.

$$f(x,y) \leq M \quad \forall (x,y) \text{ fuori da } B_R(0,0)$$

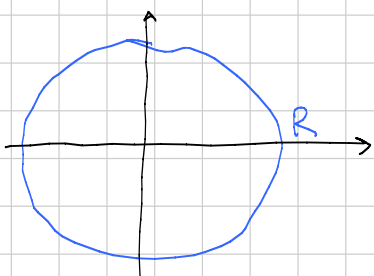
o ancora $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = l \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0 \text{ b.c. } |f(x,y) - l| \leq \varepsilon \quad \forall (x,y) \text{ fuori da } B_R(0,0)$$



WEIERSTRASS ESTESOSia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua e t.c.

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$$

Allora esiste per forza $\min \{ f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$ Dim. il minimo, se esiste, sarà $\leq f(0,0)$. Per definizione di limite,★ $f(x,y) \geq f(0,0) + 1$ fuori da un cerchio di raggio opportuno

Considero il minimo di $f(x,y)$ in $B_R(0,0)$ (esiste per W.). Dico che è il min non solo dentro B_R , ma su tutto $\mathbb{R}^2$.
Sia (x_0, y_0) tale punto.

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in B_R(0,0)$$

Inoltre

$$f(x_0, y_0) \leq f(0,0) \leq f(x,y) - 1 < f(x,y)$$

↑
dalla ★ per ogni (x,y)
fuori da $B_R(0,0)$

— o — o —

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + xy. \quad \text{Se sapessimo che}$$

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$$

per W. esteso sapremmo che $\exists$ min su tutto $\mathbb{R}^2$. Ma allora si troverebbe in un p.to stazionario e quindi si sa trovare,

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^3 + y = 0 \\ 4y^3 + x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -4x^3 \\ 4(-4x^3)^3 + x = 0 \end{cases} \quad \text{sost. nella 2^a}$$

$$-256x^8 + x = 0; \quad x(-256x^8 + 1) = 0$$

$x = 0$
 $\downarrow$
 $y = 0$

$x^8 = \frac{1}{256} = \frac{1}{2^8}$
 $\downarrow$
 $x = \pm \frac{1}{2}$
 $\downarrow$
 $y = \mp \frac{1}{2}$

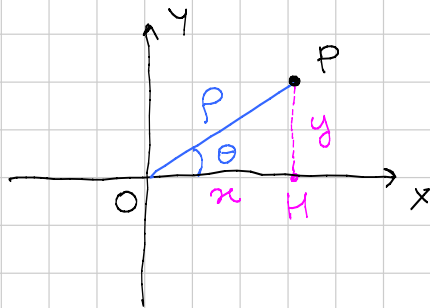
RICAVO
DA
1^a EQ.

PUNTI STAZ.:

$$(0,0), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Sostituendolo si vede quale/quali sono i pti di min.

COORDINATE POLARI NEL PIANO



$$p = \sqrt{x^2 + y^2} \quad [p \geq 0]$$

θ = angolo definito a meno di multipli di 2π

$$x = p \cos \theta \quad y = p \sin \theta$$

Fare un lim $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$ equivale a fare un limite per $p \rightarrow +\infty$

Se ho $f(x,y) = x^2 + y^2 + 6 \sin(xy) + 5x$

Cosa diventa in coord. polari?

$$f(p, \theta) = p^2 \cos^2 \theta + p^2 \sin^2 \theta + 6 \sin(p^2 \sin \theta \cos \theta) + 5p \cos \theta$$

↑
sost.

$$= p^2 + 6 \sin(\quad) + 5p \cos \theta$$

Voglio dimostrare che $f(p, \theta) \rightarrow +\infty$ quando $p \rightarrow +\infty$, indipendentemente da θ .

Per farlo rigorosamente, usiamo il confronto

$$\boxed{p^2 + 6 \sin(\quad) + 5p \cos \theta} \geq \boxed{p^2 - 6 - 5p}$$

$\downarrow$ $+\infty$ per confronto $\downarrow$ $+\infty$ per $p \rightarrow +\infty$

Esempio 8 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 7y + 522x$

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$$

Passo in coord. polari:

$$f(p, \theta) = p^2 \cos^2 \theta + 2p^2 \sin^2 \theta - 7p \sin \theta + 522p \cos \theta$$

$$= p^2 + p^2 \sin^2 \theta - 7p \sin \theta + 522p \cos \theta$$

$$\boxed{p^2 + p^2 \sin^2 \theta - 7p \sin \theta + 522p \cos \theta} \geq \boxed{p^2 - 7p - 522p}$$

$\downarrow$ $+\infty$ per confronto $\downarrow$ $+\infty$

Esempio 7 $f(x,y) = x^4 + y^4 + xy$

$$f(\rho, \theta) = \rho^4 \cos^4 \theta + \rho^4 \sin^4 \theta + \rho^2 \cos \theta \sin \theta$$

$$\boxed{\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) + \rho^2 \cos \theta \sin \theta} \geq \boxed{c \rho^4 - \rho^2} \quad [c > 0]$$

$\downarrow$ $+\infty$ per congruenza $\downarrow$ $+\infty$ per colpa di $c \rho^4$

Perché $\cos^4 \theta + \sin^4 \theta \geq c$ con $c > 0$

Prendo la funzione $g(\theta) = \cos^4 \theta + \sin^4 \theta$. Questa funzione, quando θ varia da 0 a 2π , assume da qualche parte il suo minimo (per W.). Questo minimo non può essere 0, perché $\sin \theta$ e $\cos \theta$ non possono essere contempor. nulli. Pertanto il min. sarà un certo $c > 0$ $g(\theta) \geq c$

$$\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^4 \sin^4 \theta - \rho^2$$

Se $\cos \theta \neq 0$, allora

$$\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^4 \sin^4 \theta - \rho^2 \geq \boxed{\rho^4 \cos^4 \theta - \rho^2}$$

$\downarrow$ $+\infty$ $\downarrow$ $+\infty$

Se $\cos \theta = 0$, allora $\sin^4 \theta = 1$

$$\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^4 \sin^4 \theta - \rho^2 \geq \boxed{\rho^4 - \rho^2}$$

$\downarrow$ $+\infty$

$\Rightarrow$ IN OGNI CASO $\rightarrow +\infty$

NOOOOOO !!!!!

ANALISI II

ORA 18

Esempio 9 $f(x, y) = x^4 + y^2 - 3xy^2$

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$$

$$f(\rho, \theta) = \rho^4 \cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta - 3\rho^3 \cos \theta \sin^2 \theta$$

Quando $\cos \theta \neq 0$, domina $\rho^4 \cos^4 \theta$, dunque $f \rightarrow +\infty$

Quando $\cos \theta = 0$, resta solo $\rho^2 \sin^2 \theta$, poiché $\sin^2 \theta = 1$, è come dire che resta solo ρ^2 , dunque $f \rightarrow +\infty$ anche in questo caso

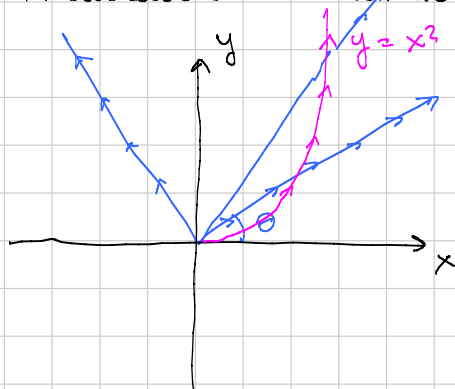
Quindi $f \rightarrow +\infty$

Se così fosse, il minimo esisterebbe. Dico che $\inf f = -\infty$ (su tutto $\mathbb{R}^2$)

$$f(x, y) = x^4 + y^2 - 3xy^2$$

Metto $y = x^2$ $f(x, x^2) = x^4 + x^4 - 3x^5 = 2x^4 - 3x^5$

Prendendo x enorme ho che $f \rightarrow -\infty$



$\theta = \text{costante}$, $\rho \rightarrow +\infty$

Comunque scelga la retta $f \rightarrow +\infty$

Lungo $y = x^2$ la funzione

$f \rightarrow -\infty$

Esempio 10 $f(x,y) = x e^{-x^2-y^2}$

$$f(\rho, \theta) = \rho \cos \theta e^{-\rho^2}$$

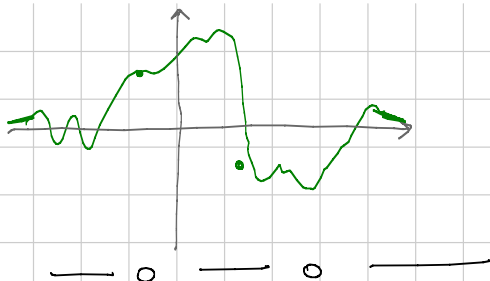
$$\boxed{-\rho e^{-\rho^2}} \leq \boxed{\rho \cos \theta e^{-\rho^2}} \leq \boxed{\rho e^{-\rho^2}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = 0$. Inoltre esistono p.ti in cui $f > 0$ e punti in cui $f < 0$.
Questo basta per concludere che esistono max/min.

Dato che esistono, si troveranno in p.ti stazionari.

In 1 variabile



TORNIAMO ALLE FORME QUADRATICHE

$$q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \iff \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Criterio basato sugli autovalori

$$\begin{aligned}
 \times \text{ Tutti autov. } > 0 &\Rightarrow \text{ def. pos.} \\
 &\geq 0 \Rightarrow \text{ semi " " } \\
 &< 0 \Rightarrow \text{ def. neg.} \\
 &\leq 0 \Rightarrow \text{ semi " " }
 \end{aligned}$$

NEL CASO PARTICOLARE 2×2 si può decidere il segno degli autov. senza calcolarli?

Siano λ, μ gli autovalori della matrice A

$$\lambda \cdot \mu = \det A$$

$$\lambda + \mu = \text{Tr } A = \text{somma el. sulla diagonale}$$

Conoscendo $\text{Tr } A$ e $\det A$, è facile risalire al segno degli autov.

$\det A = 0 \Rightarrow$ almeno 1 autov. è 0 e l'altro $= \text{Tr } A$

$\det A < 0 \Rightarrow$ autov. $+$ e $-$

$\det A > 0 \Rightarrow$ $\nearrow +, +$ (in questo caso $\text{Tr } A > 0$)
 $\searrow -, -$ (in questo caso $\text{Tr } A < 0$)

Esempio 1 $q(x, y) = x^2 + xy + y^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$\det A = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0 \quad + +$$

$$\text{Tr } A = 2 > 0 \Rightarrow + +$$

$\Rightarrow$ forma definita positiva

Esempio 2 $q(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 - \frac{9}{4} < 0 \Rightarrow + -$$

La forma non è def. pos. / neg.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det } 1 \times 1 = 1$$

$$\text{Det } 2 \times 2 = 1 - 4 = -3$$

$$\text{Det } 3 \times 3 = -1$$

Segni: $+ - + - + -$

2 auto. +
1 auto. $\rightarrow$

E se un det viene $= 0$?

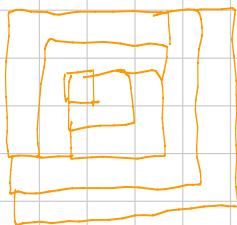
SI PUÒ CAMBIARE DIREZIONE

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



NO! bisogna andare lungo la diagonale

Si può anche partire dal centro (sempre sulla diagonale)



$$\begin{pmatrix} \textcircled{x} & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$$

1

$$\begin{pmatrix} \textcircled{x} & x & \textcircled{x} \\ x & x & x \\ \textcircled{x} & x & \textcircled{x} \end{pmatrix}$$

1-3

$$\begin{pmatrix} \textcircled{x} & \textcircled{x} & \textcircled{x} \\ \textcircled{x} & \textcircled{x} & \textcircled{x} \\ \textcircled{x} & \textcircled{x} & \textcircled{x} \end{pmatrix}$$

1-2-3

ANALISI 2 CIV

ORA 19

Titolo nota

25/10/2006

Studio locale per funzioni di 2 variabili (studio del comportamento vicino ad un p.to stazionario)

In 1 variabile : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}$ $f'(x_0) = 0$ (STAZ.)

x_0 ↗ p.to min. loc. (rel.) 
 ↘ p.to max. loc. (rel.) 
 ↘ p.to flesso a tg. orizz. 
 ↘ ancora peggio... 

Calcoliamo

$f''(x_0)$ ↗ $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ min. rel.
 ↘ $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ max. rel.
 ↘ $f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ B.O.H. (dipende)

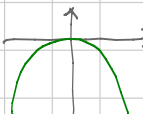
Se $f''(x_0) = 0 \rightsquigarrow$ vedi derivate successive

N.B. Avere $f''(x_0) > 0$ è condiz. SUFFICIENTE per avere min. loc. in x_0

Non è necessaria ↗ potrebbe $f''(x_0)$ non esistere
 ↘ può esistere ed essere $f''(x_0) = 0$

Esempio $f(x) = x^4$ $x_0 = 0$ $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$

x_0 p.to min. rel.  $f''(x_0) = 0$

Analogamente $g(x) = -x^4$ $f'(0) = f''(0) = 0$
 $x_0 = 0$ p.to max. rel. 

x_0 p.to min. loc., $f''(x_0)$ esiste $\Rightarrow f''(x_0) \geq 0$

x_0 " max " $\Rightarrow f''(x_0) \leq 0$

In 2 variabili $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

(x_0, y_0) stazionario $\Rightarrow \nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$

(x_0, y_0) $\begin{cases} \nearrow \text{max. loc.} \\ \rightarrow \text{min. loc.} \\ \searrow \text{p.to sella o mountain pass.} \\ \downarrow \text{altro} \end{cases}$

Andiamo a vedere la "derivata seconda", cioè la matrice HESSIANA

$$Hf(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Guardiamo la SEGNAURA della matrice, cioè quanti autov., loro sono >0 , <0 , $=0$, cioè se la forma quadratica associata alla matrice è def. pos. / neg. / ...

(x_0, y_0) p.to min. loc.
 $Hf(x_0, y_0)$ esiste $\Rightarrow$ Forma semi def. pos.
(autov. ≥ 0)

(x_0, y_0) p.to max. loc.
 $Hf(x_0, y_0)$ esiste $\Rightarrow$ Forma semi def. neg.
(autov. ≤ 0)

CONDIZIONI SUFFICIENTI:

$Hf(x_0, y_0)$ def. pos. $\Rightarrow (x_0, y_0)$ p.to min loc.

" def. neg. $\Rightarrow (x_0, y_0)$ p.to max loc.

$Hf(x_0, y_0)$ con 1 autov. > 0 e 1 autov. $< 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ p.to di SELLA

Se c'è un autovalore $= 0$, allora BOH

$$\Downarrow$$

$$\text{Det } H = 0$$

Esempio 1 $f(x, y) = x^2 + xy$ $\nabla f(0, 0) = 0$

$$f_x = 2x + y \quad f_y = x$$

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Det} = -1 \Rightarrow \text{autov. : } +, -$$

$\Downarrow$
(0,0) p.to di sella

Esempio 2 $f(x, y) = x^2 + e^{xy} + \cos y$

$$f_x = 2x + y e^{xy} \quad f_y = x e^{xy} - \sin y \quad \nabla f(0, 0) = (0, 0)$$

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 + y^2 e^{xy} & e^{xy} + xy e^{xy} \\ e^{xy} + xy e^{xy} & x^2 e^{xy} - \cos y \end{pmatrix}$$

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Det} = -3 \Rightarrow (0, 0) \text{ p.to di sella}$$

SE il punto in considerazione è $(0,0)$ si può dedurre $Hf(0,0)$, o per lo meno la forma ad esso associata, dallo sviluppo di TAYLOR

$$f(x,y) = x^2 + e^{xy} + \cos y \quad \text{Taylor di ordine } n=2$$

$$= x^2 + 1 + xy + 1 - \frac{y^2}{2} + o(x^2+y^2)$$

$$= \boxed{2} + \boxed{x^2 + xy - \frac{y^2}{2}}$$

$\uparrow$
 $f(0,0)$

$\downarrow$
 $\frac{1}{2!}$ · Forma quadratica associata all' Hessiano

NON CI SONO (e non ci possono essere) termini di 1° grado perché $(0,0)$ è stazionario

$$x^2 + xy - \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\boxed{2x^2 + 2xy - y^2} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Esempio 3 $f(x,y) = x^2 + y^4 \quad (0,0) \quad \begin{matrix} f_x = 2x \\ f_y = 4y^3 \end{matrix}$

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} \quad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 \\ 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Forma SEMI DEF. POS. $\Rightarrow$ posso escludere max. rel., ma il resto NO.

In questo caso $(0,0)$ è p.to di min. loc. (anzi GLOBALE)

In fatti $f(0,0) = 0$, $f(x,y) \geq 0$ SEMPRE

anzi $f(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \neq (0,0)$

$\Rightarrow$ p.to di min. stretto.

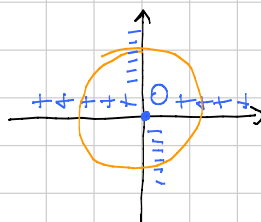
Esempio 4 $f(x,y) = x^2 - y^4 \dots Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1 autov. $\Rightarrow 0 \Rightarrow$ BOH

In ogni intorno di $(0,0)$ ci
sono p.ti in cui $f > 0$ e
p.ti in cui $f < 0$

$\Downarrow$

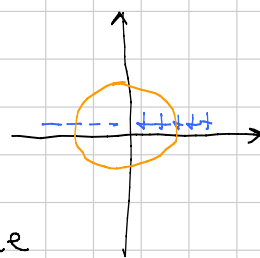
$(0,0)$ non è nè max, nè min loc.



Esempio 5 $f(x,y) = x^3 + \sin^2(xy)$

Taylor ordine 2 $f(x,y) = 0(x^2 + y^2)$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ BOH $\Rightarrow$ nè max
nè min locale



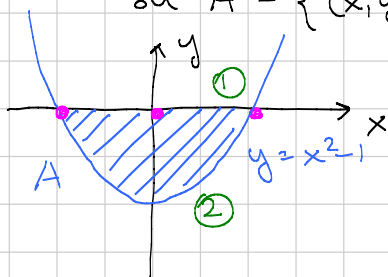
ANALISI II CIV

ORA 20

RICEVIMENTO : Giovedì PN3 [15:30, +∞)
 Pendere appuntamento MA/ME
 a lezione

Esempio 1 max/min di $f(x,y) = x^4 + y^4$

su $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 0\}$



$W \Rightarrow$ max e min esistono

* SING. INT. : $\emptyset$

* STAZ. INTERNI : $\emptyset$

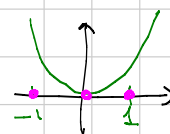
(l'unico staz. è (0,0) e non è inferiore)

* BORDO

$$\textcircled{1} = \{(t, 0) : t \in [-1, 1]\}$$

$$\textcircled{2} = \{(t, t^2 - 1) : t \in [-1, 1]\}$$

Sul pezzo $\textcircled{1}$: $\varphi_1(t) = f(t, 0) = t^4$



Sul pezzo $\textcircled{2}$: $\varphi_2(t) = f(t, t^2 - 1) = t^4 + (t^2 - 1)^4$

Devo studiare $\varphi_2(t)$ per $t \in [-1, 1]$

$$\varphi_2'(t) = 4t^3 + 4(t^2 - 1)^3 \cdot 2t$$

$$= 4t \left(t^2 + 2(t^2 - 1)^3 \right) = 0 \quad \begin{matrix} t=0 \\ ()=0 \end{matrix}$$

posto $t^2 = z$ diventa
di 3° grado, ...

Esempio 2 $f(x,y) = x^2 + 3y^2$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x\}$$

$\Rightarrow$ max / min esistono

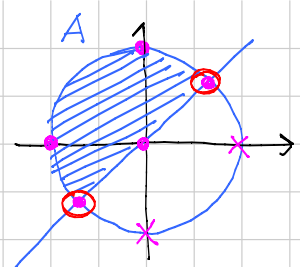
Sing. e stat. interni: $\emptyset$.

Bordo $\nearrow$ param. sul tratto rettilineo
 $\searrow$ molt. sul tratto curvilineo

Rettilineo $f(x,x) = x^2 + 3x^2 = 4x^2 \Rightarrow$ min per $x=0$
 max al bordo

Sul tratto curvilineo uso moltiplicatori

con $\Phi(x,y) = x^2 + y^2 - 1$



Estremi inclusi
d'ufficio

1° sistema $\begin{cases} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{NO SOLUZIONI!}$

2° sistema $\begin{cases} f_x = \lambda \Phi_x \\ f_y = \lambda \Phi_y \\ \Phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \lambda \cdot 2x \\ 6y = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda x \\ 3y = \lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

$\boxed{1^a \text{ eq.}}$ $x = \lambda x; x(\lambda - 1) = 0$

$\swarrow \quad \searrow$

$x = 0 \quad \lambda = 1$

$\downarrow \quad \downarrow$

$3^a \text{ eq.} \quad y = \pm 1 \quad 2^a \text{ eq.}$

$\downarrow \quad \downarrow$

$(0,1), (0,-1) \quad 3y = y \rightarrow y = 0 \quad 3^a \text{ eq.}$

$\downarrow \quad \downarrow$

$(2,1), (2,-1) \quad x = \pm 1$

$\left. \begin{matrix} (0,1), (0,-1) \\ (1,0), (-1,0) \end{matrix} \right\}$

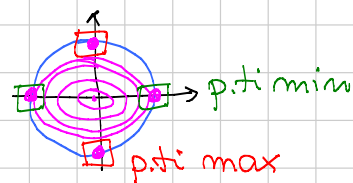
Se si usano i moltiplicatori, ma interessa solo un pezzo dell'insieme $\Phi = 0$, allora bisogna

- ① Escludere i candidati che non sono nel pezzo giusto
- ② Includere d'ufficio gli estremi del pezzo considerato
— o — o —

Esempio 2.5 $f(x, y) = x^2 + 3y^2$

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}$$

↑
SOLO BORDO



$W \Rightarrow$ max e min esistono $\Rightarrow$ saranno per forza sul bordo
 $\Rightarrow$ il sistema dei multipl. deve avere almeno 2 solus.
 $\Rightarrow$ p.to max, p.to min.

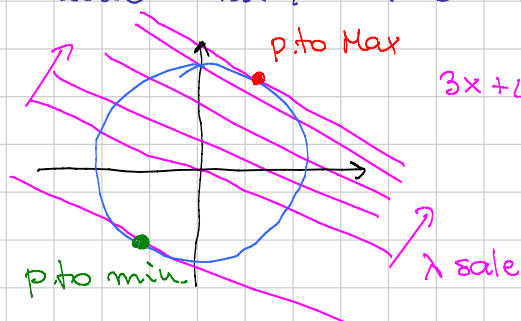
Esempio 3 $A =$ cerchio centro $(0,0)$ e raggio 1

$$f(x, y) = |3x + 4y|$$

Dove $|1| = 0$ è probabile che ci siano p.to sing.

Studio il problema SENZA il valore assoluto

Studio max/min di $g(x, y) = 3x + 4y$



$$3x + 4y = \lambda ; y = -\frac{3}{4}x + \frac{\lambda}{4}$$

Per calcolare i valori posso usare i moltiplicatori

Supponiamo venga $\text{Max} = \frac{3}{2}$

$$\text{min} = -\frac{3}{2}$$

In generale: se f cambia segno in A , per il max se la gioca su:

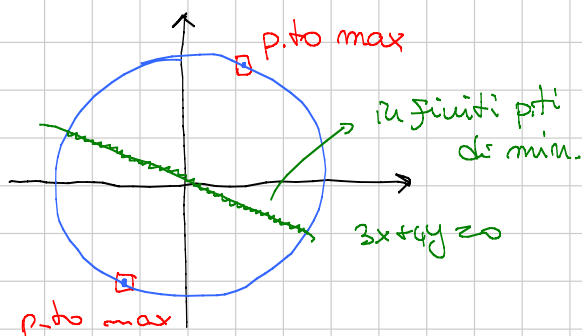
* il vecchio max

* il vecchio min cambiato di segno

Il minimo è per forza $= 0$, quindi per $f(x, y) = |3x + 4y|$ i p.ti di minimo sono tutti quelli in cui

$$3x + 4y = 0$$

Finale per $f(x, y)$



Esempio ...

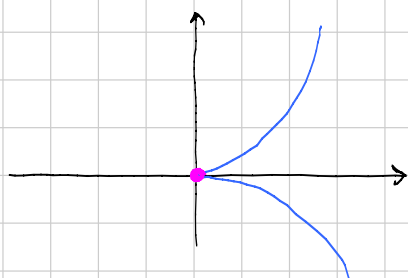
Bordo

$$\underbrace{y^2 - x^3 = 0}_{\phi(x, y)}$$

1° sistema

$$\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x^2 = 0 \\ 2y = 0 \\ y^2 = x^3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(0, 0)} \text{ SOLUZIONE}$$



$$y^2 = x^3 \quad y = \pm x^{3/2}$$

NELLE SOLUZ. DEL 1° SISTEMA CI POSSONO ESSERE ANGOLI

ANALISI II CIV (NUCL.)

Titolo nota

ORA 21

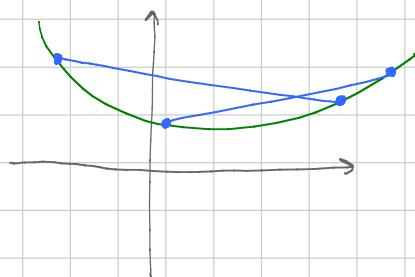
07/11/2006

CONCAVITÀ e CONVESSITÀ in 2 o più variabili

In 1 variabile: una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se per ogni coppia di punti del grafico il segmento che li unisce sta tutto sopra il grafico.

Si dice concava se il segmento sta sotto.

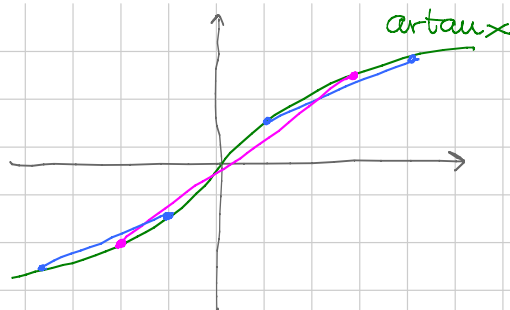
Stessa cosa se la funzione è definita solo su un intervallo o una semiretta.



Concava per $x \geq 0$

convessa per $x \leq 0$

Nè concava, nè convessa
su tutto $\mathbb{R}$



In 2 o più variabili è la stessa cosa. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa se per ogni coppia di pti del grafico, il segmento che li congiunge sta tutto sopra.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ concava e
convessa contemp.

$\Leftrightarrow$

$f(x) = ax + b$ (retta)

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ concava e conv.
contemp.

$\Leftrightarrow$

$f(x,y) = ax + by + c$ (piano)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che esista f'' . Allora

$$f \text{ CONVESSA in } [a, b] \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

In 2 variabili

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} esistano.

Allora:

$$f \text{ convessa in } \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow Hf(x, y) \text{ semidef. pos. } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Esempio 1 $f(x, y) = x^4 + y^6$. $f_x = 4x^3$, $f_y = 6y^5$

$$f_{xx} = 12x^2$$

$$f_{xy} = 0$$

$$f_{yy} = 30y^4$$

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 30y^4 \end{pmatrix}$$

Matrice diago $\Rightarrow$ autov. = ciò che sta sulla diagonale
 $\Rightarrow$ autov. $\geq 0 \Rightarrow$ semidef. pos. $\Rightarrow$ CONVESSA su tutto $\mathbb{R}^2$

Punti stat.? Solo $(0, 0)$. $Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ BDH

$(0, 0)$ è in realtà p.to di min. loc. (e anzi globale) perché
 $f(0, 0) = 0$ e $f(x, y) > 0$ altrove.

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$$

vale se $p \geq 1$ (sto usando che $p^6 \geq p^4$)

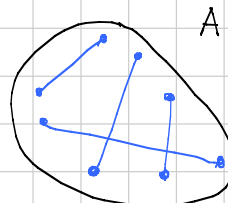
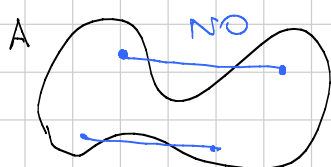
Infatti $x^4 + y^6 = \rho^4 \cos^4 \theta + \rho^6 \sin^6 \theta \geq \rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^6 \theta)$

$$m = \min \{ \cos^4 \theta + \sin^6 \theta : \theta \in [0, 2\pi] \} > 0$$

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$, dove $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Supponiamo Hf esista

f convessa in $A \iff Hf(x,y)$ semidef. pos. $\forall (x,y) \in A$

Tutto ciò vale purché l'insieme A sia a sua volta convesso



Oss. Non ha senso parlare di funzione convessa definita su un insieme non convesso.



i punti del grafico che stanno sulla verticale di P e Q determinano un segmento che non può stare sopra/sotto il grafico

Differenza grossa tra 1 e 2 variabili

Esempio 2 $f(x,y) = xy$ $f_x = y$ $f_y = x$

$$f_{xx} = 0 \quad f_{xy} = 1 \quad f_{yy} = 0$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Det} = -1 \Rightarrow \text{autoval: } +, -$$

$\Rightarrow$ non definita pos/neg

$\Rightarrow f(x,y)$ non è né CONCAVA né convessa da nessuna parte

Esempio 3 $f(x,y) = x^4 + y^4 + 3xy$

$$f_x = 4x^3 + 3y$$

$$f_y = 4y^3 + 3x$$

$$\sup \{ f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \} = +\infty \quad (y=0, x \text{ enorme})$$

$$\max \{ \quad \quad \quad \} \text{ n.e.}$$

Esiste min? Sì, per il WEIERSTRASS esteso in quanto

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$$

$$x^4 + y^4 + 3xy = \rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) + 3\rho^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\geq m\rho^4 - 3\rho^2 \quad m > 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $+\infty$

Il min viene assunto per $(x,y) = (0,0)$? NO

Infatti $f(x,y) = 3xy + o(x^2+y^2)$

$\Rightarrow f(x,y)$ in $(0,0)$ si comporta come xy , dunque ha una sella, dunque $(0,0)$ non può essere tra i punti di min.

$$f_{xx} = 12x^2 \quad f_{yy} = 12y^2 \quad f_{xy} = 3$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 3 \\ 3 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Det} < 0 \Rightarrow \text{sella (altro modo di vederlo)}$$

Per quali (x,y) la matrice è def. pos.?

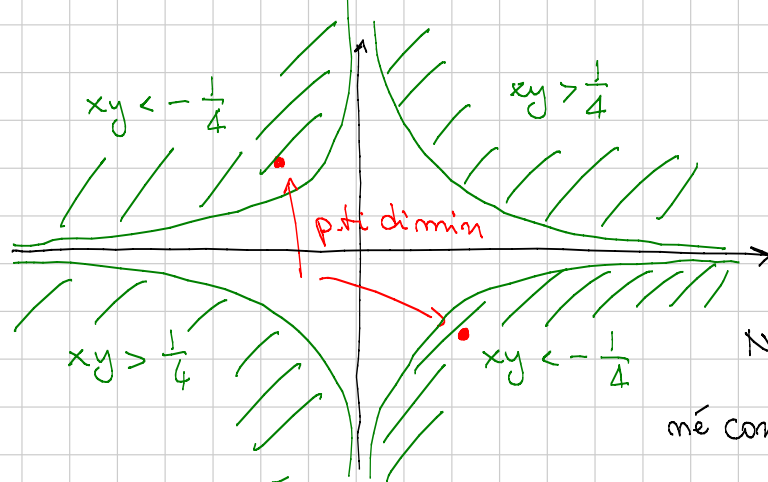
$$\text{Det} = 144x^2y^2 - 9$$

$$\text{Tr} = 12(x^2+y^2) \geq 0$$

sempre

$$\text{Det} \geq 0 \Leftrightarrow 16x^2y^2 \geq 1, \quad x^2y^2 \geq \frac{1}{16},$$

$$\Leftrightarrow xy \geq \frac{1}{4} \text{ oppure } xy \leq -\frac{1}{4}$$



In ciascuna delle
4 zone

Det > 0 $\Rightarrow$ semidef.
Tr > 0 $\Rightarrow$ pos.

$\Downarrow$
CONVEXA

Nel resto Det < 0

$\Downarrow$
né convessa, né concava

Per es.: calcolare i p.ti di min.

$$f(-x, -y) = f(x, y)$$

ANALISI II CIV

ORA 22

Esempio $f(x,y) = x^2y^2 - x^4 - y^4$

$$\inf \{ f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \} = -\infty \quad (y=0, x \text{ enorme})$$

Ponendo $x^2 = z$, $y^2 = w$ diventa $zw - z^2 - w^2$. Lo studio del segno di questa è lo studio di una forma quadratica.

$$\begin{aligned} zw - z^2 - w^2 &= - (z^2 + w^2 - zw) = - \left(z^2 - 2z \cdot \frac{w}{2} + \frac{w^2}{4} + \frac{3w^2}{4} \right) \\ &= - \left(z - \frac{w}{2} \right)^2 - \frac{3}{4} w^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2y^2 - x^4 - y^4 &= - \left(x^2 - \frac{y^2}{2} \right)^2 - \frac{3}{4} y^4 \leq 0 \quad \text{sempre} \\ e=0 &\Leftrightarrow y=0 \text{ e } x=0 \end{aligned}$$

Conclusione $\max \{ f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \} = 0$
 $\sup = 0$

p.to di max: (0,0)

$$f_x = -4x^3 + 2xy^2 \quad f_y = -4y^3 + 2yx^2$$

$$f_{xx} = -12x^2 + 2y^2, \quad f_{yy} = -12y^2 + 2x^2, \quad f_{xy} = 4xy$$

Quali sono i p.ti stat.?

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x^3 + xy^2 = 0 \\ -2y^3 + yx^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(y^2 - 2x^2) = 0 \\ y(x^2 - 2y^2) = 0 \end{cases}$$

1^a eq. $\nearrow x=0 \xrightarrow{2^a \text{ eq.}} y=0 \rightarrow (0,0)$
 $\searrow y^2 = 2x^2 \rightarrow y=0 \rightarrow x=0 \rightarrow (0,0)$
 $\searrow x^2 = 2y^2$

$$\begin{aligned} y^2 &= 2x^2 \\ x^2 &= 2y^2 \end{aligned}$$

$$y^2 = 2x^2 = 4y^2$$

$$y^2 = 0 \Rightarrow (0,0)$$

$\Rightarrow$ l'unico p.to stat. è $(0,0)$

$$y^2 = 8y^4 \rightarrow y=0 \text{ già trovato}$$

$$\hookrightarrow 1 = 8y^2 \rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$\downarrow$$

$$x^2 = 2y^2 = \frac{1}{4}$$

NO

Esempio $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$\inf \{ f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \} = -\infty \quad (y=0, x \text{ enorme})$$

Metto $x=y \Rightarrow f(x,x) = x^4 - 2x^2$ x enorme

$$\Rightarrow \sup \{ f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \} = +\infty$$

$$f(x,y) = -x^2 - y^2 + o(x^2 + y^2)$$

Vicino a $(0,0)$ $f(x,y)$ si comporta come $-(x^2 + y^2) \Rightarrow$ max. loc.

Quali sono i p.ti stat.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2xy^2 - 2x = 0 \\ 2yx^2 - 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(y^2 - 1) = 0 \\ y(x^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\boxed{1^a \text{ eq.}} \begin{cases} \nearrow x=0 \xrightarrow{2^a \text{ eq.}} y=0 \rightarrow (0,0) \\ \searrow y=\pm 1 \xrightarrow{2^a \text{ eq.}} x=\pm 1 \rightarrow (\pm 1, \pm 1) \end{cases} \quad \underline{4 \text{ poss.}} \end{aligned}$$

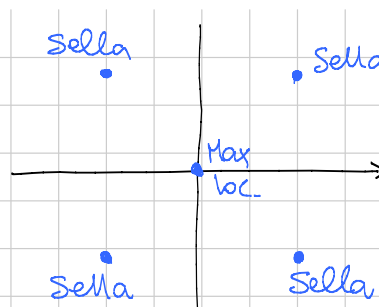
Abbiamo 5 p.ti stat.

$$f_{xx} = 2y^2 - 2 \quad f_{yy} = 2x^2 - 2$$

$$f_{xy} = 4xy$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 - 2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 - 2 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \begin{pmatrix} y^2 - 1 & 2xy \\ 2xy & x^2 - 1 \end{pmatrix}$$



$$Hf(0,0) = 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Autov: } -1, -1 \Rightarrow \text{def. neg.}$$

$\Downarrow$
 p.to max locale

$$Hf(1,1) = 2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Det} = -4 < 0 \Rightarrow \text{sella}$$

$$Hf(-1,-1) = Hf(1,1)$$

$$Hf(1,-1) = 2 \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Det} = -4 < 0 \Rightarrow \text{sella}$$

Zone di concavità e convessità:

$$\begin{aligned} \text{Det}[Hf(x,y)] &= (x^2 - 1)(y^2 - 1) - 4x^2y^2 \\ &= x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 - 4x^2y^2 \\ &= -x^2 - y^2 - 3x^2y^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Tr}[Hf(x,y)] = x^2 + y^2 - 2$$

Ci sono zone in cui sicuramente è concava? Sì, vicino al p.to di max locale. Infatti se (x,y) sono vicini a $(0,0)$ si ha $\text{Det} > 0$, $\text{Tr} < 0 \Rightarrow$ autov: $-, - \Rightarrow$ def. neg.

↓
concava
(semi)

Ci sono zone in cui è convessa? Deve essere Hf def. pos.
 $\Rightarrow$ autov: $+, + \Rightarrow \text{Det} > 0$, $\text{Tr} > 0$

Se ci sono zone di convessità, ci sono per $x^2 + y^2 \geq 2$, cioè fuori dal cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{2}$

Ma in tali zone

$$-(x^2 + y^2) - 3x^2y^2 + 1 \text{ è di sicuro neg. quindi}$$

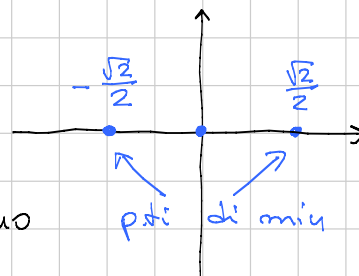
$$\text{Det} < 0$$

Punti stazionari:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 4x^3 - 2x = 0 \rightarrow 2x(2x^2 - 1) = 0 \\ 4y^3 = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases} \begin{matrix} \nearrow x=0 \\ \nearrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix}$$

3 p.ti stazionari

Basta sostituire per vedere quale/i sono i p.ti di max/min



$$f(0,0) = 0, \quad f\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$\min \{f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = -\frac{1}{4} \quad \text{p.ti di min } (x,y) = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$(0,0)$ che p.to staz. è?

Taylor: $f(x,y) \sim -x^2 + o(x^2+y^2)$

$\Rightarrow$ si comporta come $-x^2 \Rightarrow (0,0)$ max. loc.

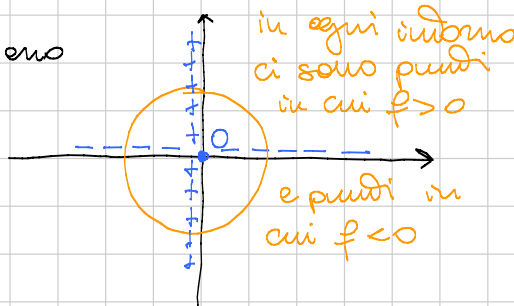
NO!!!!

"Si comporta come" vuol dire che in $(0,0)$ hanno la stessa matrice Hessiana, quindi

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Det} = 0 \Rightarrow \text{BOH} \rightarrow \text{semidef. neg.}$$

$\Rightarrow$ l' $Hf(0,0)$ non permette di concludere quale tipo di p.to staz. è $(0,0)$, o per lo meno permette solo di dire che non si tratta di min/loc.

$$f(x,0) = x^4 - x^2, \text{ che come}$$



funzione di 1 var. ha un max locale nell'origine, quindi vicino a $x=0$ è negativa

$\Rightarrow (0,0)$ non è né max, né min locale.

Esempio $f(x,y) = y^2 + \cos x$. L'origine è staz.?
Di che tipo?

$$f(x,y) = y^2 + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2+y^2) \quad \text{per } (x,y) \rightarrow (0,0)$$

Non ci sono termini di 1° grado $\Rightarrow (0,0)$ p.to staz.

$$Hf(0,0) \text{ è come quello di } y^2 - \frac{x^2}{2} \quad Hf = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ p.to di sella.

Se fosse $f(x,y) = y^4 + \cos x^4$. L'origine è staz.?
Di che tipo?

$$f(x,y) = y^4 + 1 - \frac{x^8}{2} + o((\sqrt{x^2+y^2})^{15})$$

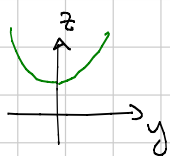
$$= 1 + o(x^2+y^2)$$

$\Rightarrow$ no termini di 1° grado $\Rightarrow (0,0)$ p.to staz.

no termini di 2° grado $\Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ BOH

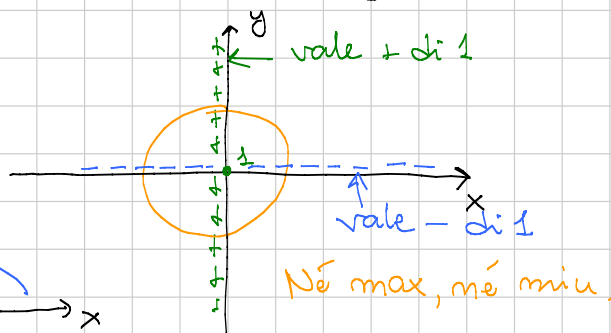
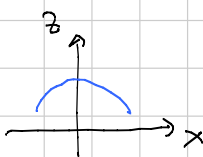
Lungo asse y

$$f(0,y) = y^4 + 1$$



Lungo asse x

$$f(x,0) = \cos x^4$$



Calcolare $\max_{\min} \{ |y^4 + \cos x^2| : x \in [-5, 5], y \in [-1, 1] \}$

Inizio studiamo il problema senza val. assoluto

$$\max \{ y^4 + \cos x^2 : x \in [-5, 5], y \in [-1, 1] \} = 2$$

$$y^4 + \cos x^2 \leq 1 + 1 = 2 \quad \begin{array}{l} \text{p.ti di max sono tutti} \\ \text{i p.ti in cui } y = \pm 1 \text{ e} \\ \cos x = 1 \end{array}$$

$$y^4 + \cos x^2 \geq 0 - 1 = -1 \quad \begin{array}{l} \text{p.ti di min sono tutti i} \\ \text{p.ti in cui } y = 0 \text{ e } \cos x = -1 \end{array}$$

Senza val. assoluto

$$\max = 2$$

$$\min = -1$$

Quindi con il val. assd.

$$\max = 2$$

$$\min = 0$$

p.ti di max: i precedenti

p.ti di min: tutti i punti in cui $y^4 + \cos x^2 = 0$

$$\max_{\min} \left\{ e^{\arctan |y^4 + \cos x^2|^3} : x \in [-5, 5], y \in [-1, 1] \right\}$$

si ottiene dal precedente
componendo con la funzione

$e^{\arctan t^3}$
 $\uparrow$
Funzione crescente

$t = |y^4 + \cos x^2| \leftarrow$ funzione di prima

Se voglio $e^{\arctan t^3}$ grande, devo usare il t + grande
che posso
piccolo + piccolo

$\Rightarrow$ i p.ti di max e min sono gli stessi di prima.

ANALISI II

CIV
NUCL

Titolo nota

ORA 24

98/1/2006

Ripasso di integrali in una variabile

$$\int \cos x \, dx = +\sin x$$

$$\int x^8 \, dx = \frac{x^9}{9}$$

$$\int e^x \, dx = e^x$$

$$\int e^{2x} \, dx = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$\int \sin(4x) \, dx = -\frac{\cos(4x)}{4}$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \log x \quad \text{corretto per } x > 0$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \log |x| \quad \text{corretto per } x \neq 0$$

La derivata di $\log |x|$ è $\frac{1}{x}$ per ogni $x \neq 0$

Integrazione per parti

$$\int f \, g = Fg - \int Fg$$

$$\begin{aligned} F' &= f \\ G' &= g \end{aligned}$$

$$\int \underset{G}{x} \underset{f}{\cos x} \, dx = \underset{G}{x} \underset{F}{\sin x} - \int \underset{F}{\sin x} \cdot \underset{g}{1} \, dx = x \sin x + \cos x$$

$$\int \underset{G}{x} \underset{f}{e^x} \, dx = \underset{G}{x} \underset{F}{e^x} - \int \underset{F}{e^x} \cdot \underset{g}{1} \, dx = x e^x - e^x$$

$$\int \underset{G}{x^2} \underset{f}{\cos x} \, dx = \underset{G}{x^2} \underset{F}{\sin x} - \int \underset{F}{\sin x} \cdot \underset{g}{2x} \, dx$$

$$= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$$

$$\begin{aligned}
 \int \underset{G}{x} \underset{f}{\sin x} dx &= \underset{G}{x} \underset{F}{(-\cos x)} - \int \underset{F}{(-\cos x)} \underset{g}{(-1)} dx \\
 &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x
 \end{aligned}$$

Quali primitive vengono bene con questo metodo:

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ \text{polinomio} \\ \text{della } x}}{p(x)} e^{ax} dx ; \quad \int p(x) \cos(ax) dx ; \quad \int p(x) \sin(ax) dx$$

A forza di passaggi per parti, il grado di $p(x)$ scende,

$$\begin{aligned}
 \boxed{\int \log x} &= \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\log x} dx = \underset{F}{x} \underset{G}{\log x} - \int \underset{F}{x} \cdot \underset{f}{\frac{1}{x}} dx \\
 &= x \log x - \int 1 dx = \boxed{x \log x - x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \boxed{\int \arctan x dx} &= \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\arctan x} dx = \underset{F}{x} \underset{G}{\arctan x} - \int \underset{F}{x} \cdot \underset{f}{\frac{1}{1+x^2}} dx \\
 &= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx \\
 &= \boxed{x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)}
 \end{aligned}$$

Idea: scegliere come G qualcosa che "derivando migliora"
 " " f " " "integrando non peggiora più di tanto"

GRANDE RITORNO

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \underset{G}{\cos x} \cdot \underset{F}{\cos x} \, dx = \underset{G}{\cos x} \cdot \underset{F}{\sin x} - \int \underset{Fg}{\sin x} (-\sin x) \, dx$$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \, dx$$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$= \cos x \cdot \sin x + x - \int \cos^2 x \, dx \quad \rightarrow \text{Lo porto a sinistra}$$

$$2 \int \cos^2 x \, dx = \frac{\cos x \cdot \sin x + x}{2}$$

$$\int \underset{F}{e^x} \underset{G}{\cos x} \, dx = \underset{F}{e^x} \underset{G}{\cos x} - \int \underset{Fg}{e^x} (-\sin x) \, dx$$

$$= e^x \cos x + \int \underset{F}{e^x} \underset{G}{\sin x} \, dx$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int \underset{Fg}{e^x} \cos x \, dx$$

Lo porto a sinistra

$$2 \int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2}$$

Con lo stesso sistema $\int e^{ax} \sin(bx) \, dx$

$$\int \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} (-\cos(2x)) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\cos(2x)}{4}$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{\cos(2x) + 1}{2} \, dx$$

$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$
 $\cos^2 x = \frac{\cos(2x) + 1}{2}$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} = \frac{x}{2} + \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{4} = \text{come prima}$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx$$

$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$
 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}$$

$$\int \sin^4 x \, dx = \int \sin x \cdot \sin^3 x \, dx$$

$\begin{matrix} f & g \end{matrix}$

$$= (-\cos x) \cdot \sin^3 x - \int (-\cos x) 3 \sin^2 x \cdot \cos x \, dx$$

$\begin{matrix} F & G & Fg \end{matrix}$

$$= -\cos x \cdot \sin^3 x + 3 \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \, dx$$

$$= -\cos x \cdot \sin^3 x + 3 \int (1 - \sin^2 x) \cdot \sin^2 x \, dx$$

$$= -\cos x \cdot \sin^3 x + \underbrace{3 \int \sin^2 x \, dx}_{\text{lo so fare}} - \underbrace{3 \int \sin^4 x \, dx}_{\text{Grande ritorno}}$$

Allo stesso modo si fanno tutte le potenze (interi) di $\sin x$ e $\cos x$ (ogni passaggio per parti l'espon. scende d'2)

$$\int \frac{dx}{3x+2} = \frac{1}{3} \int \frac{3}{3x+2} dx = \frac{1}{3} \log|3x+2|$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{a}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \log|ax+b|$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{1+(2x)^2} dx = \frac{1}{2} \arctan(2x)$$

$$\int \frac{1}{1+3x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}x)$$

$$\int \frac{dx}{3+x^2} = ?$$

ANALISI II CIN
(NUCL)

ORA 25

$$\int \frac{dx}{3+x^2} = \int \frac{dx}{1+(2+x^2)} = ?$$

$$\rightarrow = \int \frac{1}{3(1+\frac{x^2}{3})} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+\frac{x^2}{3}} dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}}$$

③ $\leftarrow \frac{1}{3}$ che è fuori

In generale

$$\int \frac{dx}{1+ax^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan(\sqrt{a}x) \quad \text{per ogni } a > 0$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{dx}{(1+x)(1-x)} = (\star)$$

$$\frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} = \frac{A-Ax+B+Bx}{(1+x)(1-x)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -A+B=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \leftrightarrow \text{uguaglianza dei termini noti} \\ \leftrightarrow \text{dei coeff. di } x \end{matrix}$$

$$2B=1 \quad B=\frac{1}{2} \quad A=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} (\star) &= \int \left(\frac{1}{2} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1-x} = \frac{1}{2} \log|1+x| - \frac{1}{2} \log|1-x| \\ &= \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{(x+3)(x^2+1)} dx$$

costanti sopra
fattori di 1° grado

$$\frac{1}{(x+3)(1+x^2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

roba di 1° grado
sopra roba di
2° grado

si risolve il sistema per
trovare A, B, C e si conclude

$$\int \frac{3x+4}{1+x^2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} + 4 \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{3}{2} \log(1+x^2) + 4 \arctan x$$

SOSTITUZIONI "EVIDENTI"

$$\int x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int (2x) \cos(x^2) = \frac{1}{2} \sin x^2$$

$$\int x^2 e^{-x^3} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 e^{-x^3} dx = \frac{1}{3} (-e^{-x^3})$$

$$= -\frac{1}{3} e^{-x^3}$$

$$\int \frac{dx}{x \log^5 x} =$$

Pongo $y = \log x$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$; $dy = \frac{dx}{x}$

$$= \int \frac{dy}{y^5} = \int y^{-5} dy = -\frac{1}{4} y^{-4} = -\frac{1}{4} \frac{1}{\log^4 x}$$

$$\int \frac{dx}{x \log x} =$$

Pongo $y = \log x$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$; $dy = \frac{dx}{x}$

$$= \int \frac{dy}{y} = \log |y| = \log |\log x|$$

— 0 — 0 —

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad x = \sin y; \quad \frac{dx}{dy} = \cos y; \quad dx = \cos y \cdot dy$$

$$= \int \sqrt{1-\sin^2 y} \cdot \cos y dy = \int \cos^2 y dy$$

$$= \frac{y}{2} + \frac{\sin y \cdot \cos y}{2}$$

$$= \frac{y}{2} + \frac{\sin y \cdot \sqrt{1-\sin^2 y}}{2}$$

$y = \arcsin x$

$$= \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x \sqrt{1-x^2}}{2}$$

Pericoli: abbiamo detto che

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}; \quad x = \sin y \Rightarrow y = \arcsin x$$

VIVIAMO PERICOLOSAMENTE, ma alla fine controlliamo facendo la derivata.

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx = \text{Pongo } y = e^{2x}; \quad \frac{dy}{dx} = e^{2x} \cdot 2;$$

$$dy = 2e^{2x} dx$$

$$= \int \frac{1}{2e^{2x}} \cdot \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$$

$$= \int \frac{dy}{2y(1+y)} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y(1+y)} = \frac{1}{2} \left\{ \int \frac{1}{y} - \int \frac{1}{1+y} \right\} =$$

$$\frac{1}{y(1+y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1+y} \quad \left| \begin{array}{l} \text{fare il} \\ \text{sistema} \end{array} \right. = \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}$$

$$= \frac{1}{2} (\log |y| - \log |1+y|)$$

$$= \frac{1}{2} \log(e^{2x}) - \log(1+e^{2x})$$

$$= x - \log(1+e^{2x})$$

In alternativa ;

$$\int \frac{dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{1}{2e^{2x}} \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{dy}{(y-1)y}$$

$y = 1+e^{2x} \quad \frac{dy}{dx} = 2e^{2x} \quad dy = 2e^{2x} dx$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{-0} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{-0}$

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+(x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \arctan x^2$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^4} dx = + \text{DIFFICILE}$$

$$\int \frac{x^3}{1+x^4} dx = \frac{1}{4} \log(1+x^4)$$

$$\int \tan x = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\log |\cos x| = \log \frac{1}{|\cos x|}$$

$$\int \cancel{\tan x} dx = \int \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} dx$$

$$= \underbrace{-\cancel{\cos x}}_F \cdot \underbrace{\frac{1}{\cancel{\cos x}}}_G - \int \underbrace{(-\cancel{\cos x})}_{Fg} \left(\underbrace{-\frac{1}{\cancel{\cos^2 x}}}_G \right) (-\sin x) dx$$

$$= -1 + \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= -1 + \int \cancel{\tan x} dx \Rightarrow 0 = -1$$

ANALISI II CIN

Titolo nota

NUCL.

ORA 26

14/11/2006

INTEGRALI IN PIÙ VARIABILI (2 variabili)

1. Come si indicano (notazione)
2. Significato geometrico
3. Come si definiscono (definirebbero)
4. Come si calcolano

1. Notazione Ingredienti base:

* un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ **LIMITATO** (zona di integrazione)

* una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ **LIMITATA** (integrande)

cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che
 $-M \leq f(x,y) \leq M$ per ogni $(x,y) \in A$

L'integrale di $f(x,y)$ in A si indica

$$\iint_A f(x,y) dx dy$$

integrale doppio $\rightarrow$ $\iint$
 zona $\rightarrow$ A
 integranda $\rightarrow$ $f(x,y)$
 variabili di integrazione $\rightarrow$ $dx dy$

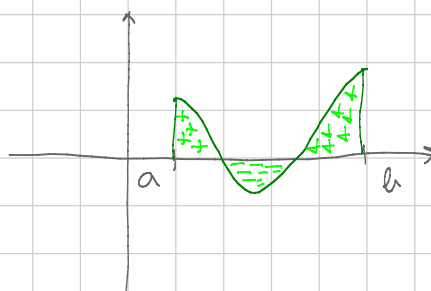
$$\int_A f(x,y) dx dy$$

STESSO SIGNIFICATO

2 SIGNIFICATO GEOMETRICO

In 1 variabile

$\int_a^b f(x) dx =$ "area con segno della parte di piano compresa tra il grafico e l'asse x"



= somma aree zone + meno area zone -

In 2 variabili: $\iint_A f(x,y) dx dy =$ volume con segno della parte di spazio compresa tra il grafico ed il piano base xy .

i volumi delle zone dove $f \geq 0$ contano con il segno +,
i volumi dove $f \leq 0$ con il segno -.

3 DEFINIZIONE (IDEA)

1 variabile: come si definisce $\int_a^b f(x) dx$?

CASO BANALE

$f(x)$ è uguale ad una costante λ per ogni $x \in [a,b]$

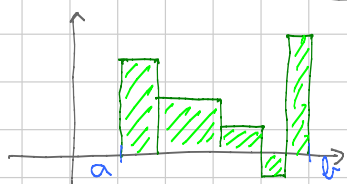


$$\int_a^b f(x) dx = \text{area con segno del rettangolo} \\ = (b-a) \lambda$$

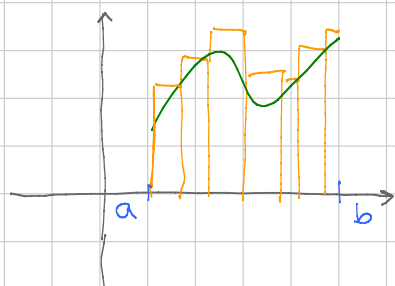
FUNZIONE A GRADINI - STEP FUNCTION

CASO SEMIBANALE

$f(x)$ è costante a tratti in $[a,b]$



$$\int_a^b f(x) dx = \text{somma algebrica delle aree} \\ \text{con segno dei vari rettangoli}$$

CASO GENERALE

$f(x)$ è una qualunque funzione limitata

Si definiscono l'integrale superiore $I^+(f; [a, b])$ e l'integrale inferiore $I^-(f; [a, b])$ nel seguente modo

$I^-(f; [a, b])$

$$I^+(f; [a, b]) = \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi(x) \text{ è una qualunque funzione a gradini } \geq f(x) \text{ in } [a, b] \right\}$$

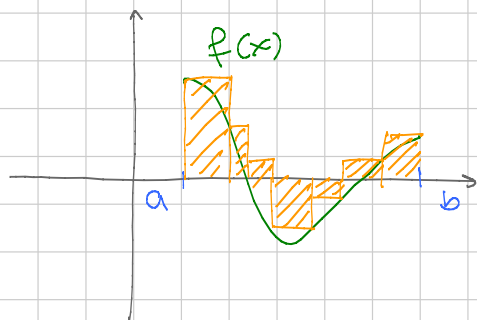
$$I^-(f; [a, b]) = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi(x) \text{ è a gradini e } \leq f(x) \text{ in } [a, b] \right\}$$



Che relazione c'è tra I^+ e I^- ?

In generale $I^+ \geq I^-$.

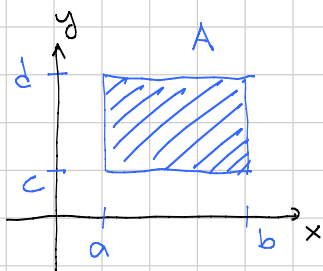
Se accade che $I^+ = I^-$ si dice che $f(x)$ è integrabile in $[a, b]$ (secondo RIEMANN) e il valore comune si dice integrale.



funzioni a gradino $\geq f(x)$

In 2 variabili**CASO BANALE**

A = rettangolo con lati paralleli agli assi
 $= [a, b] \times [c, d]$



$f(x, y) = \text{costante } \lambda$ su tutto il rettangolo.

$\iint_A f(x, y) dx dy = \text{volume con segno del parallelepipedo}$

$$= \lambda \underbrace{(b-a)(d-c)}_{\text{Area base (sempre } > 0 \text{)}} \quad \begin{array}{l} \text{altezza} \\ \text{con segno} \end{array}$$

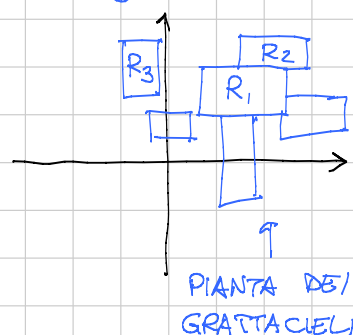
CASO SEMIBANALE

Funzioni semplici
 Funzioni a gradino
 Step functions

SINONIMI
 (sistema di grattacieli)

Insieme A = unione finita di rettangoli con lati paralleli agli assi
 $R_1, \dots, R_k$

$f(x, y) = \text{costante } \lambda_i$ su ogni rettangolo R_i



$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &= \text{somma algebrica dei volumi dei singoli parallelep.} \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{Area}(R_i) = \text{volume con segno dei grattacieli} \end{aligned}$$

CASO GENERALE

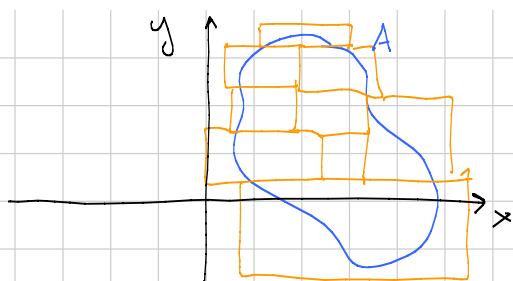
A insieme limitato qualunque
 f funzione limitata qualunque.

$$I^+(f; A) = \inf \left\{ \iint_{\boxed{?}} \varphi(x,y) dx dy : \varphi(x,y) \text{ è una qualunque funzione a gradini t.c. } \varphi(x,y) \geq f(x,y) \text{ in } A \right\}$$

↑
dove φ è definita

$$I^-(f; A) = \sup \left\{ \text{-----} : \varphi(x,y) \text{ ---- } \varphi(x,y) \leq f(x,y) \text{ in } A \right\}$$

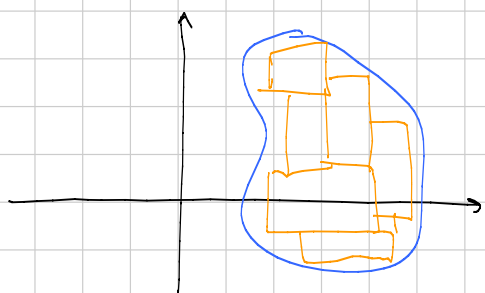
In generale $I^+ \geq I^-$. Se accade che $I^+ = I^-$, si dice che f è integrabile ed il valore comune si dice integrale di f in A .



$f(x,y) > 0$ in A

In più variabili oltre allo "sforamento in altezza" c'è anche uno "sforamento sulla base"

↑
insieme di definit.
di una $\varphi(x,y)$ a gradini $\geq f(x,y)$ in A



↙ insieme def.
di $\varphi(x,y) \leq f(x,y)$ in A

ANALISI II CIV
NUCL.

ORA 27

TECNICHE DI CALCOLO

Gli integrali doppi si calcolano
mediante le FORMULE DI RIDUZIONEFORMULA DI RIDUZIONE
SUI RETTANGOLI1 int. doppio = 2 int.
in una var.

Supponiamo che A sia un rettangolo con lati paralleli
agli assi $A = [a, b] \times [c, d]$
 $f(x, y)$ funzione limitata qualsiasi

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

Esempio 1 $A = [0, 1] \times [0, 2]$ $f(x, y) = x + 2y$

$$\iint_A (x + 2y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^2 (x + 2y) dy$$

↓ calcolo questo integrale risp. alla
variabile y facendo finta che x
sia una costante (parametro)

$$= \int_0^1 dx \left[xy + y^2 \right]_{y=0}^{y=2}$$

primitiva di
 $x+2y$ rispetto
alla variabile y

$$= \int_0^1 dx [2x + 4] = \text{da qui in poi è un integrale della sola } x$$

$$= \left[x^2 + 4x \right]_{x=0}^{x=1} = 1 + 4 = 5$$

primitiva di
 $2x+4$ rispetto
alla variabile x

La formula di riduzione si può anche scrivere nella forma

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y) dx$$

primitiva di $x+2y$
rispetto ad x

$$\iint_A (x+2y) dx dy = \int_0^2 dy \int_0^1 (x+2y) dx = \int_0^2 dy \left[\frac{x^2}{2} + 2xy \right]_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \int_0^2 dy \left[\frac{1}{2} + 2y \right] = \left[\frac{y}{2} + y^2 \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{2}{2} + 4 = \boxed{5}$$

Esempio 2 $A = [1,2] \times [2,3]$ $f(x,y) = xy^2$

$$\iint_A xy^2 dx dy = \int_1^2 dx \int_2^3 xy^2 dy = \int_1^2 dx \left[x \frac{y^3}{3} \right]_{y=2}^{y=3} = \int_1^2 dx \left[9x - \frac{8}{3}x \right] =$$

↑
primitiva
risp. a y

$$= \int_1^2 \frac{19}{3} x dx = \left[\frac{19}{6} x^2 \right]_{x=1}^{x=2} = \dots$$

In alternativa

prim. su x

$$\iint_A xy^2 dx dy = \int_2^3 dy \int_1^2 xy^2 dx = \int_2^3 dy \left[\frac{x^2}{2} y^2 \right]_{x=1}^{x=2} =$$

controlla
che coincide

$$= \int_2^3 dy \left[2y^2 - \frac{1}{2}y^2 \right] = \int_2^3 \frac{3}{2} y^2 dy = \left[\frac{y^3}{2} \right]_{y=2}^{y=3} = \dots$$

↑
 $x=2$ $x=1$

$$\iint_A xy^2 dx dy = \int_2^3 dy \int_1^2 xy^2 dx = \int_2^3 y^2 dy \int_1^2 x dx =$$

è una costante
quando integro
risp. a x , quindi
può uscire

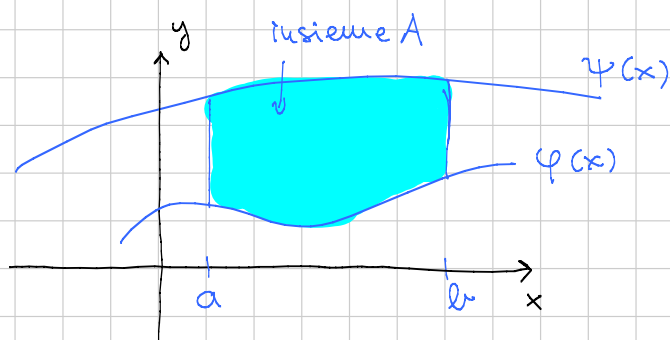
$$= \int_2^3 y^2 dy \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=1}^{x=2} =$$

$$= \int_2^3 y^2 dy \left[2 - \frac{1}{2} \right] = \frac{3}{2} \int_2^3 y^2 dy$$

INSIEMI NORMALI RISPETTO ASSE x

È un insieme del tipo:

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \}$$



Dato $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

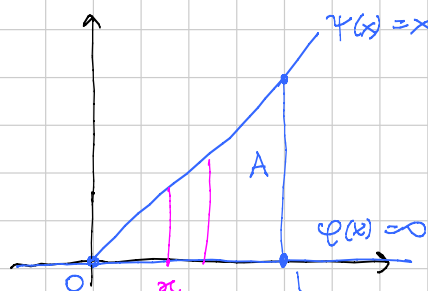
$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy$$

Esempio 1 $A = \text{triangolo con vertici in } (0,0), (1,0), (1,1)$

$$f(x,y) = xy$$

L'insieme A è normale rispetto all'asse x

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \leq y \leq x \}$$

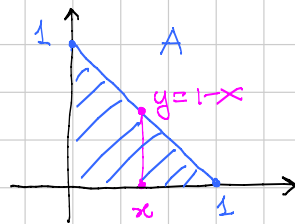


$$\begin{aligned} \iint_A xy \, dx \, dy &= \int_0^1 dx \int_0^x xy \, dy = \int_0^1 x \, dx \int_0^x y \, dy = \\ &= \int_0^1 x \, dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} = \int_0^1 x \cdot \frac{x^2}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} = \boxed{\frac{1}{8}} \end{aligned}$$

↑
derivata
di y risp. a y

Esempio 2 $A = \text{triangolo con vertici in } (0,0), (1,0), (0,1)$
 $f(x,y) = x^2y$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \leq y \leq 1-x\}$$

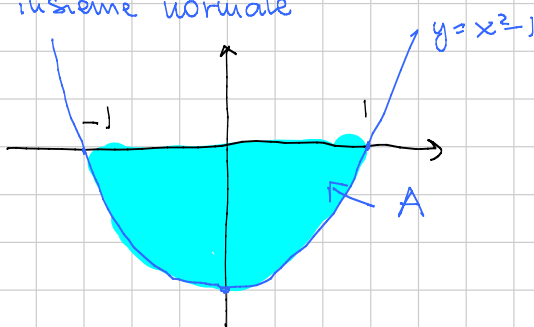


$$\begin{aligned} \iint_A x^2y \, dx \, dy &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (x^2y) \\ &= \int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} y \, dy = \int_0^1 x^2 dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (1-x)^2 dx = \dots \end{aligned}$$

Esempio 3 $f(x,y) = x$ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1+x^2 \leq y \leq 0\}$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1], -1+x^2 \leq y \leq 0\}$$

Non è una scritt. come insieme normale



$$\iint_A x \, dx \, dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2-1}^0 dy (x)$$

$$= \int_{-1}^1 x \, dx \int_{x^2-1}^0 1 \, dy = \int_{-1}^1 x \, dx [y]_{y=x^2-1}^{y=0}$$

$$= \int_{-1}^1 x [0 - (x^2-1)] \, dx = \int_{-1}^1 x(1-x^2) \, dx = 0$$

funzione dispari su intervallo $[-A,A]$.

ANALISI II CIV.
NUCL

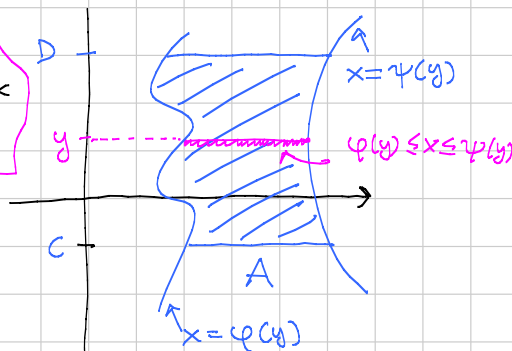
ORA 28

INSIEMI NORMALI RISPETTO ASSE y

Si presentano nella forma

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$$

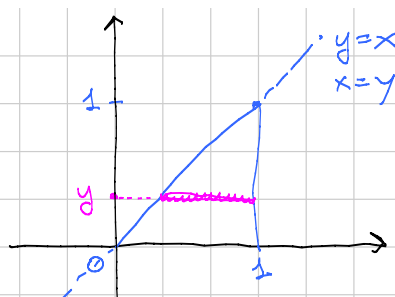
Esempio 1È normale rispetto
asse y ?

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], y \leq x \leq 1\}$$

$$\iint_A xy dx dy = \int_0^1 dy \int_y^1 dx (xy)$$

$$= \int_0^1 y dy \int_y^1 x dx = \int_0^1 y dy \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y}^{x=1}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 y (1 - y^2) dy =$$

controllare che
venga come prima.

Esempio 2

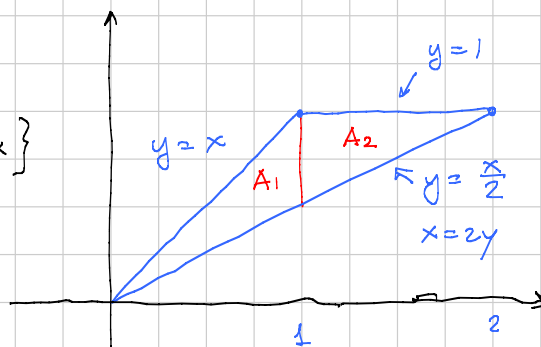
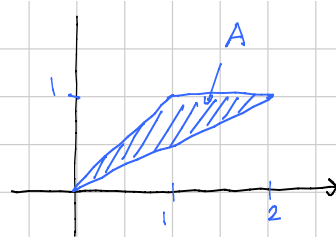
$$\iint_A y \, dx \, dy =$$

Ragioniamo rispetto asse x

$$= \iint_{A_1} y \, dx \, dy + \iint_{A_2} y \, dx \, dy =$$

$$A_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], \frac{x}{2} \leq y \leq x \}$$

$$A_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, 2], \frac{x}{2} \leq y \leq 1 \}$$



$$= \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^x dy \, y + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^1 dy \, y = \dots$$

Ragioniamo rispetto asse y

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], y \leq x \leq 2y \}$$

$$\iint_A y \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_y^{2y} dx \cdot y = \int_0^1 y \, dy \int_y^{2y} 1 \, dx$$

Potenzia generale:

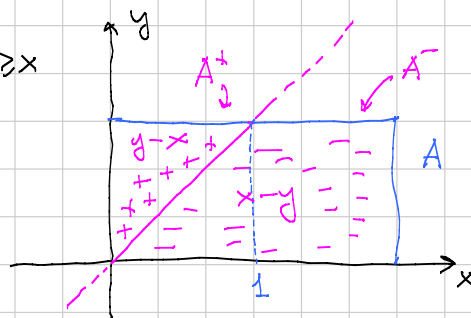
$$\int_a^b 1 \, dx = b - a = \text{lungh. interv.}$$

$$= \int_0^1 y (2y - y) \, dy = \int_0^1 y^2 \, dy = \frac{1}{3}$$

controllare che
venga lo stesso

Esempio 3 $A = [0, 2] \times [0, 1]$ $f(x, y) = |y - x|$

$$|y - x| = \begin{cases} y - x & \text{dove } y - x \geq 0, \text{ cioè } y \geq x \\ x - y & \text{dove } y - x \leq 0 \end{cases}$$



$$\iint_A |y - x| dx dy =$$

$$= \iint_{A^+} (y - x) dx dy + \iint_{A^-} (x - y) dx dy =$$

$$A^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], x \leq y \leq 1\} \quad \text{NORMALE ASSE } x$$

$$A^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], y \leq x \leq 2\} \quad \text{NORMALE ASSE } y$$

$$= \int_0^1 dx \int_x^1 dy (y - x) + \int_0^1 dy \int_y^2 dx (x - y) = \dots$$

SIMMETRIE (= calcoli risparmiati)

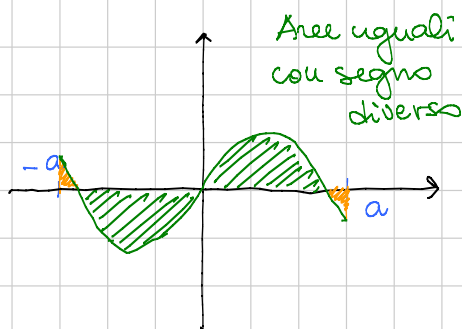
Caso classico in 1 variabile. Sia $f(x)$ una funzione

DISPARI

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

$$= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

↓
fone cambio di
variabile $y = -x$



Se invece $f(x)$ è PARI

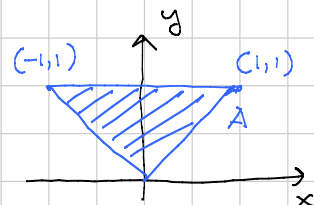
$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

IMPORTANTE È LA SIMMETRIA DELL'INTERVALLO.

Esempio 1

$$\iint_A x \, dx \, dy = 0$$

x è positiva nel triangolo destro
 x è neg. " " sinistro



I 2 volumi si compensano

Esempio 2

$$\iint_A y \, dx \, dy$$

di sicuro è positivo perché $y > 0$
 all'interno di tutto il ∇

$$= 2 \iint_{\nabla} y \, dx \, dy \quad \text{sempre per simmetria}$$

Esempio 3

$$\iint_A |x| \, dx \, dy$$

di sicuro è positivo ($|x| \geq 0$ dentro)

$$= 2 \iint_{\nabla} x \, dx \, dy$$

Esempio 4

$$\iint_A x \, dx \, dy$$

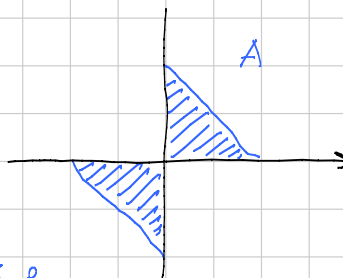
= 0

$$\iint_A y \, dx \, dy$$

= 0

$$\iint_A xy \, dx \, dy$$

> 0 perché
 $xy \geq 0$ nel I e
 III quadrante.



ANALISI 2 CIV

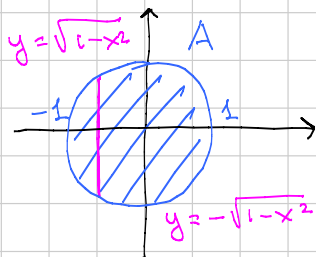
ORA 29

Titolo nota

15/11/2006

Utilizzo coordinate polari / cambi di variabile.

DESCRIZIONE DI INSIEMI IN COORD. POLARI



A è normale rispetto asse x

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \}$$

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$$

SCOMODO

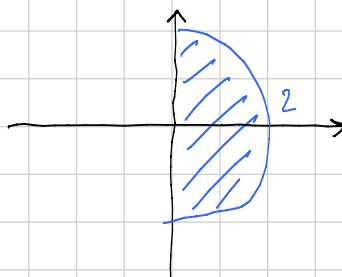
In coordinate polari l'insieme A si descrive come

$$A = \{ (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 : r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi] \}$$



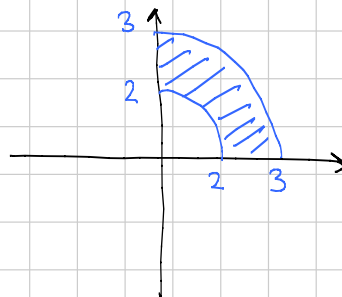
$$r \in [0, 1]$$

$$\theta \in [0, \pi]$$



$$r \in [0, 1]$$

$$\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$



$$r \in [0, 1]$$

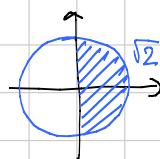
$$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

SI $\theta \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$

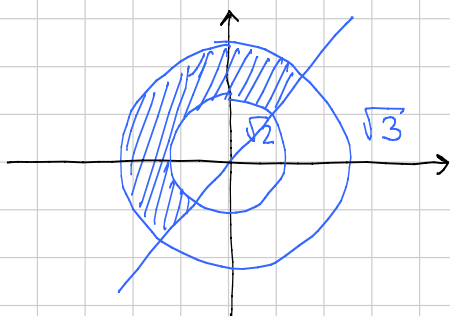
$\theta \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ NO!

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2 \}$$

$$\rho \in [0, \sqrt{2}], \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



$$B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 3, y \geq x \}$$



$$\rho \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$$

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

Calcolo di integrali doppi mediante coord. polari

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B g(\rho, \theta) \cdot \boxed{\rho} d\rho d\theta$$

B = l'insieme A descritto mediante coord. polari

$g(\rho, \theta)$ = funzione $f(x,y)$ descritta in coord. polari

$$g(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

ρ è il "pagamento"

Esempio 1

$$\iint_A x \, dx \, dy =$$

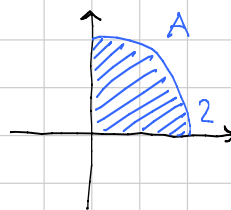
$$= \int_0^2 dp \int_0^{\pi/2} d\theta$$

Descrizione
di A in
coord. polari

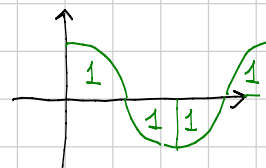
$$p \cos \theta$$

x in
coord.
polari

p =
↑
raggiamento



$$A : p \in [0, 2], \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$



$$= \int_0^2 dp \int_0^{\pi/2} d\theta \, p \cos \theta = \int_0^2 p^2 dp \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos \theta}_{=1} d\theta = \int_0^2 p^2 dp = \left[\frac{p^3}{3} \right]_0^2 = \boxed{\frac{8}{3}}$$

Esempio 2

A = cerchio con centro in (0,0) e raggio 3

$$\iint_A (x^2 + y^2) \, dx \, dy =$$

In coord. polari $A = p \in [0, 3]$
 $\theta \in [0, 2\pi]$

$$= \int_0^3 dp \int_0^{2\pi} d\theta$$

insieme in
coord. polari

$$p^2$$

$x^2 + y^2$
in coord.
polari

p =
↑
ragg.

$$= \int_0^3 dp \int_0^{2\pi} d\theta \cdot p^3$$

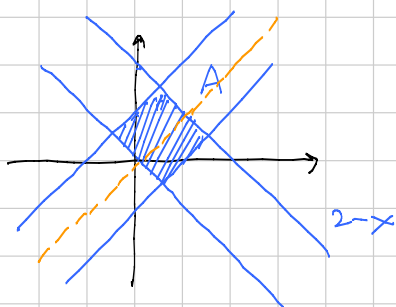
$$= \int_0^3 p^3 dp \int_0^{2\pi} d\theta$$

2π

$$= 2\pi \int_0^3 p^3 dp = 2\pi \left[\frac{p^4}{4} \right]_{p=0}^{p=3} = \boxed{11 \frac{81}{2}}$$

CAMBIO DI VARIABILI IN GENERALE

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x+y \leq 2, -1 \leq x-y \leq 1 \}$$



$$\begin{aligned} y &\leq 2-x \\ y &\geq -x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-y &\leq 1; \quad y \geq x-1 \\ x-y &\geq -1 \quad y \leq x+1 \end{aligned}$$

$$0 \leq x+y \leq 2, \quad -1 \leq x-y \leq 1$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq u \leq 2 & -1 &\leq v \leq 1 \end{aligned}$$

$$\iint_A (x^2 - y^2) dx dy = \int_0^2 du \int_{-1}^1 dv \quad \underbrace{uv}_{\substack{x^2-y^2 = \\ (x+y)(x-y)}} \quad \underbrace{J(u,v)}_{\text{pagamento}}$$

insieme A descritto
nelle variabili u e v

$J(u,v)$ è una funzione di u,v detta DETERMINANTE JACOBIANO e si calcola in 3 tappe

- ① RICAVARE
- ② MATRICE
- ③ DETERMINANTE

① RICAVARE

$$\begin{aligned} x+y &= u \\ x-y &= v \end{aligned}$$

Ricavo x e y in funzione di u e v

Sommo; $2x = u+v \Rightarrow x = \frac{u+v}{2}$

Sottraggo: $2y = u-v \Rightarrow y = \frac{u-v}{2}$

② **MATRICE** Alla fine dalla ① mi ritrovo

$$x = \varphi(u, v) \quad y = \psi(u, v)$$

$$\text{MATRICE JACOBIANA : } \begin{pmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

Nell' esempio

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

③ **DETERMINANTE**

$$J(u, v) = | \det(\text{matrice jacobiana}) |$$

Nell' esempio

$$J(u, v) = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\iint_A (x^2 - y^2) dx dy = \int_0^2 du \int_{-1}^1 dv \quad \underbrace{uv}_{\substack{x^2 - y^2 = \\ (x+y)(x-y)}} \quad \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{J(u,v) \\ \text{pagamento}}}$$

insieme A descritto
nelle variabili u e v

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 du \int_{-1}^1 dv \quad uv$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 u du \int_{-1}^1 v dv = 0$$

ANALISI II CN (NUCL)

ORA 30

Esempio 1 Usiamo la formula generale per $J(u, v)$ nel caso delle coordinate polari

① Ricavare x e y in funzione di ρ e θ

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta$$

② Matrice $\begin{pmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$

③ Determinante $J = |\text{Det}| = |\rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta| = \rho$

Casi facili di cambio di variabili

* Traslazioni $u = x + a \quad v = y + b \quad a, b \text{ numeri}$

Ricavare : $x = u - a, y = v - b$

Matrice : $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{identità}$

$$J(u, v) = 1$$

* Dilatazioni sugli assi $u = ax \quad v = by \quad a, b \text{ numeri} > 0$

Ricavare $x = \frac{u}{a} \quad y = \frac{v}{b}$

Matrice : $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} = \text{matrice diagonale}$

$$J(u,v) = |\text{Det}| = \frac{1}{ab}$$

* Trasformazioni affini $u = \alpha x + \beta y$, $v = \delta x + \epsilon y$

Ricavare! $x = au + bv$ $y = cu + dv$

(a,b,c,d) si ricavano in funzione di $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$

Matrice: $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Matrice indep. da u e v

$$J(u,v) = |ad - bc|$$

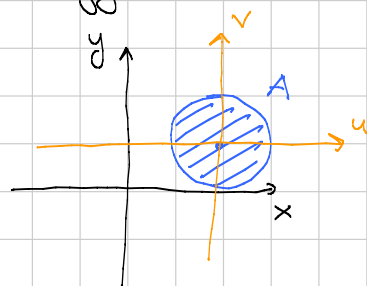
Esempio

$$\iint_A xy \, dx \, dy$$

A = cerchio con centro in (2,1) e raggio 1

L'equazione di A è

$$\underbrace{(x-2)^2}_u + \underbrace{(y-1)^2}_v \leq 1$$



Nelle coord. (u,v) l'insieme A diventa $u^2 + v^2 \leq 1$

$$\iint_A xy \, dx \, dy = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \underbrace{(u+2)(v+1)}_{x \cdot y} \underbrace{1}_{J(u,v)} \, du \, dv$$

↑
insieme A
nelle coord. u,v

$$= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} (u+2)(v+1) \, du \, dv \quad \odot \quad \text{uso coord. polari}$$

$$u = \rho \cos \theta$$

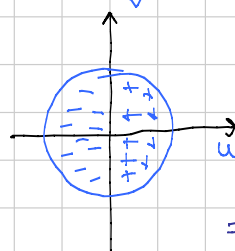
$$v = \rho \sin \theta$$

$$= \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{(\rho \cos \theta + 2)}_{u+2} \underbrace{(\rho \sin \theta + 1)}_{v+1} \underbrace{\rho}_{\text{pagamento}}$$

$$\odot \iint (u+2)(v+1) = \iint uv + \iint u + 2 \iint v + 2 \iint 1$$

↑
svolgo
il
prodotto

↑
l'integrale
della somma
è la somma
degli integrali



segno di u
nel cerchio

$$= 2 \text{ Area (cerchio)}$$

$$= 2\pi$$

$$\boxed{\iint_A 1 \, dx \, dy = \text{Area}(A)}$$

In 1 variabile

$$\int_a^b 1 \, dx = b-a$$

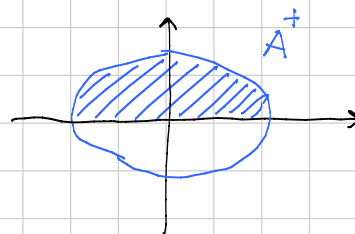
= lungh. del segmento

Esempio 2 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 \leq 5\}$

$$\iint_A x \, dx \, dy = 0$$

$$\iint_{A^+} x \, dx \, dy = 0 \quad ; \quad \iint_{A^+} y \, dx \, dy$$

di sicuro positivo



$$\iint_{A^+} y \, dx \, dy =$$

$$2x^2 + 3y^2 \leq 5$$

$$\underbrace{(\sqrt{2}x)^2}_{u^2} + \underbrace{(\sqrt{3}y)^2}_{v^2} \leq 5$$

$$= \iint_{\substack{u^2 + v^2 \leq 5, \\ \text{insieme in} \\ u \text{ e } v}} \underbrace{\frac{v}{\sqrt{3}}}_{\substack{\uparrow \\ y}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}}_{\substack{\uparrow \\ J(u,v)}} \, du \, dv =$$

perché siamo in A^+

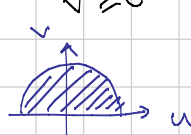
Ricavare $u = \sqrt{2}x$ $v = \sqrt{3}y$ $x = \frac{1}{\sqrt{2}}u$ $y = \frac{1}{\sqrt{3}}v$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$J(u,v) = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

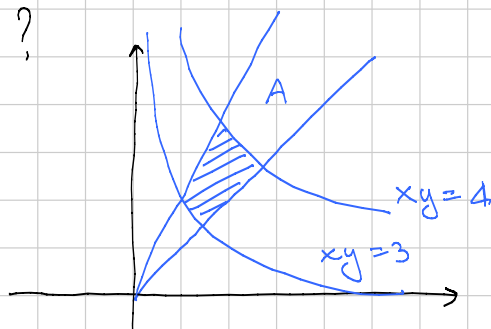
$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \iint_{\substack{u^2 + v^2 \leq 5 \\ v \geq 0}} v \, du \, dv = \frac{1}{3\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{5}} \rho \, d\rho \int_0^{\pi} d\theta \, \rho \sin \theta \, \rho$$

pag.

$$= \dots$$


Esempio 3 $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x \leq y \leq 2x, 3 \leq xy \leq 4 \}$

Area (A) = ?



$$x \leq y \leq 2x$$

$$1 \leq \frac{y}{x} \leq 2$$

$$3 \leq xy \leq 4$$

$$\frac{u}{v}$$

$$\text{Area (A)} = \iint_A 1 \, dx \, dy = \underbrace{\int_1^2 du \int_3^4 dv}_{\text{insieme in } u \text{ e } v} \underbrace{1}_{J(u,v)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2u}}_{J(u,v)} = \dots$$

① Ricavare $u = \frac{y}{x}$ $v = xy$

Moltiplico: $y^2 = u \cdot v$; $y = \sqrt{uv} = \sqrt{u} \sqrt{v}$

Divido $x^2 = \frac{v}{u}$ $x = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$

② Matrice $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{v}}{2u\sqrt{u}} & \frac{1}{2\sqrt{u}\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{pmatrix}$$

③ $|\text{Det}| = \left| -\frac{1}{4u} - \frac{1}{4u} \right| = \frac{1}{2u}$

[Provare a calcolare $\text{Det} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = 2u]$

ANALISI II CIN (NOCL)

ORA 31

Titolo nota

21/11/2006

Integrali tripli

- ↗ Notazione
- Significato geometrico (fisico)
- ↘ Definizione
- ↘ Tecniche di calcolo → $3 = 1+1+1$, $3 = 2+1$, $3 = 1+2$
- Cambi di coordinate

NOTAZIONE

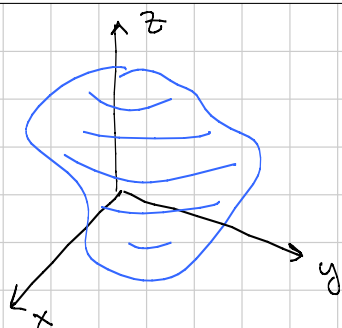
$A \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato (zona di integrazione)
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ limitata (integrand)

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$$

$$\int_A f(x, y, z) dx dy dz$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO

Dedicato perché grafico di f è contenuto in $\mathbb{R}^4$.



$A =$ solido contenuto in $\mathbb{R}^3$

$f(x, y, z) > 0$ in A . Pensiamo che f rappresenti la densità del materiale di cui è composto A .

Supponiamo di voler calcolare il peso di A .

Il calcolo è semplice se A è un solido "semplice" ad esempio un parallelepipedo e la densità è costante.



Peso = Volume · peso specifico (densità)

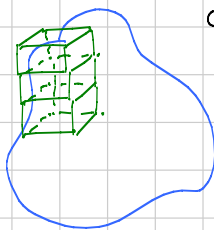
↑
facile per
il parallele-
pipedo

↑
costante

Caso semi-facile : il corpo è costituito da tanti mattoni a forma di parallelepipedo, diversi gli uni dagli altri, ma ciascuno omogeneo.

Peso totale = $\sum$ peso dei singoli mattoni
 $\uparrow$
 si calcolano come prima.

Generale : si può ottenere una stima dall'alto del peso del corpo immaginandolo suddiviso in tanti "sottocorpi" a forma di parallelepipedo e supponendo la densità costante in ciascun mattone.



Allo stesso modo si ottiene una stima dal basso.

Si può immaginare che usando una suddivisione abbastanza fitta otteniamo una buona stima del peso.

QUESTA È IN FONDO LA DEF. DI INTEGRALE TRIPLO

DEFINIZIONE

- * Caso banale: 1 mattone
- * Caso semi-banale: tanti mattoni (diversi per dim. e densità)
- * Caso generale: si definisce l'integrale superiore e inferiore "approssimando" con un'unica pila di mattoni.

TECNICHE DI CALCOLO: Formule di riduzione

$$A = \text{parallelepipedo} = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$$

$\underbrace{\quad}_x \quad \underbrace{\quad}_y \quad \underbrace{\quad}_z$

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz f(x, y, z)$$

$$3 = 1 + 1 + 1$$

Di questa formula ci sono 6 versioni (3 possibili scelte per la variabile + interna, 2 possibili scelte per quella "intermedia")

Esempio 1 $A = [0, 1] \times [0, 1] \times [1, 2]$ $f(x, y, z) = z + xy$

$$\iiint_A (z + xy) dx dy dz = \iiint_A z dx dy dz + \iiint_A xy dx dy dz$$

$$\begin{aligned} \iiint_A xy dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_1^2 dz (xy) = \int_0^1 x dx \int_0^1 y dy \int_1^2 1 dz \\ &= \int_0^1 x dx \int_0^1 y dy = \int_0^1 x dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \boxed{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

lunghezza zona int = 2-1=1

$$\begin{aligned} \iiint_A z dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_1^2 dz (z) \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=1}^{z=2} = \frac{3}{2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \cdot 1 \\ &= \frac{3}{2} \text{Area}([0, 1] \times [0, 1]) \\ &= \boxed{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

↑
primitiva
risp. a z

In conclusione $\iiint_A (z + xy) dx dy dz = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{7}{4}}$

Esempio 2 $A = [-1, 1] \times [0, 1] \times [0, 3]$

$$\iiint_A \arctan(xyz) dx dy dz = 0$$

$$\int_{-1}^1 dx \int_0^1 dy \int_0^3 dz \arctan(xyz)$$

così non si vede molto...

$$= \int_0^3 dz \int_0^1 dy \int_{-1}^1 dx \arctan(xyz) = 0$$

come funzione della x è come se fosse $\arctan(kx)$, dunque è una funzione dispari, e integrata su $[-1,1]$.
Dunque l'integrale in dx viene 0.

Esempio 3 $A = [-1,1] \times [0,2] \times [3,4]$

$$\iiint_A x \, dx \, dy \, dz$$

0

$$\iiint_A e^y \, dx \, dy \, dz$$

> 0

$$\iiint_A z^2 \, dx \, dy \, dz$$

> 0

$$\iiint_A e^y \, dx \, dy \, dz = \int_{-1}^1 dx \int_3^4 dz \int_0^2 dy (e^y)$$

$$= \int_{-1}^1 dx \int_3^4 dz [e^y]_{y=0}^{y=2}$$

$$= (e^2 - 1) \int_{-1}^1 dx \int_3^4 dz$$

$$= (e^2 - 1) \cdot \text{Area}([-1,1] \times [3,4]) = 2(e^2 - 1)$$

$$\iiint_A z^2 \, dx \, dy \, dz = \int_{-1}^1 dx \int_0^2 dy \int_3^4 dz z^2 = \int_{-1}^1 dx \int_0^2 dy \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=3}^{z=4}$$

$$= \frac{64-27}{3} \int_{-1}^1 dx \int_0^2 dy = \frac{37}{3} \cdot 4,$$

ANALISI 2 CIV

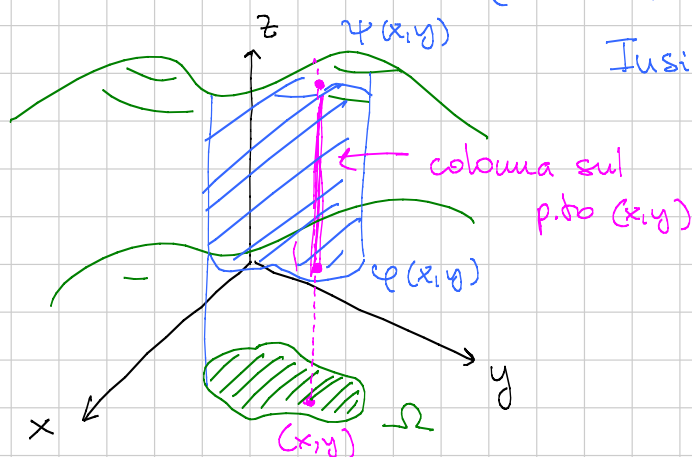
ORA 32

INSIEME NORMALE RISPETTO AL PIANO xy

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

↑
insieme
di $\mathbb{R}^3$

↑
insieme del
piano
(la BASE)



Insieme A = insieme dei punti dello spazio la cui proiezione sul piano xy cade in Ω e la cui quota è compresa tra il grafico di $\varphi(x, y)$ e quello di $\psi(x, y)$

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} dz f(x, y, z)$$

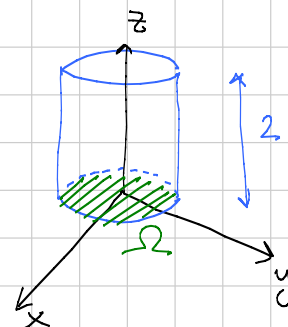
$$3 = 2 + 1$$

Formula di integrazione PER COLONNE

Esempio 1 A = cilindro con asse lungo asse z , raggio 1 e altezza $[0, 2]$.

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, 0 \leq z \leq 2\}$$

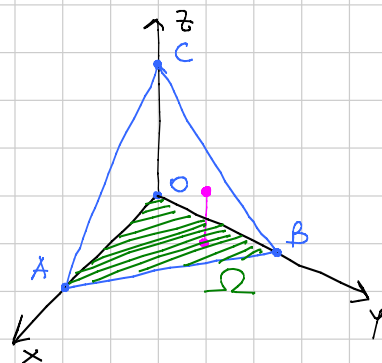
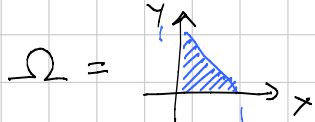


$$\begin{aligned}
 \iiint_A z \, dx \, dy \, dz &= \overset{\text{COLONNE}}{\iint_{\Omega} dx \, dy} \int_0^2 dz \, (z) \\
 &= \iint_{\Omega} dx \, dy \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=2} = 2 \iint_{\Omega} dx \, dy \\
 &= 2 \text{ Area}(\Omega) = \boxed{2\pi}
 \end{aligned}$$

Esempio 2

$A =$ piramide con vertici
 O, A, B, C

A è normale rispetto piano xy



$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, 0 \leq z \leq 1-x-y \}$$

$\varphi(x,y)$

$\psi(x,y) = \text{eq. del piano per } A, B, C$

L'eq. di un piano è $ax + by + cz = d$. Deve passare per
 $A = (1, 0, 0)$ $B = (0, 1, 0)$ $C = (0, 0, 1)$
 Si imposta il sistema e si vede che una poss. è

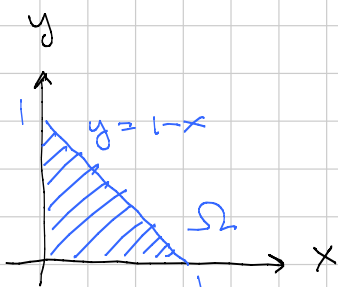
$$x + y + z = 1 \Rightarrow \boxed{z = 1 - x - y} \text{ eq. piano}$$

$$\iiint_A x \, dx \, dy \, dz = \overset{\text{COLONNE}}{\iint_{\Omega} dx \, dy} \int_0^{1-x-y} dz \, (x)$$

$$= \iint_{\Omega} x \, dx \, dy \int_0^{1-x-y} dz = \iint_{\Omega} x (1-x-y) \, dx \, dy$$

Diff. estremi
 $= 1-x-y$

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq 1-x \}$$



$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \, x(1-x-y) = \dots \text{ si calcola}$$

Descrizione per sezioni di un insieme

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [a, b], (x, y) \in S_z \}$$

min.
QUOTA max.
QUOTA

Figura PIANA che
descrive la sezione
di A ad altezza z.

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{S_z} f(x, y, z) dx dy$$

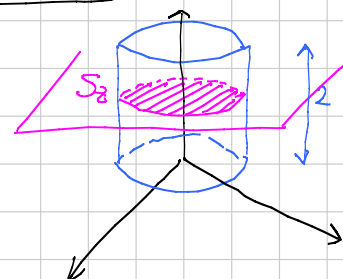
$$3 = 1 + 2$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SEZIONI

Esempio 1 $A =$ il cilindro di prima

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 2], (x, y) \in S_z \}$$

cerchio con centro
(0,0) e raggio 1



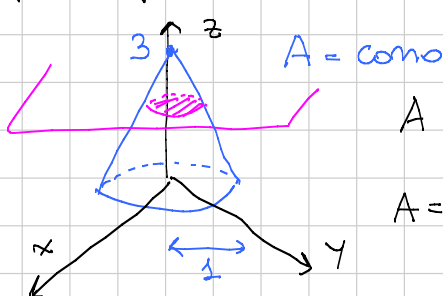
$$\iiint_A z dx dy dz = \int_0^2 dz \iint_{S_z} z dx dy$$

SEZIONI

$$= \int_0^2 z dz \iint_{S_z} 1 dx dy$$

$$= \int_0^2 z \underbrace{\text{Area}(S_z)}_{\text{sempre } \pi} dz = \pi \int_0^2 z dz$$

$$= \pi \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=2} = \boxed{2\pi}$$

Esempio 2

$A =$ cono

$$\iiint_A z^2 dx dy dz$$

A è normale rispetto al piano xy

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, 0 \leq z \leq \varphi(x, y) \}$$

base

eq. cono

Per sezioni: $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 3], (x, y) \in S_z\}$

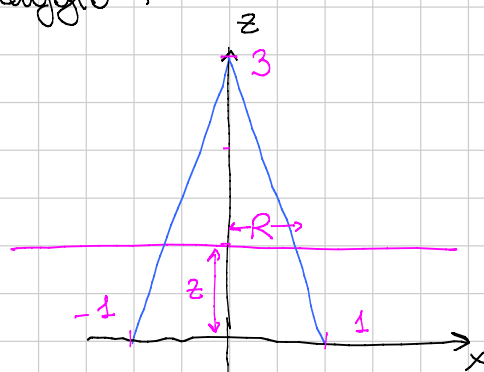
$S_z =$ cerchio con centro in $(0, 0)$ e raggio?

Quale legame c'è fra R e z ?

Si può fare la proporzione:

$$R : 1 = (3 - z) : 3$$

$$R = \frac{3 - z}{3} = 1 - \frac{z}{3}$$



$$\begin{aligned} \iiint_A z^2 dx dy dz &= \int_0^3 dz \iint_{S_z} dx dy \quad z^2 = \int_0^3 z^2 dz \iint_{S_z} dx dy \\ &= \int_0^3 z^2 \underbrace{\text{Area}(S_z)}_{\pi R^2} dz = \int_0^3 z^2 \cdot \pi \left(1 - \frac{z}{3}\right)^2 dz = \pi \int_0^3 z^2 \left(1 - \frac{z}{3}\right)^2 dz \\ &= \dots \end{aligned}$$

ANALISI 2 CIV

ORA 33

COORDINATE CILINDRICHE

Cartesiane (x, y, z) Cilindriche (ρ, θ, z) z = quota = stessa delle coord. cartesiane (ρ, θ) = corrispondenti polari di (x, y)

Descrizione di un insieme in coord. cilindriche

 A = solido cilindro con raggio base 1, altezza: $[0, 2]$ e asse lungo asse z

$$A : z \in [0, 2], \rho \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]$$

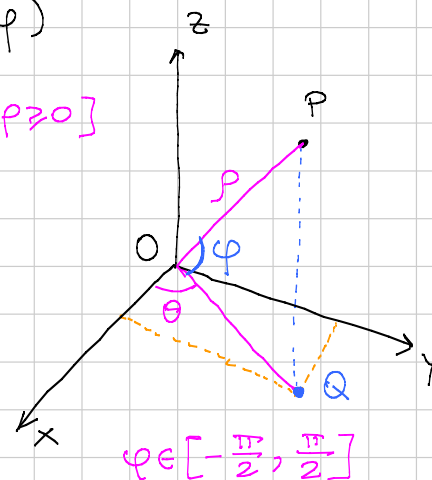
$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dz \cdot z \quad \boxed{\rho} =$$

↑
COORD. CILINDRICHE PAGAMENTO

$$= \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 z \, dz = \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=2} =$$

$$= 2 \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi \int_0^1 \rho \, d\rho = 4\pi \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} = 4\pi \cdot \frac{1}{2}$$

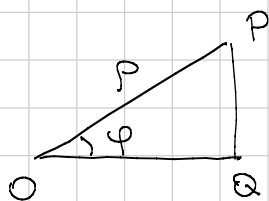
COORDINATE SFERICHE

 (ρ, θ, φ) $\rho = OP$ = distanza di P dall'origine $[0, +\infty]$ Q = proiezione di P sul piano base xy θ = il θ di Q come punto del piano xy $\theta \in [0, 2\pi]$ φ = angolo tra OP e OQ = angolo tra OP e il piano base xy $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 

In linguaggio geografico : φ = latitudine
 Θ = longitudine misurata
 rispetto al meridiano che
 passa per il semiasse posit-
 vo delle x .

Formule di passaggio $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Note ρ, Θ, φ , determinare (x, y, z)

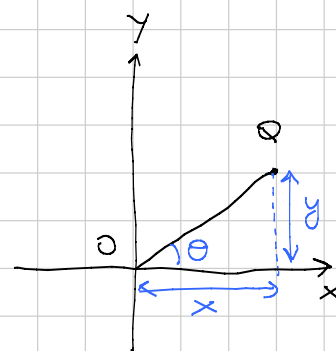


$$z = PQ = \rho \sin \varphi$$

$$OQ = \rho \cos \varphi$$

$$x = OQ \cdot \cos \Theta = \rho \cos \varphi \cos \Theta$$

$$y = OQ \cdot \sin \Theta = \rho \cos \varphi \sin \Theta$$



Formule di passaggio:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \cos \Theta \\ y &= \rho \cos \varphi \sin \Theta \\ z &= \rho \sin \varphi \end{aligned}$$

Descrizione di insiemi in coord. sferiche:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

Sfera con centro in $(0, 0, 0)$ e raggio 2

$$\rho \in [0, 2], \Theta \in [0, 2\pi], \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, z \geq 0\}$$

Metà alta della sfera con centro in $(0, 0, 0)$ e raggio $\sqrt{3}$

$$\rho \in [0, \sqrt{3}], \Theta \in [0, 2\pi], \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

$\frac{1}{8}$ di sfera compreso nel I OTTANTE

$$\rho \in [0, 2], \Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\iiint_B z \, dx \, dy \, dz = \int_0^{\sqrt{3}} dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \quad \underbrace{p \sin \varphi}_{\substack{z \text{ IN} \\ \text{COORD.} \\ \text{SFERICHE}}} \quad \underbrace{p^2 \cos \varphi}_{\text{PAGAMENTO}}$$

DESCRIZIONE DI B
IN COORD. SFERICHE

$$= \int_0^{\sqrt{3}} p^3 dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{2} d\varphi$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} p^3 dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\varphi)}{2} d\varphi$$

$$\left[-\frac{\cos(2\varphi)}{4} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{\cos \pi}{4} + \frac{\cos 0}{4} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} p^3 dp \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} p^3 dp = \pi \left[\frac{p^4}{4} \right]_0^{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{9\pi}{4}}$$

ANALISI II

CIN
(NUCL)

ORA 34

Titolo nota

22/1/2006

Esempi di cambi di variabile

Solidi di notazione e teorema di GULDINO

Cambi di variabile in generale

A = sfera con centro in $(1, 2, 0)$ e raggio 1

$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz = 0 \quad \text{per simmetria}$$

$$\iiint_A y \, dx \, dy \, dz$$

y varia tra 1 e 3 nella sfera
 $\Rightarrow$ l'integrale di sicuro è > 0

Equazione sfera

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 \leq 1$$

Pongo $u = x-1$ $v = y-2$ $w = z$

$$\iiint_A y \, dx \, dy \, dz = \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} (v+2) \cdot 1 \, du \, dv \, dw$$

INSIEME
NUOVE VARIABILI
 u, v, w

Come si calcola $J(u, v, w)$?

① Ricavare x, y, z in funzione di u, v, w

② Costruire la matrice JACOBIANA

③ $J(u, v, w) = |\det(\text{Matrice})|$

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}$$

Nel nostro caso abbiamo una traslazione:

$$x = u+1 \quad y = v+2 \quad z = w$$

$\Rightarrow$ Matrice = identità $\Rightarrow J = 1$

$$\iiint_{\text{---}} (v+2) du dv dw = \iiint_{\text{---}} v du dv dw + 2 \iiint_{\text{---}} du dv dw$$

$\begin{matrix} \text{"} \\ 0 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \text{"} \\ 2 \text{ Vol(sfera)} \end{matrix}$

(simmetria)

$$= 2 \cdot \frac{4}{3} \pi 1^3 = \frac{8}{3} \pi$$

$$\iiint_A y^2 dx dy dz = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{SOLITO} \\ \text{CAMBIO}}}{=} \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} (v+2)^2 du dv dw$$

$$= \iiint v^2 du dv dw + 4 \iiint v du dv dw + 4 \iiint du dv dw$$

$\begin{matrix} \text{"} \\ 0 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \text{"} \\ 4 \text{ Vol(sfera)} \end{matrix}$

Osservazione preliminare: sulla sfera $u^2+v^2+w^2 \leq R^2$

$$\iiint u^2 du dv dw = \iiint v^2 \text{---} = \iiint w^2 \text{---}$$

Coord. sferiche ($R=1$) $\rho \in [0,1], \theta \in [0,2\pi], \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$u = \rho \cos \varphi \cos \theta, \quad v = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad w = \rho \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} \iiint v^2 du dv dw &= \iiint w^2 du dv dw \\ &= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \underbrace{\rho^2 \sin^2 \varphi}_{w^2} \underbrace{\rho^2 \cos \varphi}_J \\ &= \int_0^1 \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^1 \rho^4 d\rho \left[\frac{\sin^3 \varphi}{3} \right]_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi \cdot \frac{2}{3} \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{4}{15} \pi \end{aligned}$$

Esempio 2 Volume sfera di raggio 1.

$$\text{Vol}(S) = \iiint_S 1 \, dx \, dy \, dz = (\star)$$

Rappresentazione di S per sezioni

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [-1, 1], (x, y) \in S_z\}$$

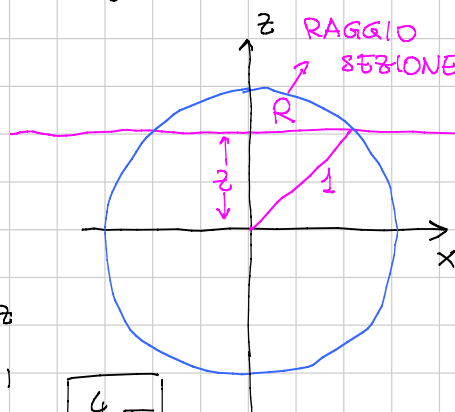
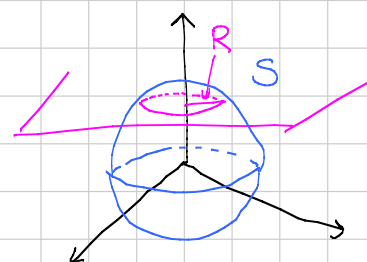
$S_z =$ cerchio con centro in $(0, 0)$ e raggio $\dots$

$$z^2 + R^2 = 1 \Rightarrow R = \sqrt{1 - z^2}$$

SEZIONI

$$(\star) \stackrel{\downarrow}{=} \int_{-1}^1 dz \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \text{Area}(S_z) \, dz$$

$$= \pi \int_{-1}^1 (1 - z^2) \, dz = \pi \left[z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=-1}^{z=1} = \boxed{\frac{4}{3} \pi}$$



Esempio 3 Volume ellissoide

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 \leq R^2 \quad a, b, c \text{ reali } > 0$$

$$\underbrace{(ax)^2}_u + \underbrace{(by)^2}_v + \underbrace{(cz)^2}_w \leq R^2$$

$$\text{Vol}(\text{Ellissoide}) = \iiint_{\text{Elliss.}} 1 \, dx \, dy \, dz = \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq R^2} \underbrace{1 \frac{1}{abc}}_J \, du \, dv \, dw$$

$$x = \frac{u}{a} \quad y = \frac{v}{b} \quad z = \frac{w}{c}$$

$$J(u, v, w) = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{abc}$$

$$\text{Vol} = \frac{1}{abc} \text{Vol}(\text{sfera}) = \boxed{\frac{1}{abc} \frac{4}{3} \pi R^3}$$

SOLIDI DI ROTAZIONE

Volume solido di rotazione

$$\text{Vol}(S) = \iiint_S 1 \, dx \, dy \, dz$$

SEZIONI

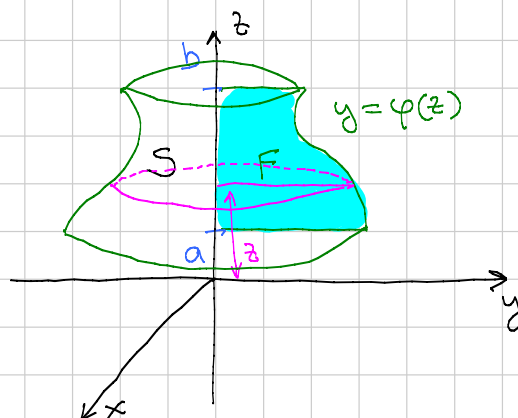
$$\downarrow = \int_a^b dz \iint_{S_z} dx \, dy$$

$$= \int_a^b \text{Area}(S_z) \, dz$$

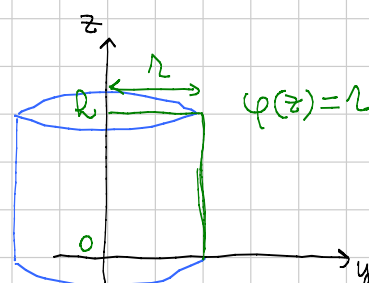
$$= \pi \int_a^b [\varphi(z)]^2 \, dz$$

Esempio Cilindro

$$\text{Vol} = \pi \int_0^R r^2 \, dz = \boxed{\pi r^2 R}$$



S_z = cerchio con centro $(0,0)$
e raggio $\varphi(z)$



ANALISI II CIV

ORA 35

BARICENTRI - GULDINO - ANALITICA NELLO SPAZIO

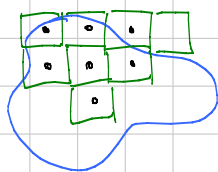
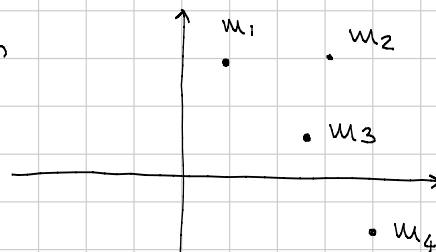
Fisica: punti $P_i (x_i, y_i)$ $i=1, \dots, m$ massa m_i

$$M = m_1 + \dots + m_m = \text{massa totale}$$

$$\text{Baricentro} : \left(\frac{1}{M} (m_1 x_1 + \dots + m_m x_m), \frac{1}{M} (m_1 y_1 + \dots + m_m y_m) \right)$$

cooro x del
baricentro = media
pesata delle x
dei singoli punti

↑
stessa cosa
con la y



Suddiviso in quadratini, faccio finta
che ogni quadratino sia un punto (centro)
e mi comporto come se fossero un numero
finito di punti. Poi rifitto i quadratini

Alla fine si ottiene che il baricentro di una figura
piana $F \subseteq \mathbb{R}^2$ è il punto $G = (x_G, y_G)$

$$x_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F x \, dx \, dy$$

$$y_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F y \, dx \, dy$$

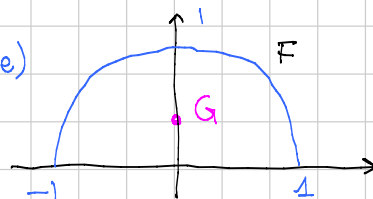
Fisicamente stiamo
supponendo F costruita
con un materiale
omogeneo

Il baricentro di un solido S è il punto $G = (x_G, y_G, z_G)$ con

$$x_G = \frac{1}{\text{Vol}(S)} \iiint_S x \, dx \, dy \, dz \quad \text{e analogo per } y_G \text{ e } z_G$$

Esempio 1 Baricentro di un semicerchio (raggio 1) $x_G = 0$ per simmetria (verificare l'integrale)

$$\text{Area} = \frac{\pi}{2} \quad \left(\frac{\pi R^2}{2} \right)$$



$$\begin{aligned} \iint_F y \, dx \, dy &= \int_0^1 dp \int_0^\pi d\theta \underbrace{p \sin \theta}_y \underbrace{p}_J = \\ &= \int_0^1 p^2 dp \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta}_2 = 2 \int_0^1 p^2 dp = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

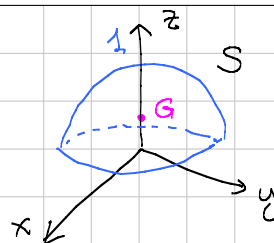
COORD. POLARI

Di conseguenza $y_G = \frac{1}{\text{Area}} \iint y = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3\pi}$

Esempio 2 Semisfera $G = (0, 0, z_G)$

per simmetria

$$\text{Vol}(S) = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi = \frac{2}{3} \pi$$



$$\begin{aligned} \iiint_S z \, dx \, dy \, dz &\stackrel{\text{COORD. SFERICHE}}{=} \int_0^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \underbrace{p \sin \varphi}_z \underbrace{p^2 \cos \varphi}_{\frac{\sin(2\varphi)}{2}} \\ &= 2\pi \int_0^1 p^3 dp \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{2} d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^1 p^3 dp \left[-\frac{\cos(2\varphi)}{4} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \pi \int_0^1 p^3 dp = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z_G = \frac{1}{\text{Vol}} \cdot \iint z \\ &= \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{3}{8}} \end{aligned}$$

$$\frac{3}{8} < \frac{4}{3\pi} ;$$

$$3\pi < 32$$

27/28

OK

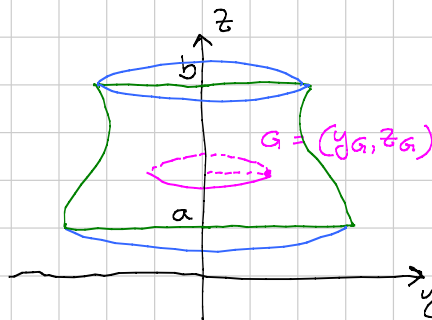
TEO. GULDINO

Sia S il solido di rotazione ottenuto ruotando una figura F (nel piano yz) attorno all'asse z . Allora

$$\text{Vol}(S) = \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G$$

↑
Area
Figura

↑
lunghezza
della circ.
descritta da
 G durante
la rotazione



$$y_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \cdot \iint_F y \, dy \, dz = \frac{1}{\text{Area}(F)} \int_a^b dz \int_0^{\varphi(z)} y \, dy =$$

↑
NORMALE
ASSE z

$$= \frac{1}{\text{Area}(F)} \int_a^b dz \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\varphi(z)} = \frac{1}{\text{Area}(F)} \cdot \frac{1}{2} \int_a^b \varphi^2(z) \, dz$$

Conseguenza:

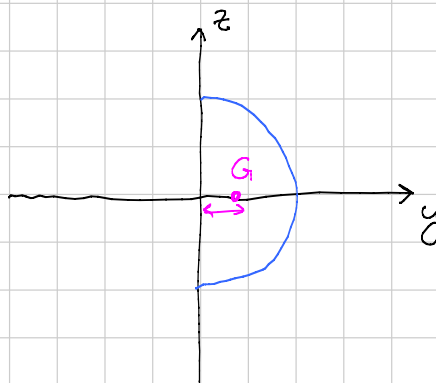
$$\begin{aligned} \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G &= \cancel{\text{Area}(F)} \cdot \cancel{2\pi} \frac{1}{\cancel{\text{Area}(F)}} \cdot \frac{1}{2} \int_a^b \varphi^2(z) \, dz \\ &= \pi \int_a^b \varphi^2(z) \, dz = \text{Vol}(S). \quad \square \end{aligned}$$

Esempio 1

Volume (Sfera) =

$$= \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G$$

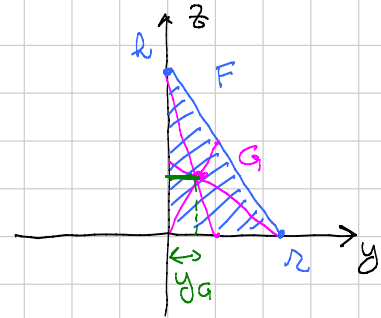
$$= \frac{\pi}{2} \cdot \cancel{2\pi} \cdot \frac{4}{3\pi} = \frac{4}{3}\pi$$



Esempio 2 Corno

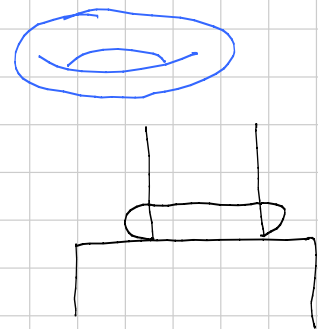
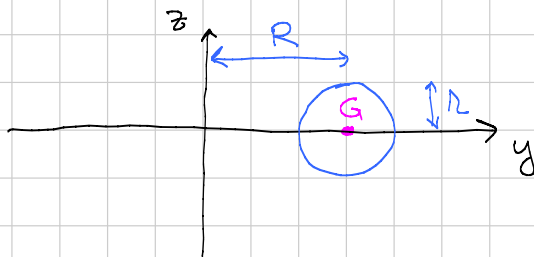
$$\text{Volume (Corno)} = \text{Area (F)} \cdot 2\pi y_G$$

$$\frac{\pi R^2 R}{3} = \frac{1}{2} R R \cdot 2\pi \cdot \frac{R}{3}$$



In un triangolo le coord. del baricentro sono la media delle coord. dei vertici.

Conseguenza: $y_G = \frac{R}{3}$

Esempio 3 TORO

$$\text{Volume (Toro)} = \text{Area (F)} \cdot 2\pi y_G$$

$$= \frac{\pi R^2}{1} \cdot 2\pi R$$

$$= \boxed{2\pi^2 R^2 R}$$

ANALISI II CIV (NUCL)

ORA 36

28/11/2006

INTEGRALI IMPROPRI IN 1 VARIABILE

integrali propri $\nearrow$ zona di integr.: intervallo $[a, b]$ limitato
 $\searrow$ funzione integranda limitata

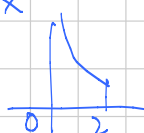
Se salta 1 o entrambe le condizioni, l'int. si dice IMPROPRIO

Esempi $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} dx$

funz. limitata
 zona di int. non limitata

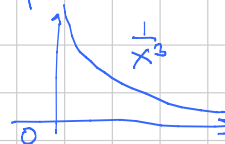
$\int_0^2 \frac{1}{x} dx$

zona int. lim.
 $\frac{1}{x}$ non limitata



$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$

entrambi i problemi

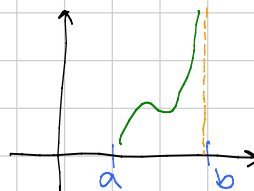
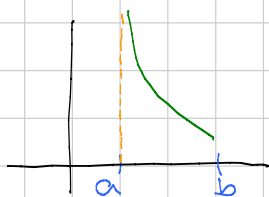


INTEGRALI MONOPROBLEMA, cioè con 1 solo tipo di problema

$\rightarrow$ funzione limitata, zona di integrazione non limitata del tipo $[a, +\infty)$ oppure $(-\infty, a]$

$\rightarrow$ zona di integrazione: intervallo $[a, b]$

② integranda $f(x)$ NON limitata per $x \rightarrow a^+$ oppure $x \rightarrow b^-$

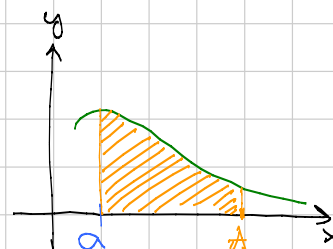


DEFINIZIONE DI INTEGRALE IMPROPRIO

Caso ①

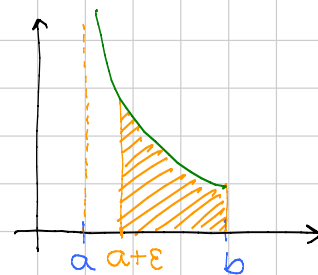
$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

INT. PROPRIO



Caso ② Funzione con problemi per $x \rightarrow a^+$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$



Funzione con problemi per $x \rightarrow b^-$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

INT. IMPR. MONOPROBLEMA: limite di integrali propri.

Un int. improprio può MONOPROBLEMA

- convergere ad un certo $l \in \mathbb{R}$
- divergere a $+\infty$
- divergere a $-\infty$
- essere indeterminato

Se l'integrale ha tanti problemi, va spezzato nella somma di tanti integrali monoprobema.

Esempi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \underbrace{\int_0^5 \frac{1}{x^3} dx}_{\substack{\text{Zona int. OK} \\ \text{funzione NO}}} + \underbrace{\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx}_{\substack{\text{funzione OK} \\ \text{Zona int. NO}}}$$

MONOPROBLEMA

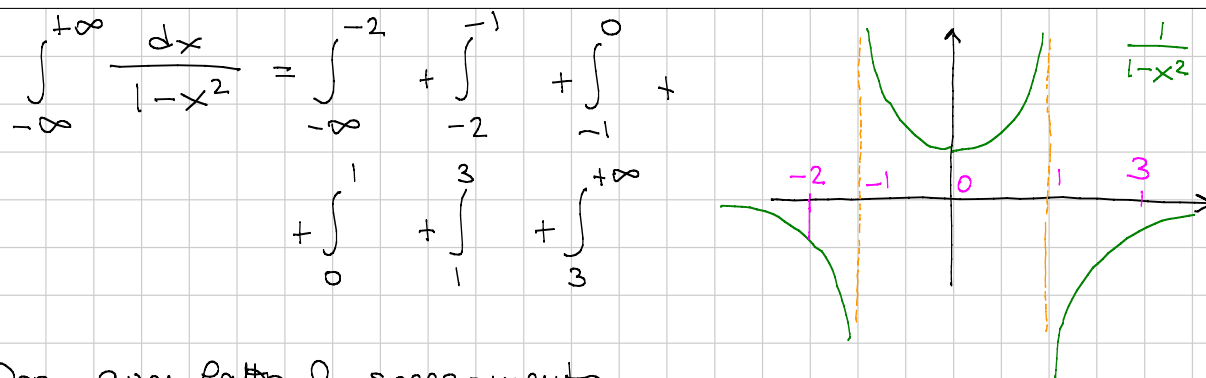
il 5 può
essere sostitui-
to da qualsiasi
cosa > 0 .

$$\int_{-2}^3 \frac{1}{x^2} dx$$

il problema è
in $x=0$, quindi non
ricade nel caso ②

$$= \int_{-2}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^3 \frac{dx}{x^2}$$

MONOPROBL.



Dopo aver fatto lo spezzamento

→ si studiano separatamente i vari pezzi

→ si deb. il comportamento generale sulla base del comp. dei vari pezzi

(NOTA BENE: se esiste un pezzo che diverge a $+\infty$ e un pezzo che diverge a $-\infty$, per definizione si dice che l'int. di partenza è **INDETERMINATO**)

NOTA BENE: il comportamento non dipende dagli estremi "virtuali" introdotti nello spezzamento

Esempi di studio di integrali monoproblema

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\log x]_{x=1}^{x=A} = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} [\log A - \log 1] = +\infty \Rightarrow \text{DIVERGE} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=1}^{x=A} = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{A} + 1 \right] = 1 \Rightarrow \text{CONVERGE} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} [2\sqrt{x}]_{x=1}^{x=A} = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} [2\sqrt{A} - 2] = +\infty \Rightarrow \text{DIVERGE} \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1}{\alpha-1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_{x=1}^{x=A} =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\alpha-1} \left\{ \frac{1}{A^{\alpha-1}} - 1 \right\}$$

→ se $\alpha-1 > 0$ tende
ad $\frac{1}{\alpha-1}$

↘ se $\alpha-1 < 0$ tende
a $+\infty$

N.B. se $\alpha-1=0$, cioè $\alpha=1$, non
posso fare la prim. come
l'ho fatta. Tuttavia
diventa il caso di $\frac{1}{x}$ fatto prima.

Conclusione:

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$	→	converge a $\frac{1}{\alpha-1}$ se $\alpha > 1$	<u>NOTO</u>
	↘	diverge a $+\infty$ se $\alpha \leq 1$	

$$\textcircled{5} \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{-1}{\alpha-1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_{x=\varepsilon}^{x=1}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\alpha-1} \left[1 - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right]$$

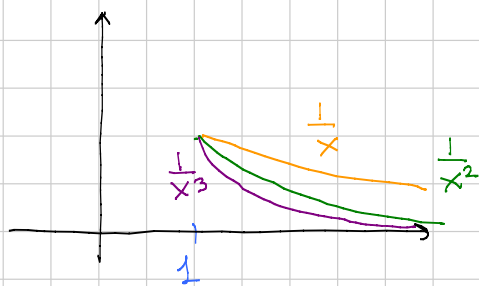
→ se $\alpha-1 > 0$ $[] \rightarrow -\infty$,
quindi il limite è $+\infty$

↘ se $\alpha-1 < 0$ $[] \rightarrow 1$,
quindi il limite è $\frac{1}{1-\alpha}$

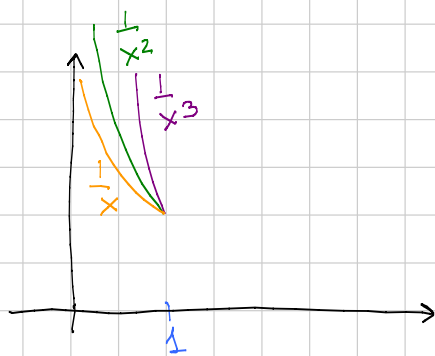
Il caso $\alpha=1$ va fatto a parte
(esercizio)

Conclusione:

$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$	→	converge a $\frac{1}{1-\alpha}$ se $\alpha < 1$
	↘	diverge a $+\infty$ se $\alpha \geq 1$



Con problema a $+\infty$, più l'esponente è alto, più è facile che converga



Vicino a $x=0$ più l'esponente è grande, più la funzione è grande, più è facile che l'integrale diverga

ANALISI II CIN

ORA 37

Esempio 6 $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x} dx =$

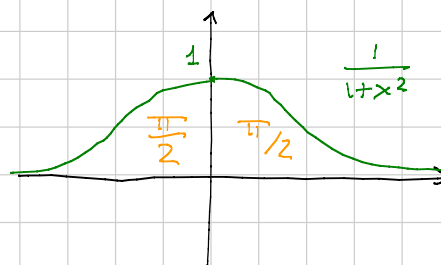
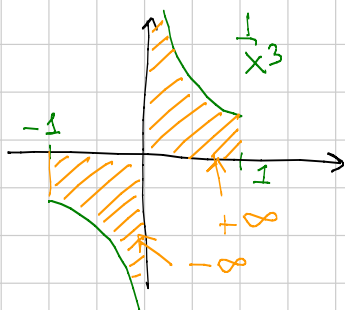
$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_{x=0}^{x=A} = \lim_{A \rightarrow +\infty} (-e^{-A} + 1) = 1$$

Esempio 7 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_{x=-1}^{x=1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

NOOOOOO !!!!!!!

Ho operato come se fosse un integrale
PROPRIO, invece è IMPROPRIO

$$= \underbrace{\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3} dx}_{\text{DIVERGE } A \rightarrow -\infty} + \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx}_{\text{DIVERGE } A \rightarrow +\infty} \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx \text{ è indeterminato}$$



Esempio 8 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan x]_{x=0}^{x=A} =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctan A = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{per simmetria o per } \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 \dots)$$

In generale non si sanno calcolare i valori esatti degli int. impr.

In questi casi si studia la convergenza,

integrali con integranda
a segno costante (positivo)

↗ CRITERIO CONFRONTO

→ CRITERIO CONFR. ASINT.

↗ casi standard

→ casi limite

↘ TRUCCO INT. PER PARTI

integrali con integranda
a segno variabile

→ CRITERIO ASSOLUTA INTEGRABILITÀ

Se l'integranda è a segno costante, l'integrale può solo

↗ convergere (ad un certo $l \in \mathbb{R}$)

↘ divergere a $+\infty$

CRITERIO DEL CONFRONTO

Siano $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$.

Supponiamo che $f(x) \leq g(x)$ per ogni x nella zona di integrazione E .

Allora

$$\int_E f(x) dx = +\infty \Rightarrow \int_E g(x) dx = +\infty$$

$$\int_E g(x) dx \text{ CONV.} \Rightarrow \int_E f(x) dx \text{ CONV.}$$

NB.

$$\int_E g(x) dx = +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

$$\int_E f(x) dx \text{ conv} \Rightarrow \text{BOH.}$$

— o — o —

CONFRONTO ASINTOTICO

Siano

$$\int_E f(x) dx$$

$$\int_E g(x) dx$$

due int. impropri MONOPROBLEMA. Supponiamo che $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ nella zona di integr. Sia x_0 il punto in cui c'è il problema (x_0 può essere uno degli estremi dell'intervallo, oppure $x_0 = \pm\infty$ in caso di zona di int. non limitata).

Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \quad \left[\begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{array} \text{ caso standard} \right]$$

Allora $\int f(x) dx$ e $\int g(x) dx$ con problema in x_0

hanno lo stesso tipo di comportamento (cioè uno conv $\Rightarrow$ conv. anche l'altro)

— o — o —

Esempio 1

$$\int_3^{+\infty} \frac{7x+9}{5x^2+2} dx$$

$$f(x) > 0$$

Può solo conv. o
div. a $+\infty$

Problema è a $+\infty$

Brutale : $\frac{7x+9}{5x^2+2} \sim \frac{7x}{5x^2} = \frac{7}{5x}$

↑
per x
grande

L'integrale dato si comporta come l'int. improprio di $\frac{1}{x}$ con problema a $+\infty$, dunque (TABELLINA) diverge.

RIGOROSO: confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{7x+9}{5x^2+2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2+9x}{5x^2+2} = \frac{7}{5} \neq 0 \neq +\infty$$

↑
PROBLEMA

⇒ stessa conclusione del brutale

Esempio 2

$$\int_0^4 \frac{dx}{\arctan x}$$

per $x \rightarrow 0$

$$f(x) = \frac{1}{\arctan x} \geq 0 \quad (>0)$$

problema in $x_0 = 0$

Brutale: $\arctan x \sim x \Rightarrow f(x) \sim \frac{1}{x} \Rightarrow$ l'int. DIVERGE

RIGOROSO: confr. asint. con $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctan x} = 1 \neq 0 \neq +\infty \Rightarrow \text{stesso comp.}$$

↑
PROBLEMA

Esempio 3

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + \sqrt{x}} dx = \int_0^{14} + \int_{14}^{+\infty}$$

SPEZZAMENTO

$f(x) > 0$ CONV. CONV.

$$\int_{14}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + \sqrt{x}}$$

$f(x) \sim \frac{1}{x^4}$ $\Rightarrow$ si comporta come $\int \frac{1}{x^4} dx$ con probl. a $+\infty$,
 ↑
 x grandi
 quindi converge

[Rigoroso per esercizio]

$$\int_0^{14} \frac{dx}{x^4 + \sqrt{x}}$$

$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\Rightarrow$ si comporta come $\int \frac{1}{\sqrt{x}}$
 ↑
 $x \sim 0$
 con prob. a 0
 quindi converge

⇒ l'integrale dato converge

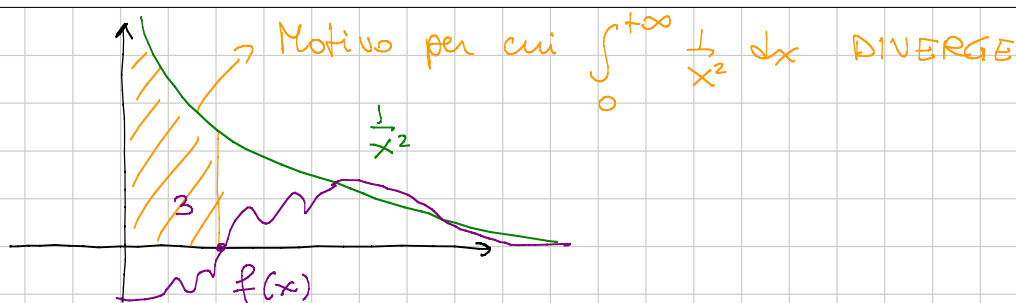
Esempio 4 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \underbrace{\int_0^7 \frac{dx}{x^2}}_{+\infty} + \underbrace{\int_7^{+\infty} \frac{dx}{x^2}}_{\text{CONV.}} = +\infty$

Esempio 5 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2-9}{\underbrace{x^4+7x^3+12}_{f(x)}} dx$

Brutale: $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$
 $\uparrow$
 x grandi

quindi $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ si comporta
 come $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ dunque DIVERGE
 NOOOOOOOO

Quindi $\int f(x)$ con
 problema a $+\infty$ si comporta
 come $\int \frac{1}{x^2}$ con problema a $+\infty$
 quindi converge.



N.B. $f(x)$ non è ≥ 0 su tutta la zona di integrazione,
 ma solo "vicino al problema".
 Questo basta per applicare i criteri.

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \underbrace{\int_0^{10} f(x) dx}_{\substack{\text{INT.} \\ \text{PROPRIO} \\ \rightarrow \text{NUMERO}}} + \underbrace{\int_{10}^{+\infty} f(x) dx}_{\substack{\text{INT. IMPROPRIO} \\ \text{con integranda} \geq 0}}$$

[allora per x vicini a x_0 si ha che $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 1$, quindi $f(x) \geq g(x)$ vicino a x_0 , quindi]

$\int g(x) dx$ con pb. in x_0 div. $\Rightarrow \int f(x) dx$ con pb. in x_0 div.

" " con. $\Rightarrow$ BOH.

Esempio 1

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \log x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 \log x} > 0$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2}$$

caso limite!!

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2 \log x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log x} = 0$$

[$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$ vicino al prob $\Rightarrow f(x) \leq g(x) \Rightarrow$]

$\int g(x) dx = \int \frac{1}{x^2} dx$ con pb. a $+\infty$ con. $\Rightarrow \int f(x) dx$ con.

Esempio 2

$$\int_3^{+\infty} \frac{\log x}{x^2} dx$$

$\log x$ in questo caso REHA CONTRO, nel senso che rende la funzione + grande $\Rightarrow$ ostacola la con.

Provare ① C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow$ BOH

② C.A. con $g(x) = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ BOH

Ora provo con $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^2} \cdot x\sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$$

[$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$ vicino al pb $\Rightarrow f(x) \leq g(x)$ vicino al pb $\Rightarrow$]

$\int g(x) dx = \int \frac{1}{x^{3/2}} dx$ con pb. a $+\infty$ con. $\Rightarrow$ int. dato con.

N.B. Al posto di $\frac{3}{2}$ posso usare un qualunque esponente $1 < \alpha < 2$.

ASSOLUTA INTEGRABILITÀ

Sia $f(x)$ una integranda a
segno variabile nella zona
di int. E .

Allora

$$\int_E |f(x)| dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_E f(x) dx \text{ conv.}$$

Questo ha integranda
 $\geq 0 \Rightarrow$ posso applicare
i criteri precedenti

$$\int_E |f(x)| dx = +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

Esempio 1 $\int_7^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$
 $f(x)$ a segno
variabile

Provo con l'assol. int.,
cioè studio

$$\int_7^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx$$

$$\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| = \frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2} \text{ con pb. a } +\infty \text{ conv. (tabellina)}$$

$\Downarrow \rightarrow$ Criterio confronto fra integrande
positive

$$\int \frac{|\sin x|}{x^2} dx \text{ con pb. a } +\infty \text{ conv.}$$

$\Downarrow \rightarrow$ Assol. int.

$$\int \frac{\sin x}{x^2} dx \text{ con pb. a } +\infty \text{ conv.}$$

$$\frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad \int_7^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ conv.} \xrightarrow{\text{confr.}} \int_7^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx \text{ conv.}$$

NOOO

Non si può usare il confronto se non si hanno segni ≥ 0

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\sqrt{x})}{x^2} dx = \int_0^1 \dots + \int_1^{+\infty} \dots dx \Rightarrow \text{CONV.}$

CONV. CONV.

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x\sqrt{x})}{x^2} dx$ conv. (sostanzialmente come esempio prec.)

$\int_0^1 \frac{\sin(x\sqrt{x})}{x^2} dx$ Se faccio l'assol. int. ^(come prima) mi ritrovo alla fine $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ che diverge $\Rightarrow$ BOH

$f(x) \geq 0$ per x vicini a 0

Brutale: $\frac{\sin(x\sqrt{x})}{x^2} \sim \frac{x\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ con pb. in 0 conv. $\Rightarrow$ l'int. dato converge

Rigoroso: confr. asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x\sqrt{x})}{x^2} \cdot \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x\sqrt{x})}{x\sqrt{x}} = 1$$

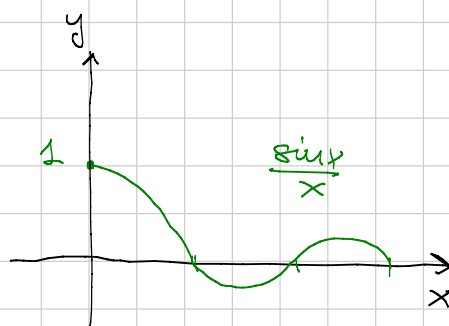
$\Rightarrow$ stesso comportamento

Esempio 3 $\int_0^8 \frac{\sin x}{x} dx = \text{Numero}$

Non ha nessun problema



Non è un integrale improprio ($f(x)$ è limitata)



ANALISI II CIV (NUCL)

ORA 39

20/11/2006

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

$\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{f(x)}$

Unico problema
è a $+\infty$

$f(x)$ è a segno variabile $\Rightarrow$ prova a mettere i valori assoluti

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$$

$\int \frac{1}{x} dx$ con pb. a $+\infty$ diverge $\Rightarrow$ boh!!!

1^a osservazione: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ conv.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \underbrace{\frac{1}{x}}_G \underbrace{\sin x}_F dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{\left[\frac{1}{x} (-\cos x) \right]}_{GF} \Big|_{x=1}^{x=A} - \int_1^A \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2} \right)}_G \underbrace{(-\cos x)}_F dx \right]$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{-\frac{\cos A}{A}}_0 + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx \right\} =$$

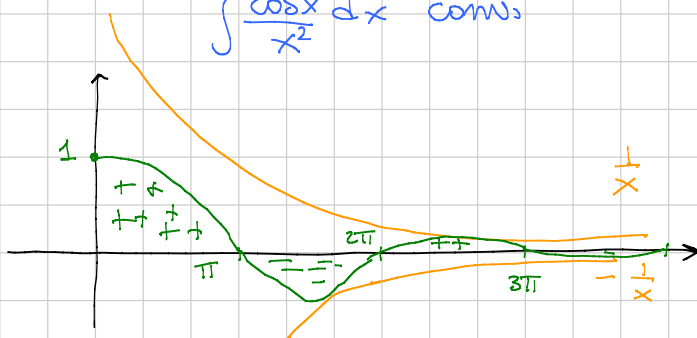
$$= \frac{\cos 1}{1} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx}_{\text{CONVERGE}} \in \mathbb{R}$$

CONFRONTO
 $\int \frac{1}{x^2} dx$ con pb. a $+\infty$ conv. $\Rightarrow \int \frac{|\cos x|}{x^2} dx$ con pb. a $+\infty$

$\Downarrow \leftarrow$ Assol. conv.

$$\int \frac{\cos x}{x^2} dx \text{ conv.}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ converge}$$



Si potrebbe dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$$

$$\text{Area } \oplus + \text{Area } \ominus = +\infty$$

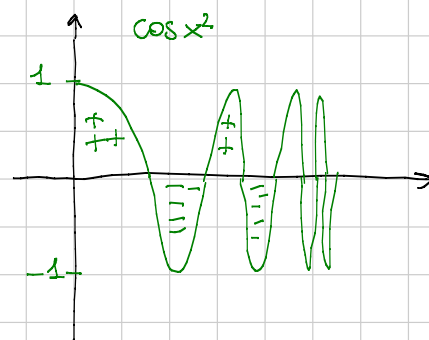
Facendo $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \dots$ le aree $\oplus$ e quelle $\ominus$ tendono a compensarsi

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$$

si potrebbe dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx = +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \underbrace{\frac{1}{2x}}_G \underbrace{2x \cos(x^2)}_F dx =$$



$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \left[\underbrace{\frac{1}{2x}}_G \sin(x^2) \right]_{x=1}^{x=A} - \int_1^A \underbrace{\left(-\frac{1}{2x^2}\right)}_g \sin x^2 dx \right\}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{\frac{\sin A^2}{2A}}_0 - \frac{\sin 1}{2} + \frac{1}{2} \int_1^A \frac{\sin x^2}{x^2} dx \right\}$$

$$= -\frac{\sin 1}{2} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^2} dx \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx \text{ conv.}$$

$$\int \frac{dx}{x^2} \text{ con pb. a } +\infty \text{ conv.} \Rightarrow \int \frac{|\sin x^2|}{x^2} dx \text{ con pb. a } +\infty \text{ conv.}$$

↓

$$\int \frac{\sin x^2}{x^2} dx \text{ con pb. a } +\infty \text{ conv.}$$

$$\text{Allo stesso modo } \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx \text{ conv.}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx = 2 \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$$

↑
FUNZIONE
PARI

— 0 — 0 —

$$\int_3^5 \frac{dx}{x-3} =$$

Con un cambio di variabili si sposta
il problema in 0

$$x-3 = y \quad dx = dy \quad \begin{array}{l} \text{Quando } x=3, y=0 \\ \text{" } x=5, y=2 \end{array}$$

$$= \int_0^2 \frac{dy}{y} \quad \text{diverge}$$

In generale $\int_a^{a+1} \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ si riconduce a $\int_0^1 \frac{dy}{y^\alpha}$
dunque converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

↑
problema in
 $x=1$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

↑
colpevole

↓
l'integrale
CONVERGE ($\alpha = \frac{1}{2}$)

Più rigorosamente, facciamo confronto asintotico con

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} \cdot \cancel{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\neq 0 \neq +\infty \Rightarrow$
stesso comp

$$\int_1^5 \frac{dx}{\log x}$$

↑
prob. in $x=1$

Pongo $y = x-1$

Quando $x=1$, ho che $y=0$
" $x=5$, " $y=4$

$$dy = dx$$

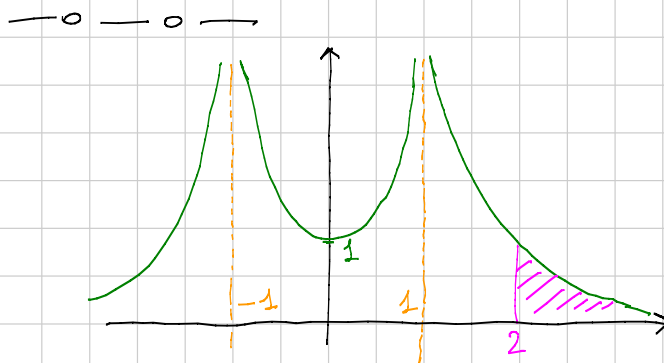
$$= \int_0^4 \frac{dy}{\log(1+y)} = +\infty$$

Brutale: $\log(1+y) \sim y$
 $\uparrow$
 Taylor

$$\frac{1}{\log(1+y)} \sim \frac{1}{y} \Rightarrow \text{l'integrale DIVERGE}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x^4-1|}}$$

Si spezza in 6 parti,
 uguali a 2 a 2



$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x^4-1|}}$$

converge

per x grandi

Brutale: $\frac{1}{\sqrt{|x^4-1|}} \sim \frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2}$

$\int \frac{1}{x^2} dx$ con pb.
 a $+\infty$ converge

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{|x^4-1|}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$$

Brutale: $\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)(x^2-1)}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)(x+1)(x-1)}}$
 $\uparrow$
 COLPEVOLE

Quindi l'integrale

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{|x^4-1|}} \text{ si comporta come } \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}, \text{ quindi conv.}$$

Anche $\int_0^1 \dots$ converge per lo stesso motivo.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \text{ converge}$$

ANALISI II CIV

ORA 40

INTEGRALI IMPROPRI IN PIÙ VARIABILI

Un integrale in 2 o + variabili può essere improprio

- perché la zona di integrazione non è limitata
- perché la funzione non è limitata
- ↳ per tutti e 2 i motivi

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x^2+y^2+1} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{B_R} \frac{1}{x^2+y^2+1} dx dy$$

↑ funzione senza problemi
↑ cerchio con centro in (0,0) e raggio R

insieme non limitato

In generale se $\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)| dx dy$ esiste fatto con i cerchi, allora

$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy$ viene lo stesso numero con qualunque tipo di figura io vado a fare il limite

$$\begin{aligned} \iint_{B_R} \frac{1}{x^2+y^2+1} dx dy &= \int_0^R dp \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{p^2+1} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{coord. polari} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ J \end{matrix} \\ &= 2\pi \int_0^R \frac{p}{p^2+1} dp \end{aligned}$$

Quindi

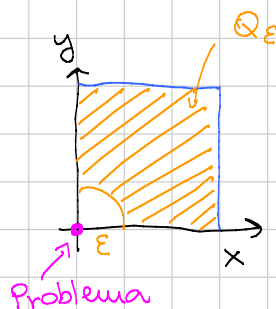
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{x^2+y^2+1} = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{p}{p^2+1} dp$$

Diverge perché si comporta come $\frac{1}{p}$

$$Q = [0, 1] \times [0, 1]$$

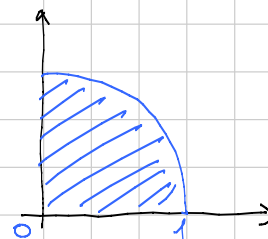
$$\iint_Q \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha} =$$

Funzione non
limitata vicino
a (0,0)



$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{Q_\epsilon} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

DEFINIZIONE



Oss. L'integrale dato converge $\Leftrightarrow$ converge l'integrale sul
quarto di cerchio

$$\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha} \stackrel{\text{POLARI}}{=} \int_0^1 dp \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1}{p^{2\alpha}} \cdot p = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dp}{p^{2\alpha-1}}$$

converge $\Leftrightarrow 2\alpha - 1 < 1$

$\Leftrightarrow 2\alpha < 2 \Leftrightarrow \alpha < 1$

$$\iiint_A \frac{x dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha} = \quad A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, x \geq 0\}$$

esterno della
sfera di raggio 1

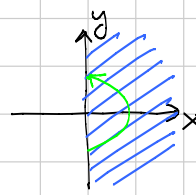
prendo
solo $x \geq 0$

In coord. sferiche l'insieme

A si descrive come:

$$\rho \geq 1, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$x \geq 0$



$$= \int_1^{+\infty} d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{\rho \cos \varphi \cos \theta}{\rho^{2\alpha}} \underbrace{\rho^2 \cos \varphi}_J =$$

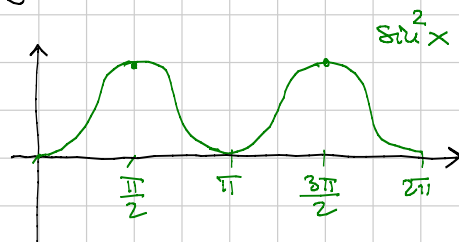
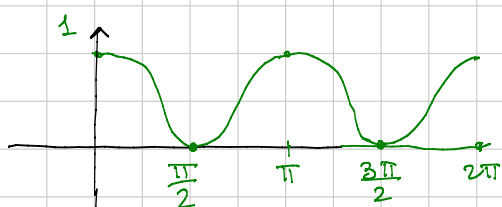
$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^{2\alpha-3}} d\rho \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta}_2 \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi}_{\frac{\pi}{2} \text{ (poi vediamo perché)}}$$

$$= \pi \int_1^{+\infty} \frac{dp}{p^{2\alpha-3}}$$

converge $\Leftrightarrow 2\alpha - 3 > 1$

$$\Leftrightarrow 2\alpha > 4 \Leftrightarrow \alpha > 2$$

N.B. Per gli $\alpha > 2$ si può calcolare



$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$$

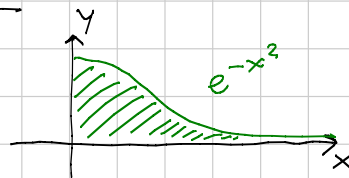
$I_1 = I_2$ per simmetria

$$I_1 + I_2 = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I_1 = I_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = I$$



Converge per mille motivi...

Quanto è il suo valore? N.B. Non si sa fare la primitiva di e^{-x^2} !!!

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, e^{-x^2-y^2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \, dy = 2I \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx \\ &= 4I^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy &\stackrel{\text{POLARI}}{=} \int_0^{+\infty} dp \int_0^{2\pi} d\theta e^{-p^2} \cdot p \\&= \int_0^{+\infty} p e^{-p^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \\&= \pi \int_0^{+\infty} 2p e^{-p^2} dp \\&= \pi \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-e^{-p^2} \right]_{p=0}^{p=A} \\&= \pi \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{-e^{-A^2}}_0 + 1 \right\} = \pi \\ \pi &= 4 I^2 \quad \Rightarrow \quad I^2 = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}\end{aligned}$$

ANALISI II CIV

ORA 41
MISSING

ORA 42

Titolo nota

05/12/2006

Esempio 1 $u' = u$ Una soluzione è $u(t) = e^t$ Un'altra soluzione è $u(t) = 2e^t$. Verifica: $u'(t) = 2e^t$ In generale $u(t) = ce^t$ è una soluzione qualunque sia il valore della costante $c \Rightarrow$ infinite soluzioni dipendenti da un parametro.

Si potrebbe dire che non ce ne sono altre.

Esempio 2 $u'' = -u$ Una soluzione è $u(t) = \sin t$ Un'altra è $u(t) = \cos t$ In generale $u(t) = a \sin t + b \cos t$ è una soluzione qualunque siano i valori di a e b $\Rightarrow$ infinite soluzioni dipendenti da 2 param.Esempio 3 $u' = -u^2$ Una soluzione è $u(t) = \frac{1}{t}$ Verifica $u'(t) = -\frac{1}{t^2} = -u^2(t)$ Una famiglia infinita di soluz. è $u(t) = \frac{1}{t+c}$ $\Rightarrow$ infinite soluz. dipendenti da un parametro.IN GENERALE: un'eq. diff. ha infinite soluzioni dipendenti da un numero di parametri uguale all'ORDINE dell'equazione.
— o — o —

PROBLEMA DI CAUCHY

Eq. diff. + condiz. iniziali in numero uguale all'ordine dell'eq.

Esempi

$$\begin{cases} u' = u + t & \leftarrow \text{Eq. diff. di ordine 1} \\ u(0) = 7 & \leftarrow 1 \text{ cond. iniziale (fissare il valore di } u \text{ per un certo valore di } t) \\ u(t_0) = u_0 & \leftarrow \begin{array}{l} \text{numeri fissati} \end{array} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(7) = 12 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} u'' = u^2 + t & \leftarrow \text{Eq. diff. di ordine 2} \\ u(0) = 5 \\ u'(0) = 6 \end{cases} \leftarrow \text{Due condizioni iniziali}$$

Per avere un problema di Cauchy devo assegnare i valori di u e di tutte le sue derivate fino alla $(n-1)$ -esima in uno stesso punto t_0

$$\begin{cases} u'' = u^2 + t \\ u(5) = 6 \\ u'(7) = 6 \end{cases}$$

No pb. di Cauchy
ho dato u e u'
per valori diversi
di t_0

$$\begin{cases} u'' = u^2 + t \\ u(0) = 5 \\ u(3) = 6 \end{cases}$$

No pb. di
Cauchy: dovrei
assegnare u e u'

$$\begin{cases} u'' = u^2 + t \\ u(5) = 7 \\ u'(5) = 6 \end{cases}$$

Sì pb. di
Cauchy

$$\begin{cases} u''' = u' + t \\ u(5) = 6 \\ u'(5) = 8 \\ u''(5) = 27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'' = u^2 + t \\ u(5) = 7 \\ u''(5) = 7 \end{cases}$$

↑ NO! Dovrebbe essere u'

Consideriamo un problema di Cauchy per un'eq. diff. di ordine n in forma normale

$$u^{(n)} = \Phi(u^{(n-1)}, \dots, u', u, t)$$

$$u(t_0) = u_0$$

$$u'(t_0) = u_1$$

$\vdots$

$$u^{(n-1)}(t_0) = u_n$$

TEO. ESISTENZA E
UNICITÀ.

- Se Φ è continua allora il problema ammette ALMENO una soluzione LOCALE, cioè definita almeno per valori di t vicini a t_0 .
- Se Φ è un po' meglio (diciamo differenziabile) allora la soluzione è UNICA.

EQUAZIONI 1° ORDINE A VARIABILI SEPARABILI

$$u' = f(t) g(u)$$

È possibile trovare la formula generale della soluzione in 3 fasi:

SEPARARE
INTEGRARE
RICAVARE

Esempio $u' = t^2 u^3$

SEPARARE : $\frac{du}{dt} = t^2 u^3$

Tutte le u a sinistra,
tutte le t a destra!

$$\frac{du}{u^3} = t^2 dt$$

INTEGRARE (a sinistra risp. a u , a destra risp. a t)

$$\int \frac{du}{u^3} = \int t^2 dt \Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{1}{u^2} = \frac{t^3}{3} + C$$

RICAVARE (u in funzione di t)

$$\frac{1}{2u^2} = -\frac{t^3}{3} + \boxed{C}$$

↑ è una costante, quindi chiamarla c o $-c$ è lo stesso

$$\frac{1}{2u^2} = \frac{-t^3 + \boxed{C}}{3} \text{ come sopra}$$

$$2u^2 = \frac{3}{c - t^3}$$

$$u^2 = \frac{3}{2(c - t^3)}$$

$$u = \pm \sqrt{\frac{3}{2(c - t^3)}}$$

Questa formula
fornisce le
infinita sol.
dell'eq.

Se avessi avuto il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = t^2 u^3 \\ \boxed{u(0) = 1} \end{cases} \rightarrow \text{Sulla base di questa si ricava il valore di } c$$

DETERMINARE c

$$u(0) = 1$$

$$u(0) = \sqrt{\frac{3}{2c}} = 1 \quad ; \quad \frac{3}{2c} = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

↑
scelgo segno +
perché $u(0) > 0$

$\Rightarrow$ la soluzione del pb. di Cauchy è

$$u(t) = \sqrt{\frac{3}{2\left(\frac{3}{2} - t^3\right)}} = \sqrt{\frac{3}{3 - 2t^3}}$$

CONTROLLARE! Il modo migliore per farlo è sostituire nell'eq. dopo aver derivato

$$u' = \dots$$

Per controllare la cond. iniz. basta sostituire $t=0$ $u(0) = \sqrt{1} = 1$ OK.

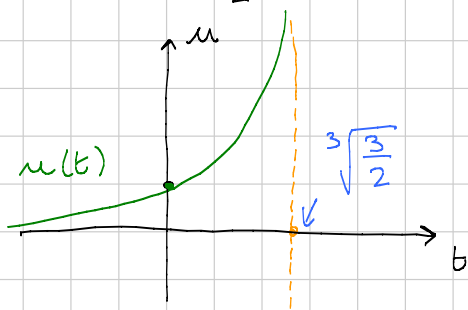
STUDIARE LA SOLUZIONE

$$u(t) = \sqrt{\frac{3}{3-2t^3}}$$

La soluzione esiste finché $3-2t^3 > 0 \Leftrightarrow 2t^3 < 3$

$$\Leftrightarrow t^3 < \frac{3}{2} \Leftrightarrow t < \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

La soluzione non è definita per ogni t , ma almeno per t vicini a $t=0$.



ANALISI II CIV

ORA 43

$$\begin{cases} u' = t u^4 \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

SEPARARE: $\frac{du}{dt} = t u^4$; $\frac{du}{u^4} = t dt$

INTEGRARE: $\int \frac{du}{u^4} = \int t dt$

$$-\frac{1}{3} \frac{1}{u^3} = \frac{t^2}{2} + C$$

RICAVARE

$$\frac{1}{3u^3} = -\frac{t^2}{2} + C = \frac{-t^2 + C}{2} ; 3u^3 = \frac{2}{C - t^2}$$

$$u^3 = \frac{2}{3(C - t^2)} = \frac{2}{C - 3t^2}$$

$$u(t) = \sqrt[3]{\frac{2}{C - 3t^2}}$$

SOLUZIONE GENERALE

DETERMINARE C

$$u(0) = 2$$

$$\sqrt[3]{\frac{2}{C}} = 2$$

$$\frac{2}{C} = 8 \Rightarrow C = \frac{1}{4}$$

Soluzione pb. di Cauchy

$$u(t) = \sqrt[3]{\frac{2}{\frac{1}{4} - 3t^2}} = \sqrt[3]{\frac{8}{1 - 12t^2}} = 2 \sqrt[3]{\frac{1}{1 - 12t^2}}$$

CONTROLLARE Fam la verifica! $u(0) = 2 \sqrt[3]{1} = 2$ Ok.

$$u'(t) = 2 (1 - 12t^2)^{-\frac{4}{3}} (-24t) \left(-\frac{1}{3}\right); u(t) = 2 (1 - 12t^2)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{48}{3} t (1 - 12t^2)^{-\frac{4}{3}} = 16 t (1 - 12t^2)^{-\frac{4}{3}}$$

↑
Questo DOVREBBE essere $t \cdot u^4$

Lo è perché $u^4 = 16 (1 - 12t^2)^{-\frac{4}{3}}$

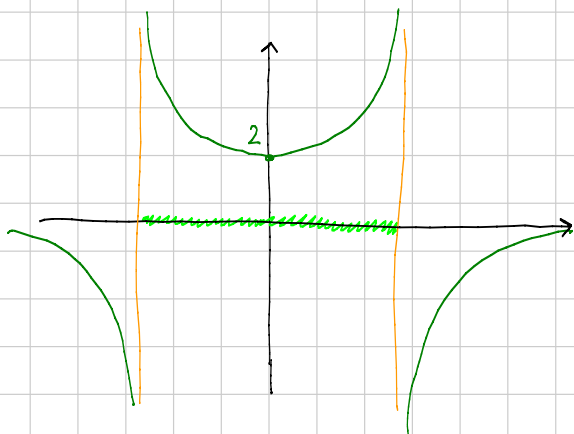
STUDIARE LA SOLUZIONE

Studio $u(t) = 2 \sqrt[3]{\frac{1}{1 - 12t^2}}$

Definita quando $1 - 12t^2 \neq 0$ $12t^2 \neq 1$

$$t^2 \neq \frac{1}{12}$$

$$t \neq \pm \frac{1}{\sqrt{12}} = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$$



Def. 1 Si dice intervallo massimale di esistenza il pezzo dell'insieme di definizione che contiene l'istante iniziale.

Nel nostro esempio l'int. max di esistenza è

$$\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

Def. 2 Si dice TEMPO DI VITA della soluzione (LIFE SPAN) l'estremo superiore dell'int. max. di esistenza.

Nel nostro esempio $T = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Def. 3 Si dice che la soluzione ha ESISTENZA GLOBALE nel futuro se $T = +\infty$, cioè se la soluzione esiste per ogni $t \geq t_0$.

Def. 4 Se il tempo di vita T è $< +\infty$, diciamo che si ha BLOW-UP (SCOPPIAMENTO) se

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = +\infty \quad \text{oppure} \quad -\infty$$

Diciamo che si ha BREAK-DOWN (ROTTURA) se non c'è blow-up, ma

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u'(t) = \pm \infty$$

↑
Derivata

Nell'esempio la soluzione aveva BLOW-UP per $t = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Esempio 3 $\begin{cases} u' = u^2 + 1 \\ u(0) = -1 \end{cases} \leftarrow \text{Eq. a variabili separabili}$

SEPARARE $\frac{du}{dt} = u^2 + 1 ; \frac{du}{u^2 + 1} = dt$

INTEGRARE $\int \frac{du}{u^2 + 1} = \int dt ; \arctan u = t + c$

RICAVARE $u = \tan(t + c)$ *Soluzione generale*

DETERMINARE C $u(0) = -1 \Leftrightarrow \tan c = -1 \Rightarrow c = -\frac{\pi}{4}$

$u(t) = \tan\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$ *Soluzione pb. Cauchy*

CONTROLLARE ---

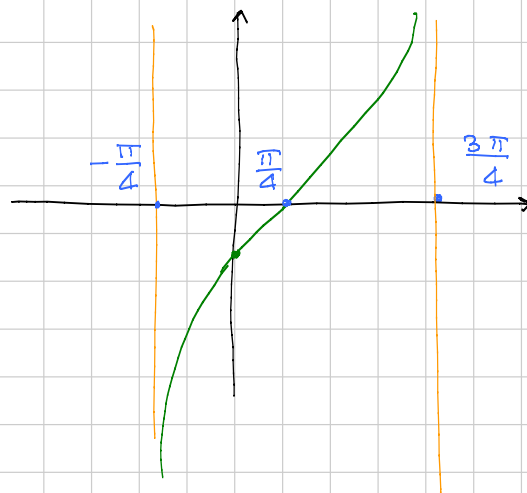
STUDIARE È definita quando $t - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Int. max. di esistenza:

$$\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

LIFE SPAN : $\frac{3\pi}{4}$

La soluzione ha blow-up
per $t = \frac{3\pi}{4}$



Esempio 4 $\begin{cases} u' = \frac{t}{u} \\ u(0) = 1 \end{cases}$ **SEPARARE** $\frac{du}{dt} = \frac{t}{u}$

$u du = t dt$

INTEGRARE $\int u du = \int t dt \quad \frac{u^2}{2} = \frac{t^2}{2} + c$

RICAVARE

$$u^2 = t^2 + c$$

$$u = \pm \sqrt{t^2 + c}$$

DETERMINARE C

$$u(0) = 1$$

$$1 = \sqrt{c} \Rightarrow c = 1$$

Sol. pb. di Cauchy : $u(t) = \sqrt{t^2 + 1}$

$\Rightarrow$ Nessun problema $\Rightarrow$ esistenza globale per tempi
positivi e negativi

Esempio 5

$$\begin{cases} u' = -\frac{1}{u} \\ u(0) = 3 \end{cases}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u}$$

$$u du = -dt$$

integro: $\frac{u^2}{2} = -t + c \Rightarrow u^2 = -2t + c$

$$u(t) = \pm \sqrt{c - 2t}$$

Ricavo c: $u(0) = 3$

$$\sqrt{c} = 3 \Rightarrow c = 9$$

Solus. pb. di Cauchy: $u(t) = \sqrt{9 - 2t}$

Definita quando $9 - 2t \geq 0 \Rightarrow 2t \leq 9 \Rightarrow t \leq \frac{9}{2}$

Int. max. di esistenza: $(-\infty, \frac{9}{2}]$

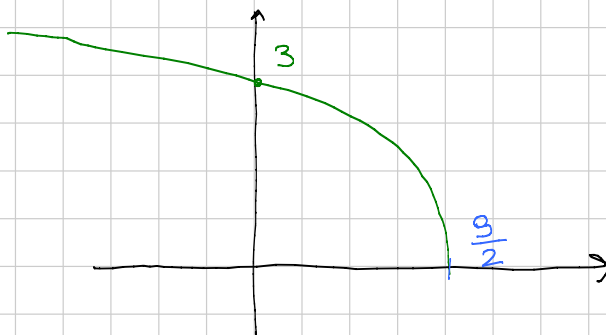
$\uparrow$ Tempo di vita

Quando $t \rightarrow \frac{9}{2}^-$

abbiamo che $u(t) \rightarrow 0$
(NO BLOW-UP)

ma $u'(t) \rightarrow -\infty$

$\Rightarrow$ BREAK-DOWN



ANALISI II CIN (NUCL)

ORA 44

06/12/2006

Esempio 1 $\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 1 \end{cases} \leftarrow \text{Eq. diff. 1° ordine AUTONOMA a variabili separabili}$

1. SEPARARE $\frac{du}{dt} = u^2 \quad \frac{du}{u^2} = dt$

2. INTEGRARE $\int \frac{du}{u^2} = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{u} = t + c$

3. RICAVARE $\frac{1}{u} = -t + c \Rightarrow u(t) = \frac{1}{c-t}$
SOLUZ. GENERALE

4. DET. C $\begin{matrix} u(0) = 1 \\ \text{"} \\ \frac{1}{c} \end{matrix} \Rightarrow c = 1$

Soluz. pb. di Cauchy: $u(t) = \frac{1}{1-t}$

5 CONTROLLARE

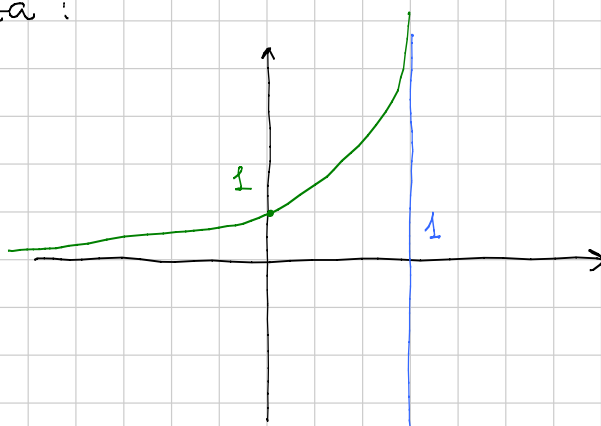
6 STUDIARE la soluz: definita per $t \neq 1$

$\Rightarrow$ int. max. di esistenza:

$(-\infty, 1)$

Tempo di vita: $T=1$

Si ha blow-up per $T=1$



Esempio 2 $\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = \alpha \end{cases} \leftarrow \text{parametro}$

Soluz. generale $u(t) = \frac{1}{c-t}$

DETERMINARE c (in funzione di α)

$$\frac{1}{c} = u(0) = \alpha \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{\alpha} \quad \left. \vphantom{\frac{1}{c} = u(0) = \alpha} \right\} \begin{array}{l} \text{vale solo} \\ \text{se } \alpha \neq 0 \end{array}$$

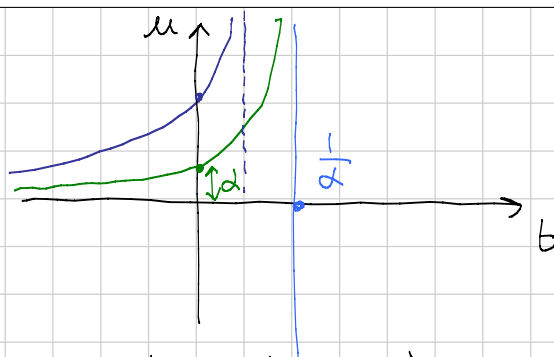
$$u(t) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - t} = \frac{\alpha}{1 - \alpha t} \quad \left. \vphantom{u(t) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - t}} \right\} \begin{array}{l} \text{ha senso e vale} \\ \text{anche per } \alpha = 0 \end{array}$$

STUDIAMO IN FUNZIONE DI α : problemi per $t = \frac{1}{\alpha}$

* Se $\alpha > 0$, $\frac{1}{\alpha} > 0 \Rightarrow$ interv. max di esistenza è $(-\infty, \frac{1}{\alpha})$

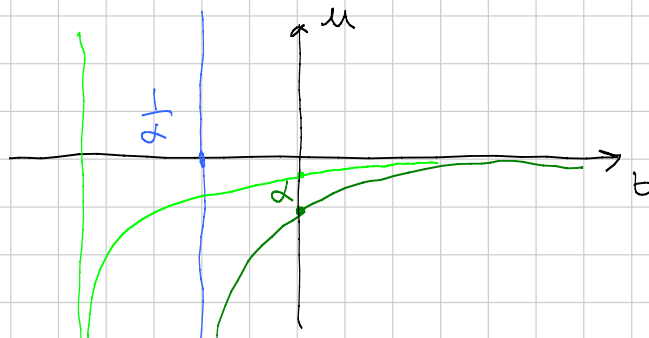
Si ha BLOW-UP per $t = \frac{1}{\alpha}$

Più si parte in alto, più il tempo di vita è breve



* Se $\alpha < 0$, $\frac{1}{\alpha} < 0 \Rightarrow$ interv. max di esistenza è $(\frac{1}{\alpha}, +\infty)$

$\Rightarrow$ ho esistenza globale per tempi positivi



Esempio 3 $\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 0 \end{cases} \dots \text{Soluz. gen. } u(t) = \frac{1}{c-t}$

Determino c $\frac{1}{c} = u(0) = 0 \Rightarrow c = ?$

La soluzione ci DEVE essere per il teo. di esistenza e unicità.

In questo caso è la soluzione costante $u(t) \equiv 0$
(è anche l'UNICA per teo. unicità)

Int. max. di esistenza: $\mathbb{R}$

Giustificazione del metodo

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad u'(t) = u^2(t) \Rightarrow \frac{u'(t)}{u^2(t)} = 1$$

Integro a destra e sinistra rispetto a t

$$\int_0^T \frac{u'(t)}{u^2(t)} dt = \int_0^T 1 dt$$

$$\left[\frac{1}{u} \right]_0^T = T$$

$$\int_0^T \frac{u'(t)}{u^2(t)} dt =$$

$$= \int_1^{u(T)} \frac{dy}{y^2}$$

$$= \left[-\frac{1}{y} \right]_{y=1}^{y=u(T)}$$

Pongo $y = u(t)$ $\frac{dy}{dt} = u'(t)$

Quando $t=0$, ho $dy = u'(t) dt$
che $y = u(0) = 1$

Quando $t=T$, ho che $y = u(T)$

$$= -\frac{1}{u(T)} + 1$$

$\uparrow$ $y = u(T)$ $\uparrow$ $y = 1$

Uguagliando abbiamo che

$$-\frac{1}{u(\tau)} + 1 = T \Rightarrow -\frac{1}{u(\tau)} = T - 1 \Rightarrow \text{si ricava } u(\tau)$$

N.B. Se $u(0) \neq 0$, allora "ragionevolmente" $u(t) \neq 0$ per valori di t vicini a zero, quindi ha senso dividere per $u^2(t)$

Se $u(0) = 0$, non ha senso nulla, ma in tal caso la soluzione è costante.

Esempio 4 $\begin{cases} u' = u \cdot \sin t \\ u(0) = 1 \end{cases}$ $\leftarrow$ var. separabili LINEARE

SEP. $\frac{du}{dt} = u \cdot \sin t \Rightarrow \frac{du}{u} = \sin t \cdot dt$

INT. $\int \frac{du}{u} = \int \sin t \, dt \Rightarrow \log |u| = -\cos t + C$

RIC. $|u(t)| = e^{-\cos t + C}$

$u(t) = \left(\pm \right) e^{-\cos t + C}$

$\uparrow$ La scelta del segno dipende dal dato iniziale

Nel nostro caso $u(t) = e^{-\cos t + C}$

$= e^{-\cos t} \cdot e^C$

$= k e^{-\cos t}$

FORMULA +
SEMPLICE PER
SOLUZ. GENERALE

Mettere il k davanti permette di considerare in un colpo solo sia le soluzioni ottenute prendendo il $+$, sia le soluz. ottenute con il $-$

Esempio 5
$$\begin{cases} u' = u \log u \\ u(0) = \alpha \end{cases} \leftarrow \text{per forza } \alpha > 0 \text{ perché abbia senso } \log u$$

Oss.: per $\alpha = 1$ la soluzione è la costante $u(t) \equiv 1$.

SEP.
$$\frac{du}{dt} = u \log u \Rightarrow \frac{du}{u \log u} = 1 dt$$

INT.
$$\int \frac{du}{u \log u} = \int 1 dt \Rightarrow \log |\log u| = t + c$$

$$|\log u| = e^{t+c} = e^t \cdot e^c = k e^t$$

$$\log u = k e^t \Rightarrow$$

$$u(t) = e^{k e^t} \quad \text{SOLUZ. GENERALE}$$

DETERMINO k

$$u(0) = \alpha$$

$$u(0) = e^{k e^0} = e^k$$

$$e^k = \alpha \Rightarrow k = \log \alpha$$

Soluz. pb. di Cauchy

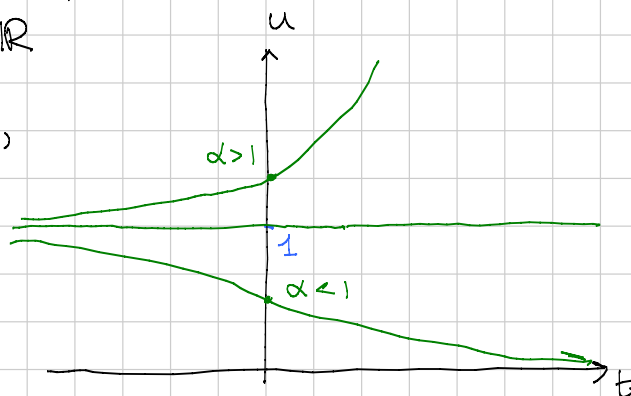
$$u(t) = e^{\log \alpha \cdot e^t}$$

Come è fatta $u(t)$ dipende dal segno di $\log \alpha$

* se $\log \alpha > 0$, cioè se $\alpha > 1$, allora $u(t)$ è crescente e definita per ogni $t \in \mathbb{R}$

* se $\log \alpha = 0$, cioè se $\alpha = 1$, allora $u(t) \equiv 1$

* se $\log \alpha < 0$, cioè se $0 < \alpha < 1$, allora $u(t)$ è decrescente



ANALISI II CIV (NUCL.)

ORA 45

EQUAZIONI LINEARI 1° ORDINE (coeff. variabili)

$$u' + a(t)u = b(t)$$

FATTORE INTEGRANTE

Sia $A(t)$ una primitiva di $a(t)$

$$A'(t) = a(t)$$

Moltiplico a destra e sx per $e^{A(t)}$ Fattore integrante

$$u' e^{A(t)} + a(t) e^{A(t)} u = b(t) e^{A(t)}$$

$$(u e^{A(t)})' = b(t) e^{A(t)}$$

Ora integro a destra e sinistra

$$u(t) e^{A(t)} = \int b(t) e^{A(t)} dt + c$$

Moltiplico per $e^{-A(t)}$ e ricavo che

$$u(t) = e^{-A(t)} \left\{ c + \int b(t) e^{A(t)} dt \right\}$$

SOLUZIONE
GEN. EQ.
LINEARE
1° ORDINE

Oss. Quindi le lineari del 1° ordine si sanno risolvere a patto di

- ① Saper fare una primitiva di $a(t)$
- ② Saper fare una primitiva di $b(t) e^{A(t)}$

Oss. 2 La soluzione di un'eq. lineare esiste sempre finché può (cioè fino quando i coefficienti $a(t)$ e $b(t)$ sono definiti).
In particolare l'int. max. di esistenza non dipende dal dato iniziale, ma solo dai coeff.

Esempio 1 $u' = u + t$ ← Non è a variabili separabili

$$u' - u = t$$

$a(t) = -1$ $b(t) = t$

$A(t) = -t$ Fattore integrante: e^{-t}

$$u'e^{-t} - ue^{-t} = te^{-t}$$

$$(ue^{-t})' = te^{-t} \quad \text{Integro}$$

$$ue^{-t} = \int te^{-t} dt = t(-e^{-t}) - \int 1 \cdot (-e^{-t}) dt + c$$

$$= -te^{-t} + \int e^{-t} dt + c$$

$$= -te^{-t} - e^{-t} + c$$

Quindi $ue^{-t} = -te^{-t} - e^{-t} + c$

Ora moltiplico tutto per e^t

$$u(t) = -t - 1 + ce^t$$

SOLUZ. GENERALE

Esistenza globale per $t > 0$ e $t < 0$, come si poteva prevedere dai coeff.

Esempio 2 $\begin{cases} u' + \frac{u}{t} = t^2 + 1 \\ u(1) = \alpha \end{cases}$

$$a(t) = \frac{1}{t}, \quad b(t) = t^2 + 1$$

↑
per $t=0$ l'eq.
non ha senso

Int. max. esistenza: $(0, +\infty)$

$A(t) = \log t$ ← viene l-1 perché già sappiamo che ci interessano solo i $t > 0$.

Fattore integrante: $e^{A(t)} = e^{\log t} = t$

Molt. per t : $tu' + u = t^3 + t$

$$(tu)' = t^3 + t$$

$$tu(t) = \int (t^3 + t) dt = \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + C$$

$$u(t) = \frac{t^3}{4} + \frac{t}{2} + \frac{C}{t}$$

Noto α , posso ricavare C . Nota bene: se $C \neq 0$, la soluzione ha blow-up per $t \rightarrow 0$

Se $C=0$ (e questo accade per un preciso valore di α) allora non c'è BLOW-UP per $t \rightarrow 0$. Cosa accade per $t \rightarrow 0$?

Esempio 3 $\begin{cases} u' = u - \arctan t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

$$u' - u = -\arctan t \quad a(t) = -1 \quad b(t) = \arctan t$$

Fatt. integr.: $e^{A(t)} = e^{-t}$

$$u'e^{-t} - ue^{-t} = -\arctan t \cdot e^{-t}$$

$$(ue^{-t})' = -\arctan t \cdot e^{-t}$$

$$ue^{-t} = -\int e^{-t} \cdot \arctan t dt + C$$

$$u(t) = e^t \left\{ C - \int e^{-t} \cdot \arctan t dt \right\} \quad \text{FORMULA GENERALE}$$

Determiniamo C

$$u(0) = \alpha$$

ANALISI II CIV

Titolo nota

NUCL

ORA 46

12/12/2006

Eq. Diff. LINEARI di qualunque ordine a coeff. costanti

$$a_m u^{(m)} + a_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = f(t)$$

$a_0, a_1, \dots, a_m$ sono NUMERI, detti coefficienti

L'eq. si dice OMOGENEA $\Leftrightarrow f(t) = 0$

CASO OMOGENEO

1^a osservazione generale: l'interv. max di esistenza della soluzione è lo stesso di $f(t)$, quindi nel caso omogeneo è tutto $\mathbb{R}$

Teorema L'insieme delle soluzioni di un'eq. diff. LINEARE OMOGENEA di ordine n (anche a coeff. non costanti) è uno SPAZIO VETTORIALE di dimensione n .
Fissata una BASE $u_1(t), \dots, u_n(t)$ di questo spazio, tutti gli u si scrivono nella forma

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_n u_n(t)$$

Operativamente: se riesco a determinare UNA base, conosco la soluzione generale, cioè riesco a descrivere l'insieme delle infinite soluzioni.

Nel caso di equazioni a coeff. costanti, esiste una procedura che permette di determinare una base

"Esiste" a patto di saper trovare le radici di un polinomio di grado n .

CASO PARTICOLARE $n=2$ Ho un'eq. del tipo

$$a u'' + b u' + c u = 0$$

Considero il polinomio
e ne calcolo le radici

$$a x^2 + b x + c$$

1ª possibilità 2 radici reali distinte λ, μ ($\Delta > 0$). Una base è

$$e^{\lambda t}, e^{\mu t}$$

Dunque la soluz. generale è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}$$

2ª possibilità $\Delta = 0 \Rightarrow$ una radice reale λ di mult. = 2. Una base è

$$e^{\lambda t}$$

$t e^{\lambda t}$ Nota bene $t e^{\lambda t}$ non è
multiplo di $e^{\lambda t}$ per una
costante, quindi
sono lin.
indip.

La soluz. gen. è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

3ª possibilità $\Delta < 0 \Rightarrow$ 2 radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Una base è

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

$$e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

La soluz. gen. è

$$u(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Perché funziona? Risposta furbetta: nei vari casi basta sostituire gli el. della base nell'eq. e vedere che la soddisfanno !!!

Risposta un po' più motivata: cerco delle soluzioni dell'eq. che siano del tipo $u(t) = e^{\lambda t}$

$$u(t) = e^{\lambda t} \quad u'(t) = \lambda e^{\lambda t} \quad u''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Se sostituisco nell'eq. $au'' + bu' + cu = 0$ ottengo

$$e^{\lambda t} (a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

$\uparrow$
 $\neq 0$

$\downarrow$ questo fa 0 $\Leftrightarrow \lambda$ è una radice del polinomio

- se ci sono 2 radici reali ho finito perché ho 2 sol. lin. indep.

- se c'è una radice reale di mult = 2, ho trovato 1 soluz. Mettendo "t davanti" e sostituendo si vede che se u è una sol. si ottiene un'altra

- se le 2 radici sono $\alpha \pm i\beta$, verrebbe da dire che una base è

$$e^{(\alpha+i\beta)t} \quad e^{(\alpha-i\beta)t}$$

ma

$$\begin{aligned}
 e^{(\alpha+i\beta)t} &= e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} \\
 &= e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))
 \end{aligned}$$

e questo rende plausibile che una base sia

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

EQ. DI ORDINE n

$$a_n u^{(n)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = 0$$

Considero il polinomio

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Questo sui complessi ha n radici (contate con molteplicità)

- ogni radice $\lambda \in \mathbb{R}$ di molt. 1 produce $e^{\lambda t}$
- ogni radice $\lambda \in \mathbb{R}$ di molt. k produce : $\underbrace{e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}}_{k \text{ elem. della base}}$
- Ogni coppia $\alpha \pm i\beta$ di radici
conjugate di molt. 1 produce $e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t)$
- ogni coppia $\alpha \pm i\beta \dots$ di molt. k produce $2k$ elem. della base
 $e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t), \dots, t^{k-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t), t^{k-1} e^{\alpha t} \sin(\beta t).$

MAT I TLC

ORA 47

Esempio 1 $u'' + 5u' + 6u = 0$

Polinomio: $x^2 + 5x + 6 = 0$ $(x+2)(x+3) = 0$

Radici: $\lambda = -2, \lambda = -3$ Base: e^{-2t}, e^{-3t}

Solus. generale

$$u(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

Esempio 2 $u'' + 4u' + 4u = 0$

Polinomio: $x^2 + 4x + 4 = 0$ $(x+2)^2 = 0$

Radici: $\lambda = -2$ di mult. = 2 Base: e^{-2t}, te^{-2t}

Solus. generale:

$$u(t) = a e^{-2t} + b t e^{-2t}$$

Esempio 3 $u'' + 4u' + 13u = 0$

Polinomio: $x^2 + 4x + 13 = 0$

Radici: $\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2}$

$= -2 \pm 3i$

Base: $e^{-2t} \cos(3t), e^{-2t} \sin(3t)$

Solus. generale:

$$u(t) = a e^{-2t} \cos(3t) + b e^{-2t} \sin(3t)$$

Esempio 4 $u'' - 4u = 0$ Polinomio: $x^2 - 4 = 0$

Radici: $x = \pm 2$ Base: e^{2t}, e^{-2t}

Soluz. gen. : $u(t) = a e^{2t} + b e^{-2t}$

Esempio 5 $u'' - 4u' = 0$ Polinomio : $x^2 - 4x = 0$
 $x(x-4) = 0$

Radici : $x = 0, x = 4$ Base : $e^{0t} = 1, e^{4t}$

Soluz. generale : $u(t) = a + b e^{4t}$

Esempio 6 $u'' + 4u = 0$ Polinomio : $x^2 + 4 = 0$

Radici : $x^2 = -4$ $x = \pm 2i$ (del tipo $\alpha \pm i\beta$ con $\alpha = 0$ e $\beta = 2$)

Base : $e^{0t} \cos(2t)$ $e^{0t} \sin(2t)$, cioè $\cos(2t), \sin(2t)$

Soluz. generale $u(t) = a \cos(2t) + b \sin(2t)$

Esempio 7 $u^{IV} + 2u'' + u = 0$ Polinomio : $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$
 $(x^2 + 1)^2 = 0$

$$(x^2 + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm i$$

Quindi le radici sono $\pm i$, entrambe di mult. = 2

($\alpha = 0, \beta = 1$)

Soluz. generale : $u(t) = a \cos t + b \sin t + c t \cos t + d t \sin t$

— o — o — o —

EQUAZIONI NON OMOGENEE

Teorema La soluzione generale di un'eq. NON omogenea è della forma

$$u(t) = \underbrace{c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t)}_{\text{SOLUZIONE GENERALE EQ. OMOGENEA}} + \underbrace{\bar{u}(t)}_{\text{SOLUZIONE QUALUNQUE DELL'EQ. NON OMOGENEA}}$$

Operativamente : se conosco una soluzione QUALUNQUE $\bar{u}(t)$,
 le conosco tutte.

Fatto base Se $v_1(t)$ e $v_2(t)$ sono 2 soluz. dell'eq. non omogenea, allora $v_1 - v_2 = w$ è una soluzione dell'omogenea.

Nel caso di eq. del 2° ordine :

$$\left. \begin{aligned} a v_1'' + b v_1' + c v_1 &= f(t) \\ a v_2'' + b v_2' + c v_2 &= f(t) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} v_1 \text{ e } v_2 \text{ soluz. della} \\ \text{non omog.} \end{array}$$

Sottraggo e ottengo

$$a(v_1'' - v_2'') + b(v_1' - v_2') + c(v_1 - v_2) = 0$$

$$a w'' + b w' + c w = 0 \Rightarrow w \text{ soluz. dell'OMOG.}$$

Dal fatto base segue il teorema. Siano infatti

$\bar{u}(t)$ una soluz. qualunque della non omog.
 $u(t)$ un'altra soluz.

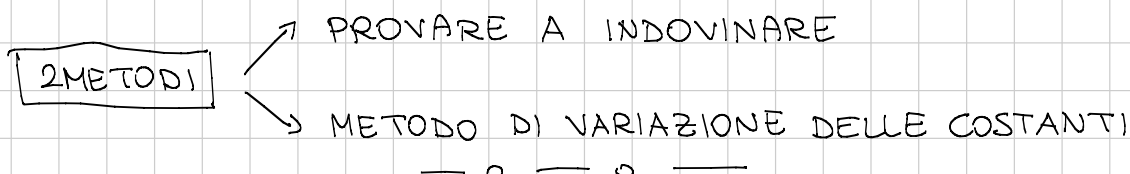
Allora

$$u(t) = \underbrace{[u(t) - \bar{u}(t)]}_{\text{SOLUZ. dell'OMOG.}} + \bar{u}(t)$$

quindi della forma
 $c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t)$

Bisognerebbe anche dim. che aggiungendo a $\bar{u}(t)$ una soluz. dell'omogenea si ottiene sempre un'altra sol. della non omog., ma questo si fa allo stesso modo (esercizio)

COME TROVARE UNA SOLUZ. QUALUNQUE DELL'EQ. NON OMOGENEA ?



Esempio 1 $u'' + 5u' + 6u = e^t$

Devo trovare una soluzione qualunque. È ragionevole cercare una soluzione del tipo

$$u(t) = \lambda e^t$$

Sostituisco $u'(t) = \lambda e^t$, $u''(t) = \lambda e^t$

$$u'' + 5u' + 6u = e^t$$

$$\lambda e^t + 5\lambda e^t + 6\lambda e^t = e^t \quad 12\lambda e^t = e^t \Rightarrow \lambda = \frac{1}{12}$$

Una soluz. è $\bar{u}(t) = \frac{1}{12} e^t$

Sol. gen.: $u(t) = \frac{1}{12} e^t + \underbrace{ae^{-2t} + be^{-3t}}_{\substack{\text{SOLUZ. GEN. EQ.} \\ \text{OMOGENEA} \\ u'' + 5u' + 6u = 0}}$

Esempio 2 $u'' + 5u' + 6u = e^{2t}$

Cerco una soluz. del tipo $u(t) = \lambda e^{2t}$

$u'(t) = 2\lambda e^{2t}$ $u''(t) = 4\lambda e^{2t}$ Sostituisco

$$\underbrace{4\lambda e^{2t}}_{u''} + \underbrace{10\lambda e^{2t}}_{5u'} + \underbrace{6\lambda e^{2t}}_{6u} = e^{2t}$$

$$20\lambda e^{2t} = e^{2t} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow \text{sol. gen.: } u(t) = \frac{1}{20} e^{2t} + a e^{-2t} + b e^{-3t}$$

Esempio 3 $u'' + 5u' + 6u = e^{-2t}$ Tentativo: $u(t) = \lambda e^{-2t}$

$$u'(t) = -2\lambda e^{-2t}$$

$$u''(t) = 4\lambda e^{-2t}$$

Sostituisco: $4\lambda e^{-2t} - 10\lambda e^{-2t} + 6\lambda e^{-2t} = e^{-2t}$

$\underbrace{\quad}_{u''} \quad \underbrace{\quad}_{+5u'} \quad \underbrace{\quad}_{+6u}$

$$0 = e^{-2t} \quad !!!!!$$

Doveva venire 0 perché e^{-2t} è sol. dell'eq. omog., cioè sostituito in $u'' + 5u' + 6u$ dà per forza 0.

ANALISI II CIV

ORA 48

Cont. esempio 3: $u'' + 5u' + 6u = e^{-2t}$
 Questa è soluz. dell'omog.

Si può cercare una soluz. particolare del tipo $u(t) = \lambda t e^{-2t}$

$$u'(t) = \lambda e^{-2t} - 2\lambda t e^{-2t}$$

$$u''(t) = -2\lambda e^{-2t} - 2\lambda e^{-2t} + 4\lambda t e^{-2t}$$

$$\underbrace{-4\lambda e^{-2t} + 4\lambda t e^{-2t}}_{u''} + \underbrace{+5\lambda e^{-2t} - 10\lambda t e^{-2t}}_{+5u'} + \underbrace{+6\lambda t e^{-2t}}_{+6u} = e^{-2t}$$

Le parti con il t se ne DEVONO ANDARE

Resta $\lambda e^{-2t} = e^{-2t} \Rightarrow \lambda = 1$

Soluz. generale: $u(t) = t e^{-2t} + a e^{-2t} + b e^{-3t}$

In generale: se $f(t) = e^{\alpha t}$ il tentativo da fare è

$$u(t) = \lambda e^{\alpha t}$$

questo funziona sempre tranne quando $e^{\alpha t}$ è grā sol. dell'omog.

In tal caso si prova con

$$u(t) = \lambda t e^{\alpha t}$$

Questo ancora non funziona nel caso in cui $t e^{\alpha t}$ è sol. dell'omog., ma allora si prova con

$$u(t) = \lambda t^2 e^{\alpha t} \text{ e così via e prima o poi riesce.}$$

Semi-analogamente se $f(t) = t e^{\alpha t}$ o più in generale

$f(t) = p(t) e^{\alpha t}$, si cerca una soluzione del tipo

$u(t) = q(t) e^{\alpha t}$, dove q è un pol. dello stesso grado di p a coeff. incogniti

Esempio 4 $u'' + 5u' + 6u = t^2 + 3$

Il tentativo da fare è un pol. dello stesso grado

$$u(t) = at^2 + bt + c \quad \leftarrow \text{sempre polinomio completo}$$

$$u'(t) = 2at + b \quad u''(t) = 2a \quad \text{Sostituisco}$$

$$\underbrace{2a}_{u''} + \underbrace{10at + 5b}_{+5u'} + \underbrace{6at^2 + 6bt + 6c}_{+6u} = t^2 + 3$$

$$\begin{cases} 6a = 1 & \text{coeff. } t^2 \\ 10a + 6b = 0 & \text{coeff. } t \\ 2a + 5b + 6c = 3 & \text{termine NOTO} \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{6}$$

$$6b = -10a = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow b = -\frac{5}{18}$$

3^a eq $\leadsto$ ricavo c .

Provare con un polinomio dello stesso grado funziona sempre, TRANNE quando ci sono polinomi tra le soluz. dell'omogenea.

Esempio 5 $u''' + u'' = t^2$

$$\text{Eq. omogenea : } u''' + u'' = 0 \quad \text{Polinomio : } x^3 + x^2 = 0$$

$$x^2(x+1) = 0$$

Radici : $\nearrow x=0 \rightarrow \text{mult. } 2 \Rightarrow \text{produce } 1, t$

$\searrow x=-1 \rightarrow \text{mult. } 1 \Rightarrow \text{produce } e^{-t}$

Soluz. gen. eq. omogenea: $u(t) = a + bt + ce^{-t}$

Ora serve una soluz. qualunque della non omogenea.

Verrebbe da provare $u(t) = at^2 + \underline{bt + c}$. Questo fallisce
SOL. OMOG.

Metto una t

$$u(t) = t(at^2 + bt + c) = at^3 + bt^2 + \underline{ct}$$

SOL. OMOG.

Metto t^2 :

$$u(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$$

$$u'(t) = 4at^3 + 3bt^2 + 2ct, \quad u''(t) = 12at^2 + 6bt + 2c$$

$$u'''(t) = 24at + 6b$$

$$\underbrace{24at + 6b}_{u'''} + \underbrace{12at^2 + 6bt + 2c}_{+ u''} = t^2$$

$$\begin{cases} 12a = 1 \\ 24a + 6b = 0 \\ 6b + 2c = 0 \end{cases} \quad \text{si risolve}$$

[N.B.] Provando con il generico pol. di grado 4

$$u(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$$

Si riescono a determinare a, b, c , ma non d ed e .
CI MANCHEREBBE !!! Infatti i coeff. di d ed e sono liberi, che si possono fissare a piacere.

Esempio 6 $u'' + 5u' + 6u = \cos(2t)$

Tentativo: $u(t) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)$

$$u'(t) = -2\lambda \sin(2t) + 2\mu \cos(2t)$$

$$u''(t) = -4\lambda \cos(2t) - 4\mu \sin(2t)$$

Sostituisco:

$$\underbrace{-4\lambda \cos(\cdot) - 4\mu \sin(\cdot)}_{u''} + \underbrace{-10\lambda \sin + 10\mu \cos}_{+5u'} + \underbrace{6\lambda \cos + 6\mu \sin}_{+6u} = \cos$$

$$\begin{cases} -4\lambda + 10\mu + 6\lambda = 1 & \text{coeff. } \cos(2t) \\ -4\mu - 10\lambda + 6\mu = 0 & \text{coeff. } \sin(2t) \end{cases} \quad \begin{cases} 2\lambda + 10\mu = 1 \\ 2\mu - 10\lambda = 0 \end{cases}$$

$$1^a \text{ eq.} - 5 \cdot 2^a \text{ eq.} : 2\lambda + 50\lambda = 1 ; 52\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{52}$$

-- $\rightarrow$ si trova μ .

In generale: se al II membro c'è $\cos(\alpha t)$ oppure $\sin(\alpha t)$ il tentativo da fare è

$$u(t) = \lambda \cos(\alpha t) + \mu \sin(\alpha t)$$

Non funziona se $\cos(\alpha t)$ e $\sin(\alpha t)$ sono già sol. dell'omog. In questo caso basta "aggiungere t davanti" finché basta.

Analogo per $f(t) = \underbrace{p(t)}_{\text{polinomio}} \sin(\alpha t), p(t) \cos(\alpha t)$.

$$\text{E se } f(t) = 3 + t^2 + \cos(6t) + e^{5t}$$

$\nearrow$ o si fa un tentativo che contiene i singoli tentativi

$\searrow$ o si risolve con un pezzo per volta e poi si sommano le soluzioni (FUNZIONA PERCHÉ LINEARE).