

$$y'' + 4y' + 4y = te^{-2t}$$

Omoq $y'' + 4y' + 4y = 0 \leadsto x^2 + 4x + 4 = 0; (x+2)^2 = 0$

$\leadsto$ Radici: $x = -2$ di mult. $= 2 \leadsto$ Base: e^{-2t}, te^{-2t}

$\leadsto$ Sol. gen. omog. $u(t) = ae^{-2t} + bte^{-2t}$

Se ne soluz. part. eq. NON omog. $\leadsto$ variazione delle costanti

oppure tentativo $u(t) = t^2(at+b)e^{-2t}$
 $= at^3e^{-2t} + bt^2e^{-2t}$

$$u'(t) = 3at^2e^{-2t} - 2at^3e^{-2t} + 2bte^{-2t} - 2bt^2e^{-2t}$$

$$u''(t) = 6abe^{-2t} - 6at^2e^{-2t} - 6at^2e^{-2t} + 4at^3e^{-2t} + 2be^{-2t} - 4bte^{-2t}$$

$$- 4bte^{-2t} + 4bt^2e^{-2t}$$

$$+ 4u'(t) \quad + 12at^2e^{-2t} - 8at^3e^{-2t} + 8bte^{-2t} - 8bt^2e^{-2t}$$

$$+ 4u \quad + 4at^3e^{-2t} + 4bt^2e^{-2t} =$$

$$te^{-2t} \quad = te^{-2t}$$

$$6ate^{-2t} + 2be^{-2t} = te^{-2t} \Rightarrow b=0, a=\frac{1}{6}$$

Sol. gen. eq. NON omog:

$$u(t) = \frac{1}{6}t^3e^{-2t} + ae^{-2t} + bte^{-2t}$$

Se c'è $p(t)e^{\alpha t}$ in generale provo $q(t)e^{\alpha t}$
↑
stesso grado di $p(t)$

1. Determinare per quale delle seguenti funzioni l'origine *non* è un punto stazionario.

(A) $\cos x - \cos y$

(B) e^{x^2y}

(C) $y \cos x^2$

(D) $y \sin x^2$

Impostazione classica $\begin{cases} f_x(0,0) = 0 \\ f_y(0,0) = 0 \end{cases}$ OK.

Con Taylor: l'origine è staz. $\Leftrightarrow$ nello sviluppo di Taylor con centro in $(0,0)$ non compaiono termini di grado 1

$$\cos x - \cos y = \underbrace{\left(1 + \text{roba di grado} \geq 2\right)}_{\cos x} - \left(1 + \text{roba di grado} \geq 2\right)$$

$$e^{x^2y} = 1 + x^2y + \text{roba di grado} + \text{altro}$$

$$y \cos x^2 = y(1 + \text{rba di grado } \geq 4) = y + \dots$$

↑ grado 2

$$y \sin x^2 = y(x^2 + \dots) = yx^2 + \text{rba di grado + alto.}$$

2. Determinare quante delle seguenti equazioni differenziali

sono lineari.

(A) 0

$$u'' = u \cdot \sin t,$$

LINEARE

(B) 1

$$u'' = t \cdot \sin u$$

NO
LINEARE

(C) 2

$$u'' = \sin(tu)$$

NO LINEARE

(D) 3

3. Una montagna ha la forma descritta dal grafico della funzione $e^{xy} - 3y^2$, in cui abbiamo orientato gli assi x e y , rispettivamente, verso Est e verso Nord. Uno sciatore si trova nel punto corrispondente ad $x = 1$, $y = 1$ e si appresta a scendere lungo la linea di massima pendenza.

Determinare quale delle seguenti rappresenta meglio la direzione verso cui procede lo sciatore.

(A) Nord-Est

(B) Nord-Ovest

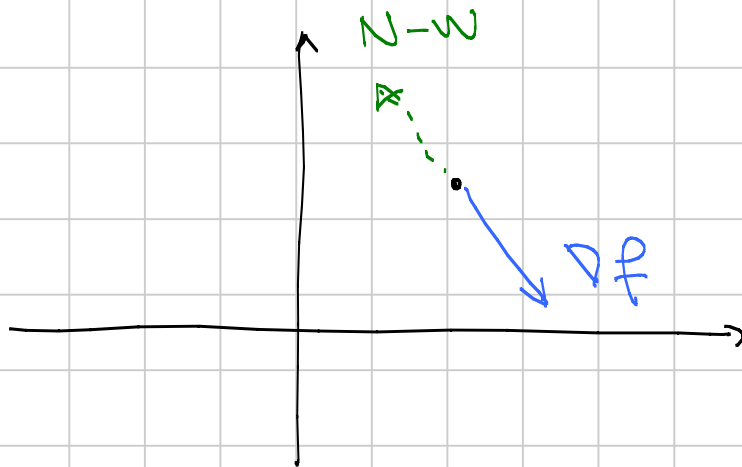
(C) Sud-Est

(D) Sud-Ovest

$$f(x, y) = e^{xy} - 3y^2$$

$$\nabla f(x, y) = (ye^{xy}, xe^{xy} - 6y)$$

$$\nabla f(1, 1) = (e, e - 6) \sim (2, 7 \dots, -3, 2 \dots)$$



4. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$u''' + 64u' = 0.$$

(A) $u(t) = a + b \sin(8t) + c \cos(8t)$

(B) $u(t) = a + be^{8t} + ce^{-8t}$

(C) $u(t) = at + b \sin(8t) + c \cos(8t)$

(D) $u(t) = ae^{-4t} + bte^{-4t} + ct^2e^{-4t}$

$$x^3 + 64x = 0$$

$$x(x^2 + 64) = 0$$

$$x = 0$$

$$1$$

$$x^2 = -64$$

$$x = \pm 8i$$

$$\cos(8t), \sin(8t)$$

5. Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2005, x \leq 0\}$. Determinare quanti dei seguenti integrali

$$\int_D x \, dx \, dy$$

sono uguali a zero.

(A) 1

$$\int_D xy \, dx \, dy$$

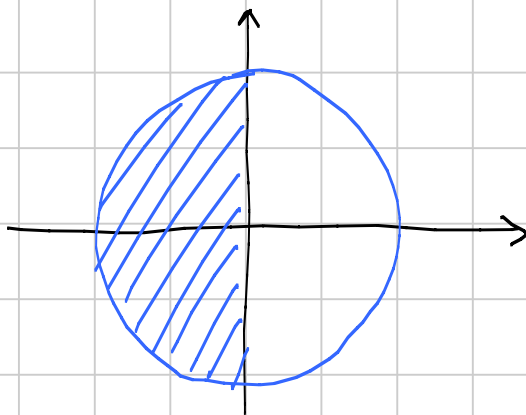
(B) 2

$$\int_D x^3 y^2 \, dx \, dy$$

(C) 3

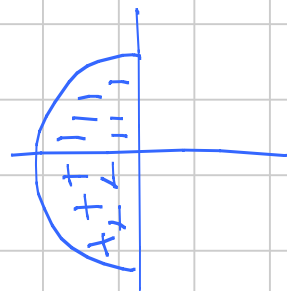
$$\int_D x^2 y^3 \, dx \, dy$$

(D) 4



$$\iint_D x \, dx \, dy < 0$$

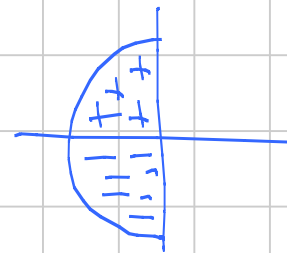
$$\iint_D xy \, dx \, dy = 0$$



$$\iint_D x^3 y^2 \, dx \, dy < 0$$

$$x^3 y^2 \leq 0 \text{ in } D$$

$$\iint_D x^2 y^3 \, dx \, dy = 0$$



6. Per trovare una soluzione dell'equazione differenziale

$$u'' - u = e^t + t$$

conviene cercarla della forma

(A) $ae^t + bt$

(B) $ae^t + bt + c$

(C) $ate^t + bt + c$

(D) $ate^t + bt$

$$u'' - u = e^t + t$$

$$u'' - u = 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \quad x = \pm 1$$

Base sd. omog. : e^t , e^{-t}

tentativo classico sarebbe

NON FUNZIONA

$$\underbrace{ae^t}_{\text{esp.}} + \underbrace{bt + c}_{\text{polinomio di grado 1.}}$$

$$u(t) = \underline{\underline{ate^t}} + bt + c$$

7. Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0, x + y \leq 0\}$.

Determinare la descrizione di A in coordinate sferiche.

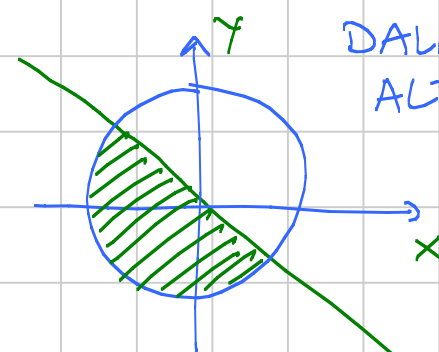
$$\rho \in [0, 2]$$

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$$

latitudine

(C)

$y \leq -x$
LONGITUDINE
DALL'ALTO



$$\theta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$$

$= \frac{3\pi}{4} + \pi$

8. Consideriamo l'insieme $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$.

Determinare quante delle seguenti funzioni

$$x^2 - y$$

$$x^2 + y^2$$

$$y - x^4$$

$$x + y$$

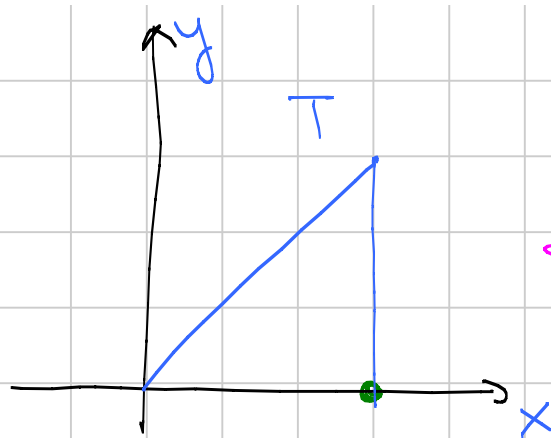
assumono il loro massimo in T nel punto $(1, 0)$.

(A) 1

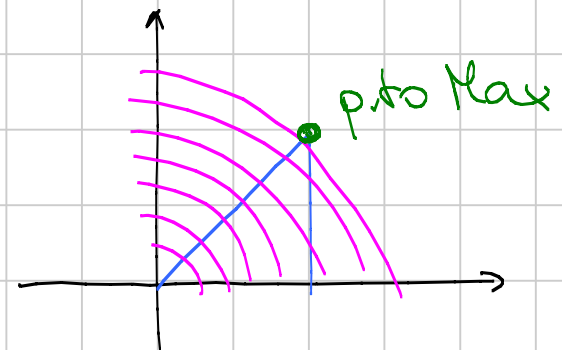
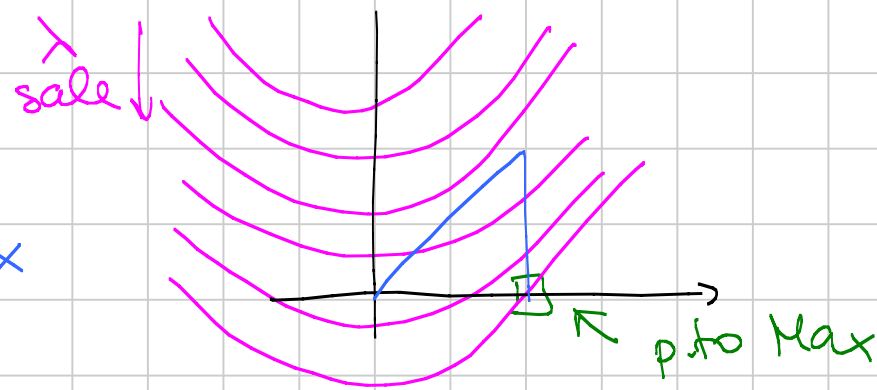
(B) 2

(C) 3

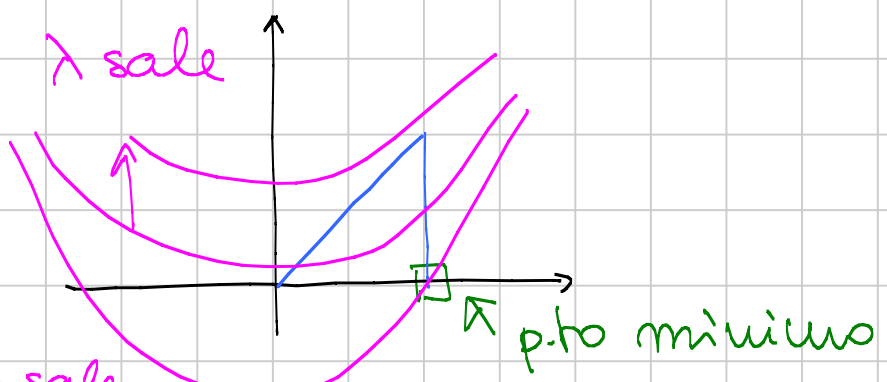
(D) 4



$$x^2 - y = \lambda \Rightarrow y = x^2 - \lambda$$



$$y - x^4 = \lambda \Rightarrow y = x^4 + \lambda$$



$$x + y = \lambda$$

$$y = -x + \lambda$$



9. Indichiamo con $B_R(0,0)$ il cerchio di $\mathbb{R}^2$ con centro nell'origine e raggio R .

Determinare quale delle seguenti affermazioni è *equivalente* a dire che

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty.$$

(A) $\forall M \in \mathbb{R} \forall R \geq 0$ si ha che $f(x,y) \geq M \forall (x,y) \notin B_R(0,0)$. $\leftarrow$ ASSURDA

(B) $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che $\forall R \geq 0$ si ha che $f(x,y) \geq M \forall (x,y) \notin B_R(0,0)$. $\leftarrow$ ASSURDA

(C) $\forall M \in \mathbb{R} \exists R \geq 0$ tale che $f(x,y) \geq M$ se e solo se $(x,y) \notin B_R(0,0)$. $\leftarrow$ è come dire che la funzione è radiale

(D) $\forall M \in \mathbb{R} \exists R \geq 0$ tale che $f(x,y) \geq M \forall (x,y) \notin B_R(0,0)$. $\leftarrow$ OK

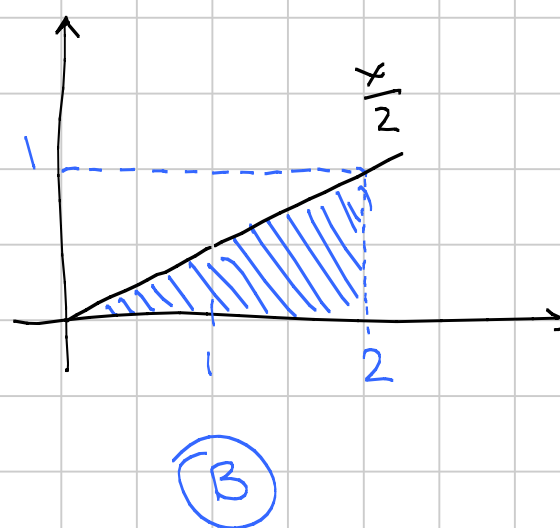
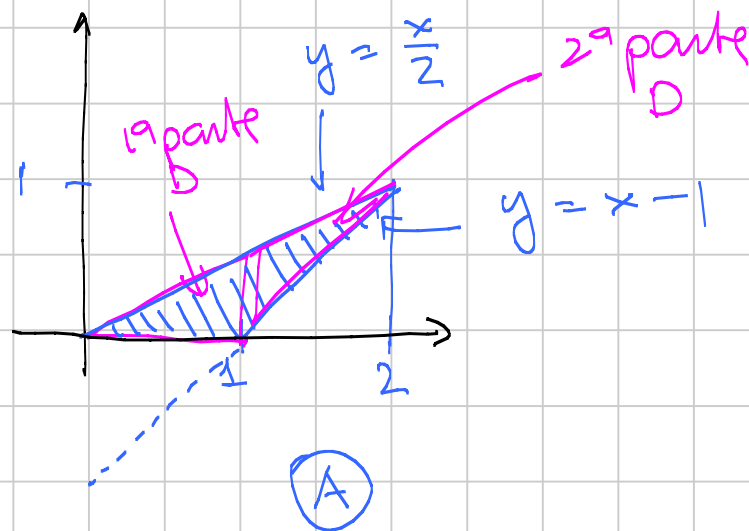
10. Tre degli integrali indicati nelle risposte sono uguali qualunque sia la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua che si integra. Determinare il quarto.

(A) $\int_0^2 dx \int_0^{x/2} f(x, y) dy - \int_1^2 dx \int_0^{x-1} f(x, y) dy$

(B) $\int_0^1 dy \int_0^2 f(x, y) dx - \int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx$

(C) $\int_0^1 dy \int_{2y}^{y+1} f(x, y) dx$

(D) $\int_0^1 dx \int_0^{x/2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{x-1}^{x/2} f(x, y) dy$



$$0 \leq x \leq 2y$$

$$x \leq 2y \Rightarrow y \geq \frac{x}{2}$$

(c) $0 \leq y \leq 1$, $2y \leq x \leq y+1$
 x compreso fra la retta $x=2y$ e
 la retta $x=y+1$

$$\begin{array}{ll}
 x=2y & y=\frac{x}{2} \\
 x=y+1 & y=x-1
 \end{array}$$

= (A)

11. Sia $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \pi \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq |\cos x|\}$.

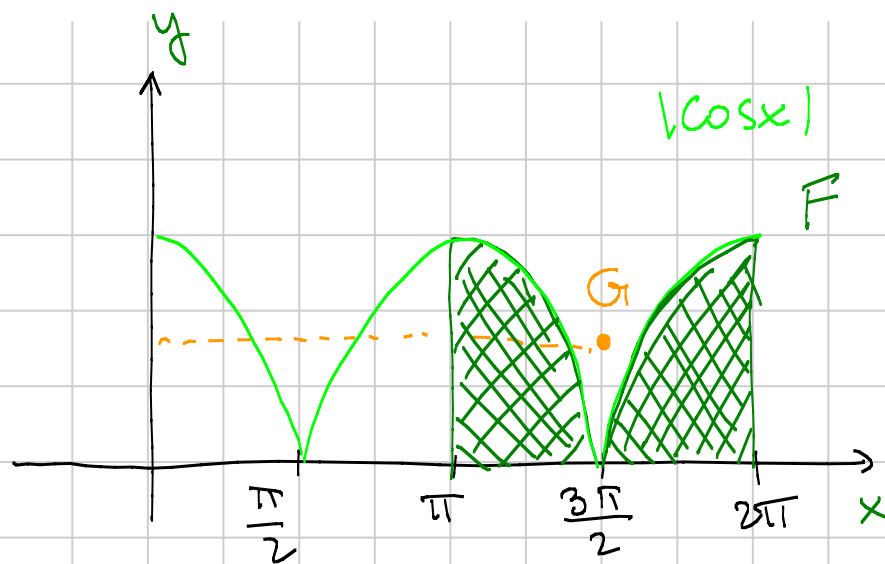
Determinare il volume del solido ottenuto ruotando F intorno all'asse y .

(A) $\pi^2/2$

(B) $2\pi^2$

(C) 3π

(D) $6\pi^2$



$$Vol = Area(F) \cdot 2\pi \cdot x_G$$

↑
 distanza di G
 dall'asse di rotazione

$$= 2 \cdot \cancel{2\pi} \cdot \frac{3\pi}{\cancel{2}} = 6\pi^2$$

12. Consideriamo la funzione

$$f(x, y) = x^4 + 3xy - y^2.$$

Determinare quale delle seguenti affermazioni è corretta

(A) f è convessa in tutto $\mathbb{R}^2$

(B) f è concava in tutto $\mathbb{R}^2$

(C) Esistono dei sottoinsiemi (non vuoti) di $\mathbb{R}^2$ in cui è concava ed altri in cui è convessa

(D) In ogni sottoinsieme (non vuoto) di $\mathbb{R}^2$ si ha che f non è né concava né convessa

$$f_x = 4x^3 + 3y$$

$$f_y = 3x - 2y$$

$$f_{xx} = 12x^2$$

$$f_{xy} = 3$$

$$f_{yx} = 3$$

$$f_{yy} = -2$$

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} : -24x^2 - 9 < 0$$

$$\text{Autov} : +, -$$

In ogni p.to Hf non definita

13. Determinare il tempo di vita della soluzione del problema di Cauchy

$$u' = u^2 + 1, \quad u(0) = -1.$$

(A) $\pi/2$

(B) $3\pi/4$

(C) 1

(D) $+\infty$

$$u' = u^2 + 1 \quad \frac{du}{dt} = u^2 + 1 \quad \int \frac{du}{u^2 + 1} = \int dt$$

$$\arctan u = t + c \Rightarrow u(t) = \tan(t + c)$$

$$u(0) = -1$$

$$\tan c = -1 \Rightarrow c = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow u(t) = \tan\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{1° problema: quando } t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Int. max. esistenza: } -\frac{\pi}{2} < t - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{4}$$

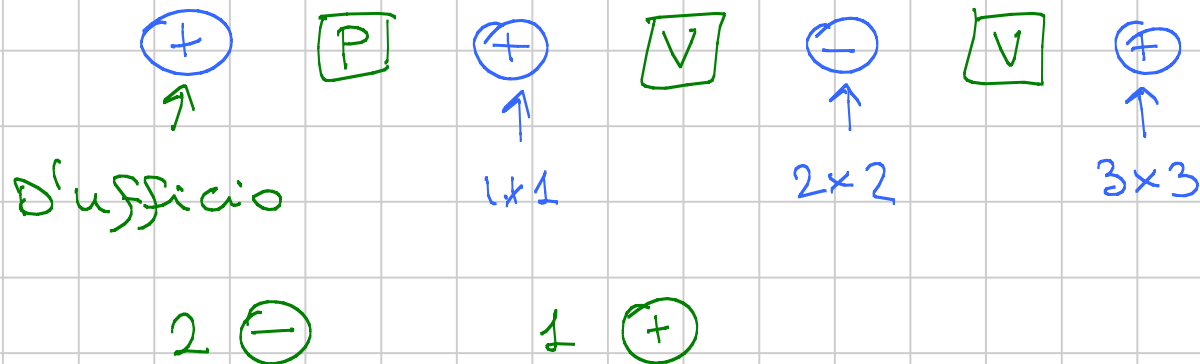
MINORI ORLATI

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(1 \times 1) = 1$$

$$\text{Det}(2 \times 2) = 1 \cdot (-4) - 2 \cdot 2 = -4 - 4 = -8$$

$$\text{Det}(3 \times 3) = -12 + 100 - 12 = \text{pos.}$$



15. L'estremo inferiore della funzione

$$f(x, y) = y^2x + x^2 + x^4,$$

al variare di (x, y) in $\mathbb{R}^2$ è

(A) 0

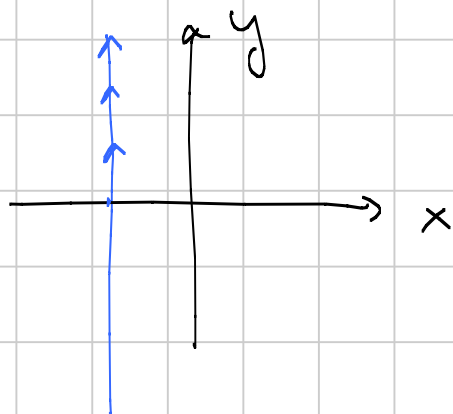
(B) $-\infty$

(C) un numero reale negativo

(D) non esiste

$$\text{Sup} = +\infty \quad y = 0 \quad x \text{ enorme}$$

$$x = -1 \quad \text{Diventa: } -y^2 + 1 + 1 \rightsquigarrow y \text{ enorme} \rightsquigarrow \text{inf} = -\infty$$



$$y = x^2 \rightsquigarrow \text{Diventa: } x^5 + x^2 + x^4 \rightsquigarrow x \text{ enorm. neg} \rightsquigarrow \text{inf} = -\infty$$

16. Sia Q il primo quadrante di $\mathbb{R}^2$. L'integrale improprio

$$\int_Q \frac{x + \arctan x}{1 + (x^4 + y^4)^\alpha} dx dy$$

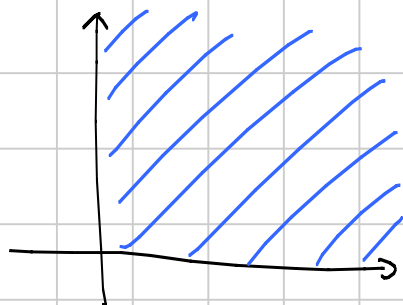
converge se e solo se

(A) $\alpha > 0$

(B) $\alpha > 1/4$

(C) $\alpha > 1/2$

(D) $\alpha > 3/4$



Unico problema: zona di integr.
non limitata

in coord. polari l'integrando è circa

$$\frac{\rho}{\rho^{4\alpha}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pag}}}{\rho} \sim \frac{1}{\rho^{4\alpha-2}}$$

$$4\alpha > 3 \quad \alpha > \frac{3}{4}$$

$$\text{conv.} (\Leftrightarrow) 4\alpha - 2 > 1$$

Per farlo rigoroso bisogna dividere 2 casi

$$\alpha > \frac{3}{4}$$

$$\int_0^{+\infty} dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{p \cos \theta + \arctan(p \cos \theta)}{1 + p^{4\alpha} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)^\alpha} p d\theta \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} dp \int_0^{\pi/2} \frac{p + 100}{1 + m^\alpha p^{4\alpha}} p d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{p^2 + 100p}{1 + m^\alpha p^{4\alpha}} dp$$

e su questo faccio
C.A. con $\frac{1}{p^{4\alpha-2}}$

$$\alpha < \frac{3}{4}$$



$$\iint_Q \geq \iint_T \text{ stessa funzione}$$

$$\frac{p \cos \theta + \arctan(p \cos \theta)}{1 + p^{4\alpha} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)^\alpha} p \geq \frac{p \cdot \cos \frac{\pi}{4}}{1 + p^{4\alpha} \cdot 2^\alpha}$$

stessa conclusione
di prima

17. Sia $u(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$u' = \arctan(u - 1), \quad u(0) = 1.$$

Allora

(A) $u(2005) < 1$

(B) $u(2005) = 1$

(C) $u(2005) > 1$

(D) non ha senso chiedere $u(2005)$ perché il tempo di vita della soluzione è minore di 2005

La soluzione è la costante $u(t) \equiv 1$

$$\int_D \frac{|x| \cdot |y|^\alpha}{(x^2 + y^2)^8} dx dy$$



Problema in $(0, \infty)$

$$\frac{\rho \cdot \rho^\alpha}{\rho^{16}} \cdot \rho = \frac{1}{\rho^{14-\alpha}}$$

con pb. in ∞ converge $\Leftrightarrow 14 - \alpha < 1$

$$\Leftrightarrow \alpha > 13$$