

A.A. 2007/2008
Analisi Matematica 1

Stampato integrale delle lezioni
(Volume 2)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 055. Spazio n-dimensionale, vettori, norma, prodotto scalare	4
Lezione 056. Funzioni di 2 variabili e loro linee di livello	9
Lezione 057. Limiti e continuità in 2 variabili	14
Lezione 058. Derivate parziali e direzionali	18
Lezione 059. Differenziale e gradiente	22
Lezione 060. Massimi e minimi in 2 variabili: teorema di Weiestrass e metodo delle linee di livello	27
Lezione 061. Massimi e minimi in 2 variabili: parametrizzazione del bordo	31
Lezione 062. Moltiplicatori di Lagrange	35
Lezione 063. Massimi e minimi su insiemi limitati	40
Lezione 064. Derivate parziali successive, massimi e minimi su insiemi non limitati . .	44
Lezione 065. Integrali in una variabile: notazioni, significato geometrico, definizioni .	49
Lezione 066. Funzione integrale, primitive, teorema della media integrale, teorema fondamentale del calcolo integrale	54
Lezione 067. Integrazione per parti	59
Lezione 068. Integrazione per sostituzione	64
Lezione 069. Integrazione funzioni razionali - prima parte	69
Lezione 070. Integrazione funzioni razionali - seconda parte	74
Lezione 071. Sostituzioni razionalizzanti - prima parte	79
Lezione 072. Sostituzioni razionalizzanti - seconda parte	84
Lezione 073. Integrali doppi: notazioni, definizioni, formula di riduzione sui rettangoli	89
Lezione 074. Integrali doppi: formula di riduzione su insiemi normali rispetto all'asse x	94
Lezione 075. Integrali doppi: formula di riduzione su insiemi normali rispetto all'asse y	99

Lezione 076. Integrali impropri: definizioni e spezzamento in integrali monoprobema	104
Lezione 077. Integrali impropri: criteri di convergenza	110
Lezione 078. Coordinate polari e loro utilizzo per il calcolo di integrali doppi	115
Lezione 079. Cambi di variabile negli integrali doppi	120
Lezione 080. Integrali tripli: notazioni, definizioni, formula di riduzione per colonne .	125
Lezione 081. Integrali tripli: formula di riduzione per sezioni	130
Lezione 082. Coordinate cilindriche e sferiche e loro utilizzo per il calcolo di integrali tripli	134
Lezione 083. Calcolo di baricentri di figure piane e solide mediante integrali doppi e tripli	139
Lezione 084. Cambi di variabile negli integrali tripli - Volume dei solidi di rotazione .	144
Lezione 085. Studio della convergenza di integrali impropri mediante l'integrazione per parti	149
Lezione 086. Confronti serie integrali - Metodo "dei triangolini" per lo studio di integrali impropri	155
Lezione 087. Curve: definizioni, lunghezza, integrali curvilinei	160
Lezione 088. Baricentro di una curva - Area di una superficie di rotazione	165
Lezione 089. Equazioni differenziali e problema di Cauchy - Notazioni e definizioni . .	170
Lezione 090. Equazioni differenziali a variabili separabili - Tempo di vita, blow-up, break-down	178
Lezione 091. Esempi di studio di equazioni differenziali a variabili separabili	183
Lezione 092. Esempi di studio di equazioni differenziali a variabili separabili in funzione del dato iniziale	188
Lezione 093. Equazioni differenziali lineari omogenee	192
Lezione 094. Equazioni differenziali lineari non omogenee - Ricerca per tentavi di una soluzione	197
Lezione 095. Equazioni differenziali lineari non omogenee - Ulteriori esempi di ricerca per tentavi di una soluzione	202
Lezione 096. Equazioni differenziali lineari del primo ordine	207
Lezione 097. Equazioni differenziali lineari non omogenee - Metodo di variazione delle costanti	212

Lezione 098. Tecniche per calcolare la somma di una serie di potenze	216
Lezione 099. Sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee - Studio di equazioni differenziali con parametri	221
Lezione 100. Calcolo di 2 integrali impegnativi	225

MATEMATICA I

ORA 55

Titolo nota

14/11/2007

Lo SPAZIO $\mathbb{R}^n$

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 VETTORE COMPONENTI (numeri reali)

$\mathbb{R}^2$ = piano cartesiano

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \quad \vec{y} = (y_1, \dots, y_m)$$

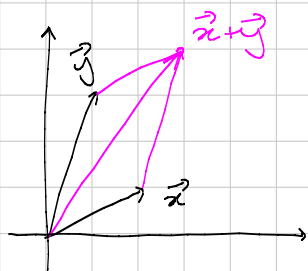
$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad \text{somma di 2 vettori}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda \text{ è un numero})$$

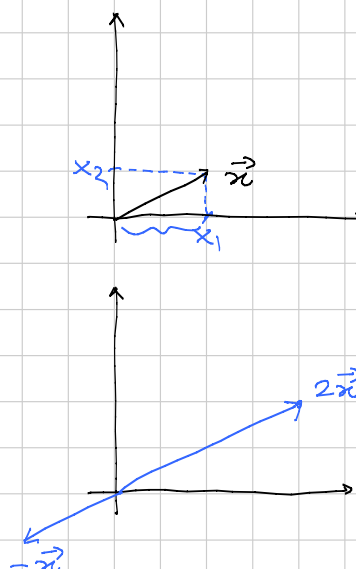
$$\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \quad \text{prodotto di un vettore per un numero}$$

Il risultato è un vettore

Interpretazione in $\mathbb{R}^2$



Somma = regola del parallelogrammo



NORMA DI UN VETTORE

$$\|\vec{x}\| = |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \text{LUNGHEZZA DEL VETTORE}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 Notazioni equivalenti

DISTANZA TRA 2 VETTORI

$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

Per $n=2$ è sostanzialmente la classica formula della distanza tra 2 punti basata sul teo. di Pitagora.

Relazione tra distanza e norma

$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

$$\vec{x} - \vec{y} = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$$

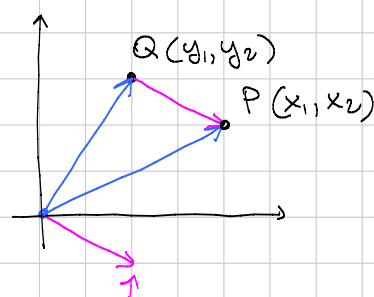
PUNTI O VETTORI? In $\mathbb{R}^2$ se scrivo (x_1, x_2) questo rappresenta un pto oppure anche il vettore applicato nell'origine e punta della freccia in (x_1, x_2)

P e Q rappresentano 2 pti, ma anche 2 vettori.

La diff. tra i 2 vettori la posso rappresentare come

$$\vec{P} - \vec{Q} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$$

Pensando il vettore diff. come applicato in Q con pta della freccia in P è immediato che la distanza tra P e Q è la norma (cioè la lunghezza) del vettore differenza.



Questo è il vero vettore differenza

PRODOTTO SCALARE TRA 2 VETTORI

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Altre notazioni
 $(\vec{x}, \vec{y})$, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

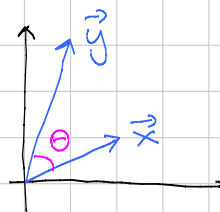
INPUT: 2 vettori $\vec{x}$ e $\vec{y}$

OUTPUT (risultato): numero (SCALARE)

GEOMETRICAMENTE :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \theta$$

$\uparrow$ prod. scalare tra 2 vettori
 $\uparrow$ prod. di numeri
 $\uparrow$ angolo compreso



Oss. ① Siano $\vec{x}$ e $\vec{y}$ vettori non nulli (il vettore nullo è quello che ha tutte le componenti $= 0$).

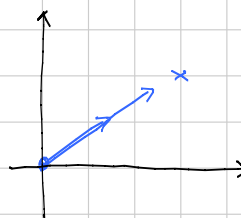
Allora

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \pm 90^\circ$$

$\Leftrightarrow \vec{x}$ e $\vec{y}$ sono perpendicolari

VERSORI Un versore è un qualunque vettore di lunghezza unitaria.

Due vettori che sono uno multiplo dell'altro indicano la stessa direzione. Se il coeff. è positivo allora indicano anche lo stesso verso (ogni direzione ha 2 versi)



I versori sono in corrispondenza biunivoca con i possibili versi

Oss. ② Ogni vettore $\vec{x}$ non nullo è multiplo di un unico versore

$$\vec{x} = \|\vec{x}\| \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

$\uparrow$ FATTORE DI MOLTEPLICITÀ
 $\uparrow$ VERSORE

Oss. ③ Siano $\vec{x}$ e $\vec{y}$ 2 vettori. Quanto può valere al max $\vec{x} \cdot \vec{y}$? E al minimo?

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \underbrace{\|\vec{x}\|}_1 \cdot \underbrace{\|\vec{y}\|}_1 \cdot \cos \theta$$

$\vec{x} \cdot \vec{y}$ al massimo vale 1 quando i 2 vettori sono uguali
 " " minimo " -1 " " " " opposti

$\theta = 0^\circ$

$\theta = 180^\circ$

Qualche proprietà algebrica

$\vec{x}$ vettore, λ numero, allora

$$\underbrace{\|\lambda \vec{x}\|}_{\text{NORMA}} = \underbrace{|\lambda|}_{\substack{\text{VAL.} \\ \text{ASSOL.} \\ \text{DI UN NUMERO}}} \cdot \underbrace{\|\vec{x}\|}_{\text{NORMA}}$$

$$\begin{aligned} \|\lambda \vec{x}\| &= \sqrt{(\lambda x_1)^2 + \dots + (\lambda x_n)^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2 (x_1^2 + \dots + x_n^2)} \\ &= \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \\ &= |\lambda| \cdot \|\vec{x}\| \end{aligned}$$

$\vec{x}$ e $\vec{y}$ vettori, λ, μ numeri

$$(\lambda \vec{x}) \cdot (\mu \vec{y}) = \lambda \mu \vec{x} \cdot \vec{y}$$

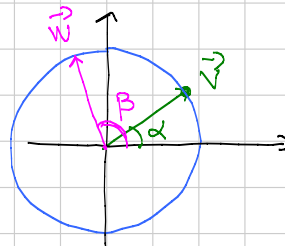
$$\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \quad \mu \vec{y} = (\mu y_1, \dots, \mu y_n)$$

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{x}) \cdot (\mu \vec{y}) &= \lambda x_1 \cdot \mu y_1 + \lambda x_2 \cdot \mu y_2 + \dots + \lambda x_n \cdot \mu y_n \\ &= \underbrace{(\lambda \mu)}_{\text{sc.}} \underbrace{(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)}_{\text{sc.}} \end{aligned}$$

In $\mathbb{R}^2$ un vettore si può scrivere nella forma $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ (è un pto della circ. trigonometrica)

$$\begin{aligned} \text{Siano } \vec{v} &= (\cos \alpha, \sin \alpha) \\ \vec{w} &= (\cos \beta, \sin \beta) \end{aligned}$$

2 vettori in $\mathbb{R}^2$



$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\beta - \alpha)$$

Questo dimostra l'interpretazione
geom. del prod. scalare nel caso
di vettori di $\mathbb{R}^2$.

angolo compreso
tra i 2 vettori

— o — o —

In generale in $\mathbb{R}^2$ siano dati 2 vettori non nulli $\vec{x}$ e $\vec{y}$

Per un'oss. prec. $\vec{x} = \|\vec{x}\| \vec{v}$, $\vec{y} = \|\vec{y}\| \vec{w}$

dove $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono i vettori corrispondenti a $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

Ma allora

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (\|\vec{x}\| \vec{v}) \cdot (\|\vec{y}\| \vec{w})$$

angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$
= angolo tra $\vec{x}$ e $\vec{y}$

$$= \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}) = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \theta$$

MATEMATICA I

ORA 56

Titolo nota

14/11/2007

FUNZIONI DI 2 O PIÙ VARIABILI

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

↑
in partenza
più variabili

← in arrivo una
variabile

VETTORE

2 tipi di notazione : NOTAZIONE RAPIDA $f(x)$

NOTAZIONE CON LE COMPONENTI

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

↑
numeri

Nel caso di $\mathbb{R}^2$ si scrive spesso $f(x, y)$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vettore
 " " " $\mathbb{R}^3$ " " " $f(x, y, z)$ $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vettore

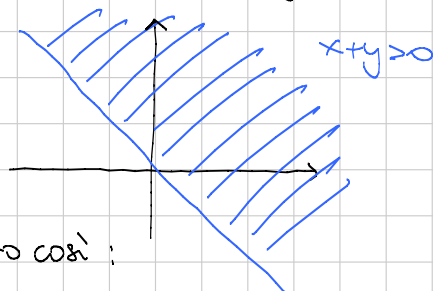
Più in generale posso considerare funzioni $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, dove $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Esempio $f(x, y) = \log(x+y)$. Questa è definita in tutti
 i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che
 $x+y > 0$ $(y > -x)$

↑
componenti
— 0 —

Grafico di una funzione

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

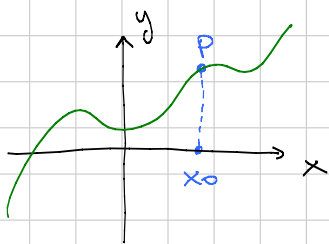


È il sottoinsieme dello spazio definito così:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$$

1 VARIABLE

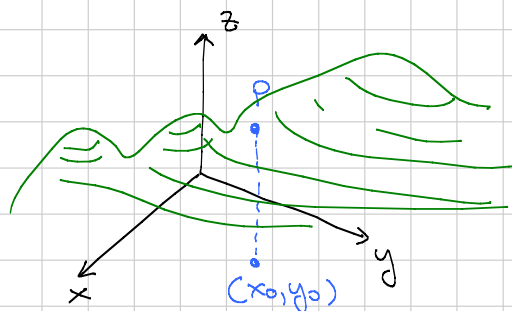
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



Asse x = insieme di partenza
La "quota" di P è $f(x_0)$

2 VARIABLE

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$



Insieme di partenza = piano
"base" x, y
Il p.to P del grafico che sta
sopra (x_0, y_0) è a quota
 $f(x_0, y_0)$
Il grafico è "una montagna"

Grafico di una funzione di 18 variabili.

$$f: \mathbb{R}^{18} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{Il grafico di } f \text{ è}$$

$$\{(x_1, \dots, x_{18}, x_{19}) \in \mathbb{R}^{19} : x_{19} = f(x_1, \dots, x_{18})\}$$

Grafici in 2 variabili

LINEE DI LIVELLO

Esempio 1 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = x^2 + y^2$. Come è fatto il grafico

Cerco le linee di livello. Fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, la sua linea di livello è

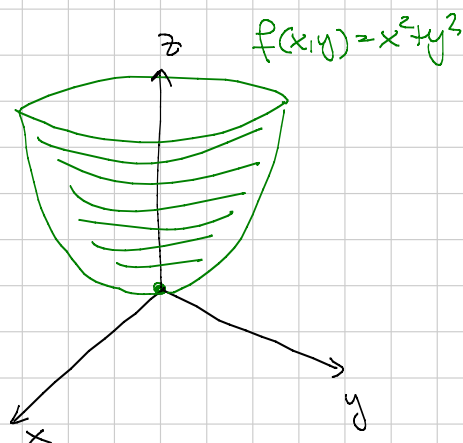
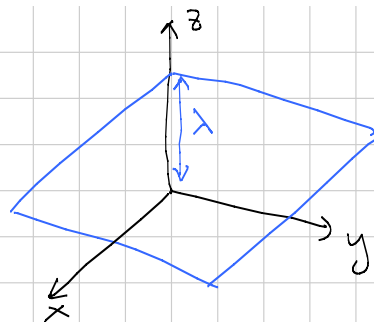
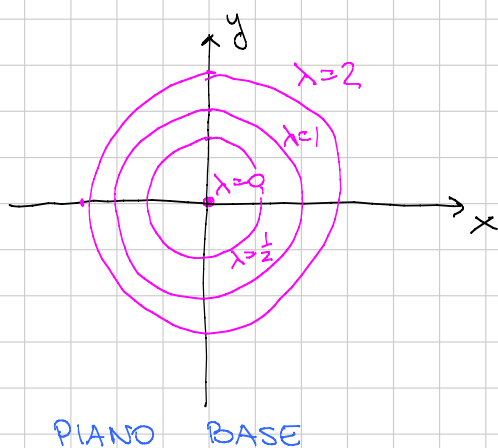
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = \lambda\}$$

Brutalmente: cerco i punti (x, y) in cui la montagna è a quota λ , cioè taglio il grafico con un piano // al piano base ma ad altezza λ .

Nell'esempio $f(x,y) = \lambda$ diventa

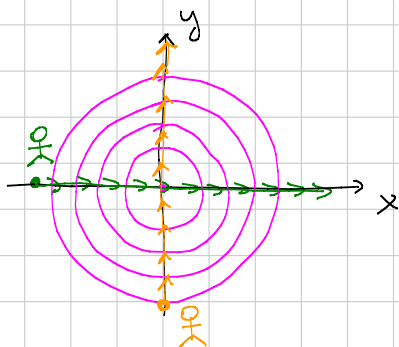
$$x^2 + y^2 = \lambda \quad \text{Questo insieme è}$$

- $\emptyset$ se $\lambda < 0$
- la sda origine $(0,0)$ se $\lambda = 0$
- la circ. con centro in $(0,0)$ e raggio $\sqrt{\lambda}$ se $\lambda > 0$



RESTRIZIONI A RETTE

"Percorsi di OMNI"



Prendo un omni che "sulla cartina" percorre l'asse x .
Descrivere la quota alla quale viene a trovarsi lungo il percorso.

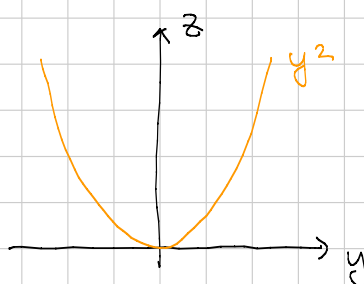
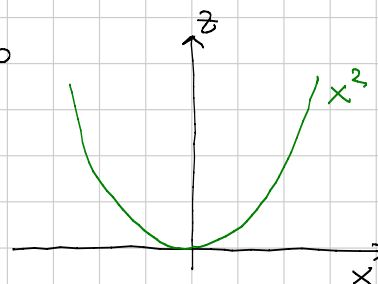
Altezza dell'omni

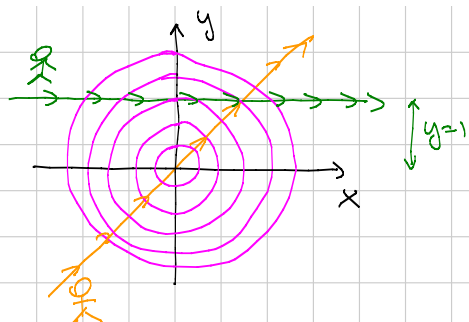
La funzione disegnata è

$$f(x,0) = x^2$$

stare sull'asse x =
avere 2 coord. $\Rightarrow$

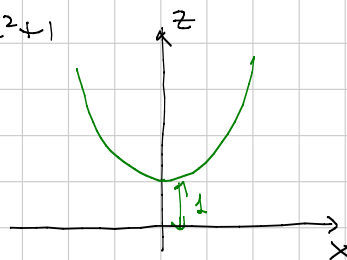
$$f(0,y) = y^2$$





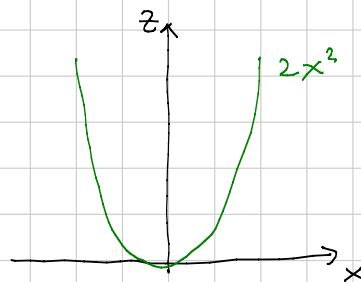
$$f(x, 1) = x^2 + 1$$

$\uparrow$
II coord = 1



$$f(x, x) = x^2 + x^2 = 2x^2$$

$\uparrow \uparrow$
II coord = I coord

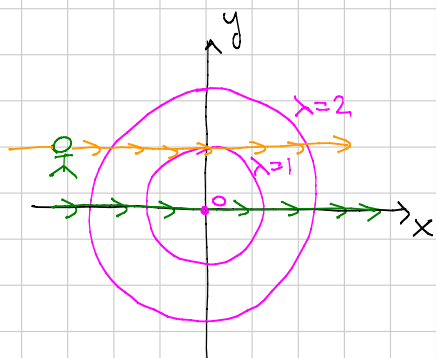


Domanda : perchè è + stretta ?

Esempio 2 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Cerco le linee di livello : $f(x, y) = \lambda$; $\sqrt{x^2 + y^2} = \lambda$

La linea di livello è :
 $\lambda < 0 \leadsto$ nulla
 $\lambda = 0 \leadsto$ origine
 $\lambda > 0 \leadsto$ circ. con centro in (0,0)
 e raggio λ



Orizz. lungo asse x

$$f(x, 0) = \sqrt{x^2 + 0} = |x|$$

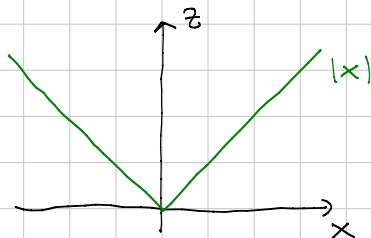
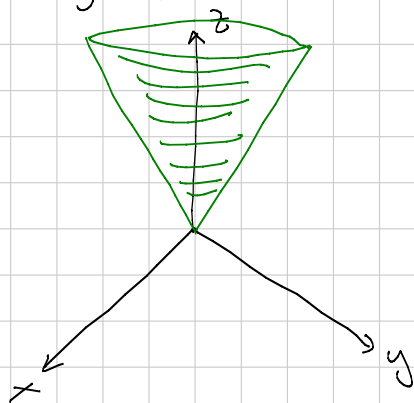
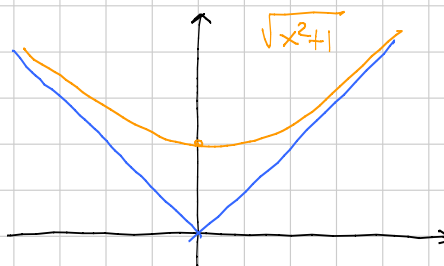


Grafico:



Un omino che percorre la retta $y=1$
si trova a quota

$$f(x,1) = \sqrt{x^2+1}$$



MATEMATICA I

ORA 57

Titolo nota

14/11/2007

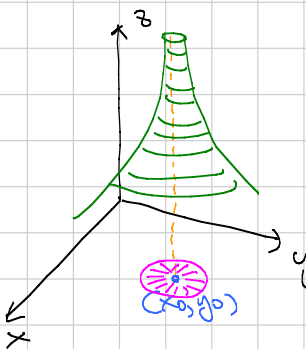
LIMITI E CONTINUITÀ PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Definizione di limite (esempio in 2 variabili)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ +\infty & \textcircled{2} \\ -\infty & \textcircled{3} \\ \text{N.E.} & \textcircled{4} \text{ (Nessuno dei precedenti)} \end{cases}$$

Def. di ② Si dice che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty \text{ se}$$

 $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme) $\exists \delta > 0$ (raggio del cerchio)t.c. $f(x,y) \geq M$ $\forall (x,y) \in$ cerchio con centro in (x_0, y_0) e raggio δ meno (x_0, y_0) stessoDef di ③ $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorm. negativo) $\exists \delta > 0$ t.c. $f(x,y) \leq M \quad \forall (x,y) \in$ cerchio con raggio δ meno punto stessoDef. di ① Si dice che $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = l \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0) $\exists \delta > 0$ (raggio del cerchio)t.c. $l - \varepsilon \leq f(x,y) \leq l + \varepsilon \quad \forall (x,y) \in$ cerchio...Un punto (x,y) sta nel cerchio con centro (x_0, y_0) e raggio δ se e solo se $\text{dist}((x,y), (x_0, y_0)) < \delta$ In notazione vettoriale: $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ (centro), $\delta > 0$ (raggio)
$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(\vec{x}, \vec{x}_0) < \delta\} = \text{generalizzazione del cerchio ad } \mathbb{R}^n$$

= p.ti la cui distanza da x_0 è $< \delta$

Detto meglio $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|}_{\text{distanza tra } \vec{x} \text{ e } \vec{x}_0} \leq \delta\}$

Definizione di ② usando la notazione vettoriale

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \uparrow \text{ VETTORI}}} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (M è un numero)

$\exists \delta > 0$ (raggio: numero)

t.c.,

$f(x) \geq M$ $\forall x$ b.c. $\|x - x_0\| < \delta$
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $x \neq x_0$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ NORMA

La definizione di limite in una variabile diventa quella in più variabili usando la notazione vettoriale e sostituendo i valori assoluti con la norma

CONTINUITÀ

Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è continua in x_0 se e solo se

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \uparrow \quad \uparrow}} f(x) = f(x_0)$
 $\uparrow \quad \uparrow$

$\uparrow = \text{VETTORE}$

"META-TEOREMA"

Ogni funzione ottenuta a partire da quelle elementari mediante op. alg. e/o composizioni è continua dove non presenta problemi

Esempio 1

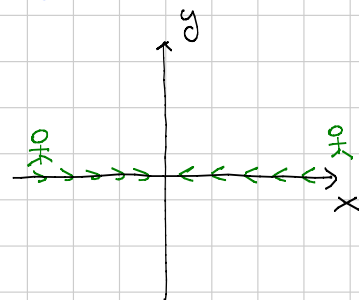
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(\cos(x+y)) + \cos(\sin(x+y))}{2e^{x^2y} - \arctan(xe^y)} = \frac{1 + \sin 1}{2}$$

Basta sostituire $(x,y) \rightsquigarrow (0,0)$

Non ci sono problemi di nessun tipo

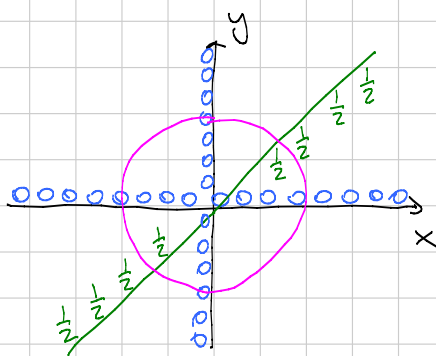
Esempio 2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Su tutto l'asse x la funzione vale (tranne nell'origine) 0.
Quindi il limite (se esiste) vale 0.



Sull'asse y stessa cosa. $f(0,y) = 0$.

Sulla bisettrice $y=x$ la funzione vale $f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$



In ogni cerchio (anche piccolissimo) con centro in $(0,0)$ esistono punti in cui $f=0$ e punti in cui $f = 1/2$.

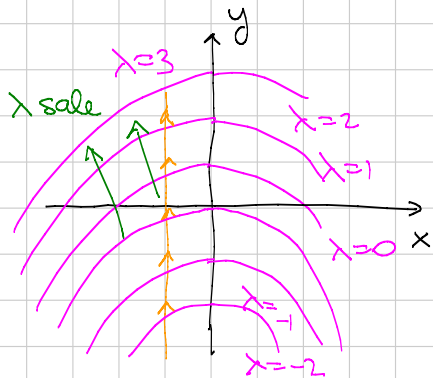
Questo IMPEDISCE al limite di esistere

"IN 2 (o più) VARIABILI I LIMITI DI FORME INDETERMINATE NON ESISTONO QUASI MAI"

Esempio $f(x,y) = x^2 + 2y$. Linee di livello

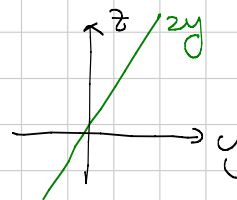
$$f(x,y) = \lambda \quad x^2 + 2y = \lambda \quad y = -\frac{x^2}{2} + \frac{\lambda}{2}$$

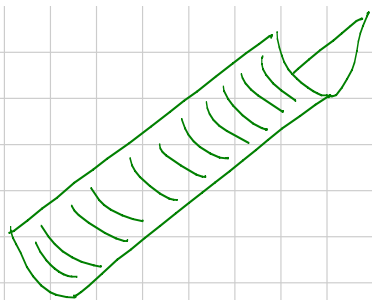
Al variare di λ abbiamo una famiglia di parabole ottenute l'una dall'altra mediante traslazione in verticale



Un ornito che percorre l'asse y verso l'alto si trova a quota

$$f(0,y) = 2y$$

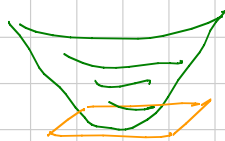




Intuitivamente: p.to stazionario = piano tg. // piano base



CIME DI
MONTAGNA



PONDI DI
LAGHI



MOUNTAIN
PASS

MATEMATICA I

ORA 58

Titolo nota

15/11/2007

Oggi: DERIVATE PARZIALI, DIREZIONALI, DIFFERENZIALE, GRADIENTE, ...

Derivate parziali

 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se esiste si dice derivata parziale di f rispetto a x nel p.to (x_0, y_0)

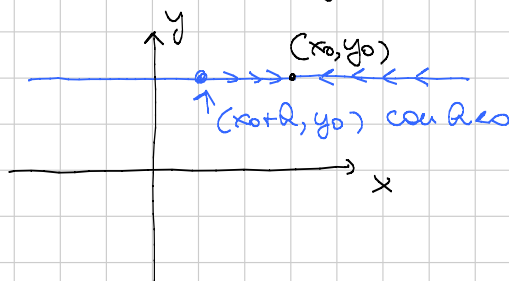
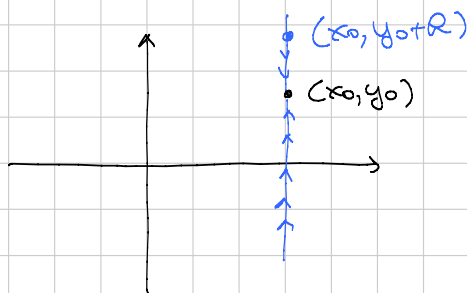
Si indica con $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ oppure con $f_x(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

↑
SE ESISTE

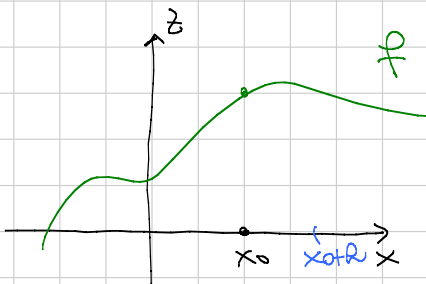
= deriv. parz. risp. a y

Geometricamente: ① Cosa rappresenta (x_0+h, y_0) e (x_0, y_0+h)



② Cosa rappresenta $f_x(x_0, y_0)$. Quando definisco $f_x(x_0, y_0)$ mi interessano solo i valori di f sulla retta // asse x passante per (x_0, y_0) . Consideriamo la restrizione di $f(x, y)$ a quella retta

$f_x(x_0, y_0)$ è la derivata della restrizione alla retta calcolata nel p.to x_0



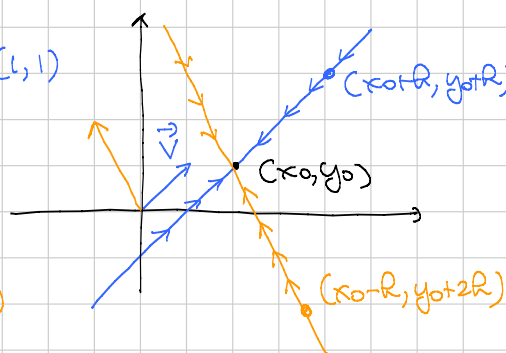
Derivate direzionali

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\vec{v} = (1, 1)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-h, y_0+2h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\vec{v} = (-1, 2)$$



Più in generale: dato un vettore $(\alpha, \beta) = \vec{v}$ posso definire

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\alpha h, y_0+\beta h) - f(x_0, y_0)}{h} = \text{(se esiste)}$$

Il vettore $\vec{v}$ è parallelo alla direzione di avvicinamento al p.to (x_0, y_0)

$$\begin{aligned} &= \text{derivata direzionale di } f \text{ nel p.to } (x_0, y_0) \\ &\text{rispetto alla direzione } \vec{v} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Oss ① Valgono bene tutte le direzioni $\vec{v}$ tranne $(0, 0)$ $\vec{v} \neq 0$

② Le derivate parziali sono in particolare derivate direzionali

$$f_x \rightsquigarrow \text{corrisponde a } \vec{v} = (1, 0)$$

$$f_y \rightsquigarrow \text{" " " " } \vec{v} = (0, 1)$$

③ Cosa succede se uso $\vec{v} = (2, 0)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+2h, y_0) - f(x_0, y_0)}{2h} = 2 f_x(x_0, y_0)$$

Metto $k=2h$

Più in generale se $\vec{w} = \lambda \vec{v}$ (sono multipli) allora

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(x_0, y_0) = \lambda \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$$

④ Basta conoscere le derivate nelle direzioni $\vec{v}$ date da versori ($|\vec{v}| = 1$)

Derivate parziali e direzionali in notazione vettoriale

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R}^n \quad v \in \mathbb{R}^n \quad |v| \neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

$\uparrow$ VETTORI $\uparrow$ se esiste $\uparrow$ Numeri $\uparrow$

$$\vec{x}_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$\vec{x}_0 + h\vec{v} = (x_1 + hv_1, x_2 + hv_2, \dots, x_n + hv_n)$$

In questa notazione le derivate parziali corrispondono ai vettori $\vec{v}$ che hanno una coordinata uguale ad 1 e tutte le altre uguali a zero (base canonica di $\mathbb{R}^n$)

Derivate parziali / direzionali e o piccolo

In una variabile dire $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

era (è) equivalente a dire

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

In 2 variabili la definizione di $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ è equivalente a

$$f(x_0 + h, y_0) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + o(h)$$

Analogamente

$$f(x_0, y_0 + h) = f(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)h + o(h)$$

In una variabile f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0

In 2 o più variabili NON è più vero! Esistono funzioni che non sono continue in (x_0, y_0) ma hanno in (x_0, y_0) tutte le derivate direzionali, addirittura $= 0$.

DIFFERENZIALE

In una variabile: f è diff. in x_0 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$$

In due variabili: f è diff. in (x_0, y_0) se esistono $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \alpha_1 h + \alpha_2 k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

↑ ↑
movimento indipendente
su x e y

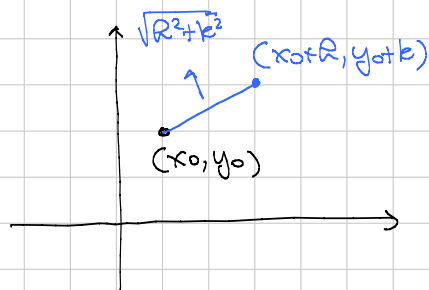
Cosa vuol dire $o(\sqrt{h^2 + k^2})$?

Si dice che

$$g(h, k) = o(\sqrt{h^2 + k^2}) \text{ se}$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{g(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

↑ Limite in 2 variabili



Conclusione: le definizioni di der. dir. e parziali coinvolgono limiti in 2 variabili

La definizione di diff. contiene un limite in 2 variabili

MATEMATICA I

Titolo nota

ORA 59

15/11/2007

Diff. in 2 variabili

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \alpha_1 h + \alpha_2 k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

Teorema Se f è diff. in (x_0, y_0) allora f è continua in (x_0, y_0)
 Inoltre esistono le derivate parziali in (x_0, y_0) e
 $f_x(x_0, y_0) = \alpha_1$, $f_y(x_0, y_0) = \alpha_2$

Diff. e derivate direzionali Quando calcolo la derivata direz.
 devo calcolare $\vec{v} = (\alpha, \beta)$

$$f(x_0 + \underbrace{\alpha h}_h, y_0 + \underbrace{\beta h}_k) = f(x_0, y_0) + \underbrace{f_x(x_0, y_0)}_{\alpha_1} \underbrace{\alpha h}_h + \underbrace{f_y(x_0, y_0)}_{\alpha_2} \underbrace{\beta h}_k + o(\sqrt{\alpha^2 h^2 + \beta^2 h^2}) \leftarrow o(|h| \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) = o(|h|)$$

Quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta h) - f(x_0, y_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f_x(x_0, y_0) \alpha + f_y(x_0, y_0) \beta] h + o(|h|)}{h}$$

$$= f_x(x_0, y_0) \alpha + f_y(x_0, y_0) \beta = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$$

Quindi: NOTE le derivate parziali f_x, f_y e noto il vettore $\vec{v}$,
 questa formula permette di calcolare $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$

GRADIENTE

Si dice gradiente di f nel p.to (x_0, y_0) il
 vettore che ha come componenti le
 derivate parziali

Si indica con

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{NABLA}}}{\nabla} f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$

Gradiente e derivate direzionali.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) &= \alpha f_x(x_0, y_0) + \beta f_y(x_0, y_0) & \vec{v} = (\alpha, \beta) \\ &= \vec{v} \cdot \nabla f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Supponiamo che $\vec{v}$ sia un vettore

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \underbrace{\|\vec{v}\|}_{\substack{1 \\ \text{Numero fisso} \\ \text{una volta scelto } (x_0, y_0)}} \cdot \underbrace{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}_{\text{Numero fisso}} \cdot \cos \theta$$

Scegliere una direzione $\vec{v}$ equivale a scegliere θ .

Se scegli $\theta = 0^\circ$, cioè $\vec{v}$ nella stessa direz. di $\nabla f(x_0, y_0)$ la derivata direz. è max

Con $\theta = 180^\circ$, cioè $\vec{v}$ opposto al gradiente, la deriv. direz. è minima (e opposta rispetto alla prec.)

Con $\theta = 90^\circ$ e $\theta = 270^\circ$, cioè $\vec{v} \perp \nabla f(x_0, y_0)$, la deriv. direz. è nulla.

Geometricamente: il gradiente rappresenta la direzione nella quale la funzione sale con la massima pendenza.

Riscrittura di tutto in notazione vettoriale

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{il differenziale diventa}$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + o(|h|)$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 vettore vettore vettore gradiente vettore norma di h

$\uparrow$ $\uparrow$
 prod. scalare

Dato una direzione $\vec{v}$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \vec{v} \cdot \nabla f(x_0)$$

Conclusione: se conosco parziali, conosco tutto!

Come si calcolano le derivate parziali? Come quelle in una variabile!

Esempi

$$f(x, y) = x^2 + y$$

$$f_x(x, y) = 2x$$

$$f_y(x, y) = 1$$

$$f(x, y) = x^2 y$$

$$f_x(x, y) = 2xy \quad f_y(x, y) = x^2$$

Calcolando f_x , posso supporre y costante. È come se fosse bx^2 ,

$$f(x, y) = x \sin y$$

$$f_x(x, y) = \sin y$$

$$f_y = x \cos y$$

$$f(x, y) = y \sin(x+y)$$

$$f_x(x, y) = y \cos(x+y)$$

$$y \text{ deve essere costante} \quad b \sin(b+x) \rightsquigarrow b \cos(b+x)$$

$$\text{Calcolo } f_y \quad \text{Sostituisco mentalmente } y \sin(a+y)$$

$$\rightsquigarrow \sin(a+y) + y \cos(a+y)$$

$$f_y(x, y) = \sin(x+y) + y \cos(x+y)$$

$$f(x, y) = \frac{x}{y} \quad f_x \rightsquigarrow \frac{x}{y} \rightsquigarrow \frac{1}{y}$$

$$f_x(x, y) = \frac{1}{y}$$

$$f_y \rightsquigarrow \frac{a}{y} \rightsquigarrow -\frac{a}{y^2}$$

$$f_y(x, y) = -\frac{x}{y^2}$$

$$f(x, y) = \frac{\log x}{\sin y}$$

$$f_x(x, y) = \frac{1}{x \sin y}$$

$$f_y(x, y) = \log x \left(-\frac{1}{\sin^2 y} \right) \cdot \cos y$$

$$f(x, y) = x^y$$

$$f_x(x, y) = y x^{y-1}$$

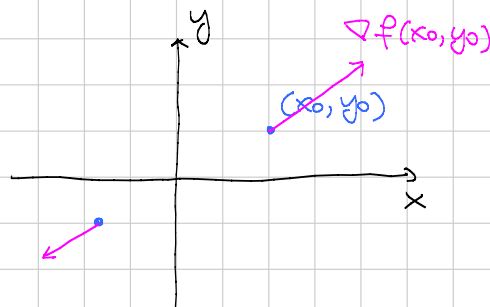
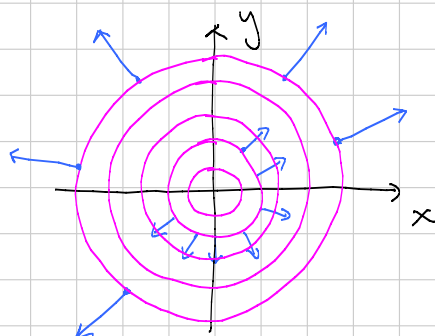
$$x^b$$

$$f_y(x, y) = x^y \cdot \log x$$

$$a^y$$

Esempi $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$$



∇f è $\perp$ alle linee di livello

La norma del gradiente è
proporzionale alla pendenza

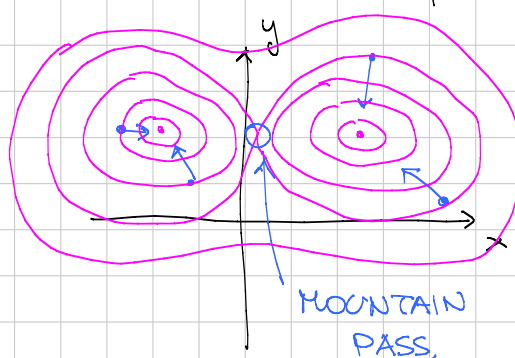
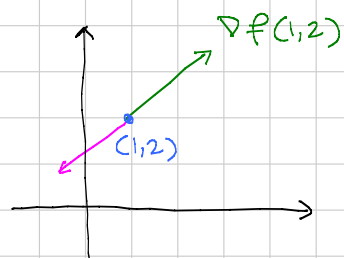
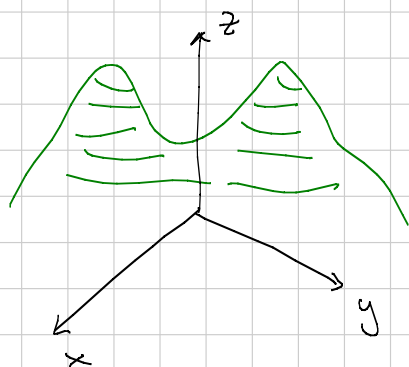
$$f(x, y) = e^{xy} + 3x + 2y^2. \text{ Consideriamo } (x_0, y_0) = (1, 2)$$

Se metto una pallina nel p.to corrispondente a (x_0, y_0)
dove andrà?

Opposto al gradiente!

$$\nabla f(x, y) = (ye^{xy} + 3, xe^{xy} + 4y)$$

$$\nabla f(1, 2) = (2e^2 + 3, e^2 + 8)$$



MATEMATICA I

ORA 60

Titolo nota

16/11/2007

MAX E MIN PER FUNZIONI DI 2 VARIABILI

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & \text{Max} \{ f(x,y) : (x,y) \in A \} \\ & \text{min} \{ \quad \quad \quad \} \end{aligned}$$

"MONDO Z": max e min
quota raggiunta da
 $f(x,y)$ al variare di
 (x,y) in A .

Gli eventuali p.ti (x,y) in cui tali quote max/min vengono raggiunte si chiamano p.ti di max/min.

TEO. WEIERSTRASS Sia A un insieme CHIUSO E LIMITATO.

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA

Allora Max e min esistono

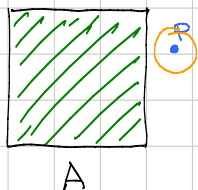
Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice LIMITATO se esiste $R \geq 0$ tale che A è contenuto nel cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio R .

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice CHIUSO se

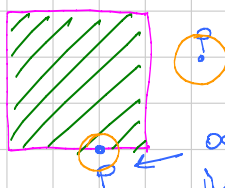
Brutalmente: contiene il suo bordo

Più rigorosamente: $\forall P \notin A$ esiste $\varepsilon > 0$ t.c., il cerchio con centro in P e raggio ε non tocca A .

Esempio 1 Sia $A =$ quadrato bordo compreso

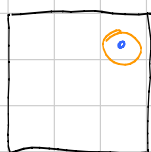


Sia $B =$ quadrato senza bordo



ogni cerchio con centro
in questo P tocca
l'insieme $B \Rightarrow B$ NO CHIUSO

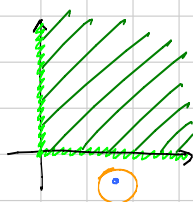
Esempio 2 Sia A il bordo di un quadrato. È chiuso? SI



È limitato? SI

Esempio 3 Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$

= 1° quadrante



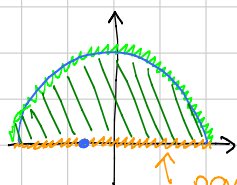
NO LIMITATO

SI CHIUSO

Esempio 4 $A =$ una retta. NO LIMITATO SI CHIUSO

Esempio 5 $A = \mathbb{R}^2$ NO LIMITATO SI CHIUSO

Esempio 6 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\}$



SI LIMITATO

NO CHIUSO

↑ ponte di bordo esclusa
— o — o —

Saputo da W. che Max/min esistono. Dove cercare i candidati p.ti di max/min?

① STAZIONARI INTERNI: p.ti (x,y) interni ad A (non sul bordo) tali che

sistema di 2 eq. in 2 incognite $\left\{ \begin{array}{l} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{array} \right.$ cioè $\nabla f(x,y) = 0$

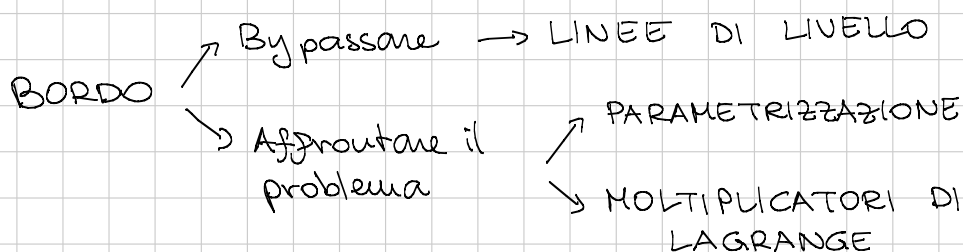
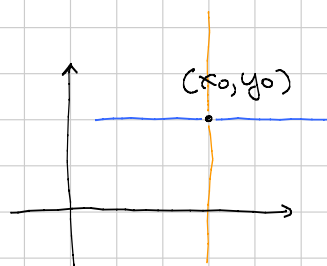
↑
COME
VETTORE

② SINGOLARI INTERNI: p.ti (x,y) interni ad A in cui f non è differenziabile

③ BORDO → ORA SONO INFINITI PUNTI

Oss. Perché queste 3 categorie, basta dimostrare che nei
pti di max / min interni se esistono le deriv.
parziali queste si annullano

Supponiamo che (x_0, y_0) sia p.to di max.
Allora la funzione di 1 variabile
 $f(x, y_0)$ ha un max nel p.to $x = x_0$,
dunque la sua derivata è $= 0$. Ma
la sua derivata è $f_x(x_0, y_0)$.
Idem nell'altra direzione.
— 0 — 0 —

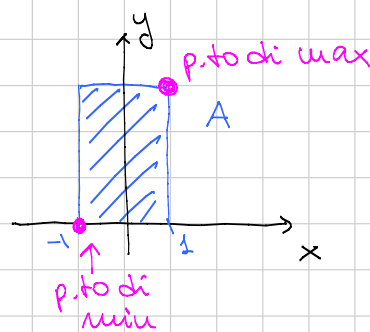


Max e min con linee di livello

Esempio 1 Max $\{2x + 3y : (x, y) \in [-1, 1] \times [0, 3]\}$
min $f(x, y)$ Descrizione insieme A

A è chiuso e limitato
 $\Rightarrow$ max e min esistono

Per avere la funzione massima
devo prendere x più grande
possibile e y più grande possibile.
Contrario per il min.



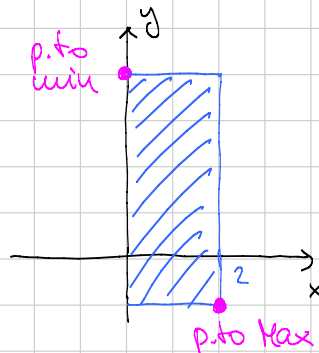
Max = 11 p.to di max: $(1, 3)$

min = -2 p.to di min: $(-1, 0)$

Esempio 2 $\{x - 2y : (x, y) \in [0, 2] \times [-1, 4]\}$

$W \Rightarrow$ max e min esistono

Per avere valori max della funzione devo prendere x più grande possibile e y più piccolo possibile. Contrario per il minimo



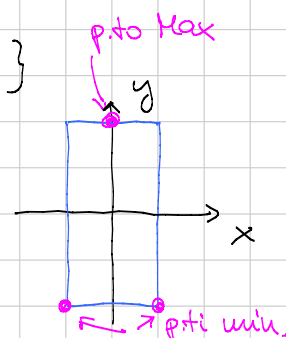
Max = 4 p.to di max : (2, -1)

min = -8 p.to di min : (0, 4)

Esempio 3 $\{y - 2x^2 : (x, y) \in [-1, 1] \times [-2, 2]\}$

$W \Rightarrow$ max e min esistono

Se voglio la funzione max devo prendere y più grande possibile e togliere il meno poss.



con il termine $-2x^2$, cioè prendere $x = 0$

Per avere funzione minima prendo y minimo possibile e x^2 + grande che posso

Max = 2 p.to di max : (0, 2)

min = -4 p.to di min : (-1, -2) e (1, -2)

$$f(-1, -2) = f(1, -2) = -4$$

In tutti gli esempi fatti i p.to di max/min stanno sul bordo.

MATEMATICA I

ORA 61

Titolo nota

16/11/2007

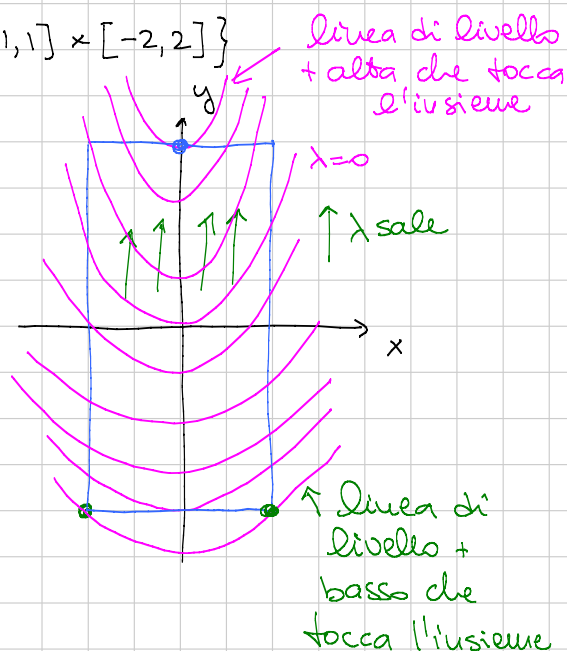
Esempio $\{y - 2x^2 : (x, y) \in [-1, 1] \times [-2, 2]\}$

$$f(x, y) = y - 2x^2$$

Linee di livello: $y - 2x^2 = \lambda$

$$y = 2x^2 + \lambda$$

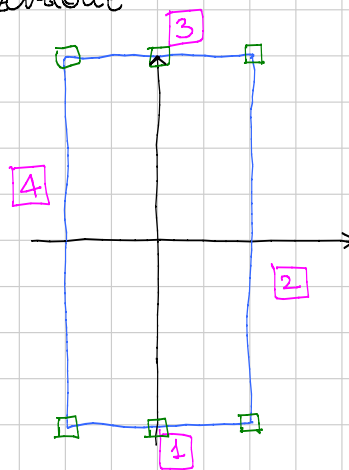
Trovare il/i p.to di max
equivale a trovare la linea
di livello + alta che tocca
l'insieme A



Stesso esempio con metodo parametrizzazione

 $W \Rightarrow$ max e min esistono.② singolari interni: $\emptyset$ perché $f(x, y)$ è derivabile ovunque① stazionari interni: devo risolvere

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -4x = 0 \\ 1 = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{IMPOSSIBILE} \Rightarrow \text{Nessun p.to staz. interno}$$

③ Bordo

$$1 = \{(t, -2) : t \in [-1, 1]\}$$

$$2 = \{(1, t) : t \in [-2, 2]\}$$

$$3 = \{(t, 2) : t \in [-1, 1]\}$$

$$4 = \{(-1, t) : t \in [-2, 2]\}$$

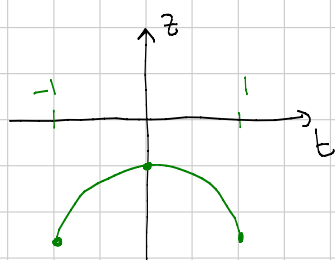
PARAMETRIZZ.
4 PEZZI
DI BORDO

Considero le restrizioni di f pezzo per pezzo.

Pezzo 1 $\varphi_1(t) = f(\underbrace{t, -2}_{\text{param. del pezzo 1}}) = -2 - 2t^2$ funzione di 1 variabile

Studio $\varphi_1(t)$ per $t \in [-1, 1]$ $\leftarrow$ qui varia il parametro nel pezzo 1

↓
rappresenta l'altezza alla quale si trova un osmino che percorre il pezzo 1 del bordo

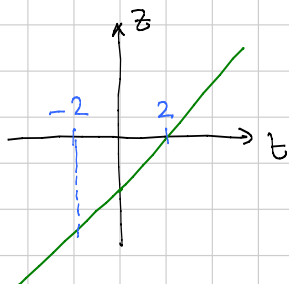


p.to di max: $t=0$ Nell'insieme A corrisponde a $(0, -2)$

p.ti di min: $t = \begin{cases} -1 \rightarrow \text{corr. a } (-1, -2) \\ 1 \rightarrow \text{corr. a } (1, -2) \end{cases}$

↑
basta sostituire il valore di t nella param. del pezzo 1

Pezzo 2. $\varphi_2(t) = f(1, t) = t - 2$ che studio per $t \in [-2, 2]$



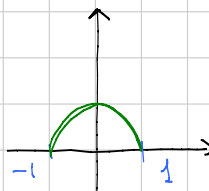
p.to di max: $t=2$ che corrisponde nell'insieme A a $(1, 2)$

p.to di min: $t=-2$ che corrisponde nell'insieme A a $(1, -2)$

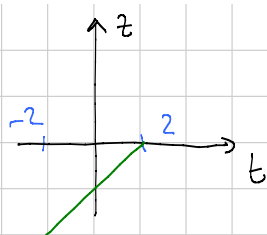
Pezzo 3 $\varphi_3(t) = f(\underbrace{t, 2}_{\text{param. 3}}) = 2 - 2t^2$ che studio per $t \in [-1, 1]$

p.ti di max/min per

$t = -1, 0, 1$



Pezzo 4 $\varphi_4(t) = f(-1, t) = t - 2$ con $t \in [-2, 2]$



p.ti di max / min per $t=2$ e $t=-2$

Dopo 4 parametrizzazioni abbiamo individuato 6 p.ti candidati ad essere p.ti di max / min.

$$(-1, -2)$$

$$f(-1, -2) = -4$$

$$(0, -2)$$

$$(1, -2)$$

$$f(1, -2) = -4$$

$$(-1, 2)$$

$$(0, 2)$$

$$(1, 2)$$

Sostituisco i 6 p.ti:
dove vale di + è / sono
i p.ti di max
dove vale di meno sono
i p.ti di min.

Esempio 2 $\{ |y - 2x^2| : (x, y) \in [-1, 1] \times [-2, 2] \}$

Studiato max / min di $f(x, y)$ è facile dedurre
max / min di $|f(x, y)|$

$$\begin{aligned} \text{Max } \{ f(x, y) : (x, y) \in A \} &= 2 \\ \text{min } \{ f(x, y) : (x, y) \in A \} &= -4 \end{aligned}$$

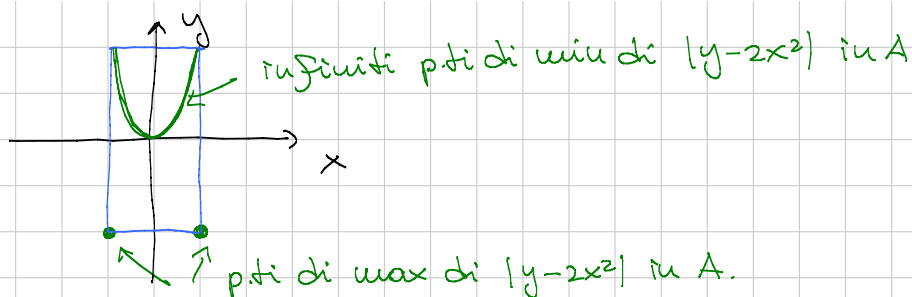
p.to di max: $(0, 2)$

p.ti di min: $(-1, -2)$ e $(1, -2)$

Quando metto il valore assoluto, per il max se la gioco
il vecchio max ed il vecchio min cambiato di segno

$$\text{Max } \{ |f(x, y)| : (x, y) \in A \} = 4 \quad \text{p.ti di max: } (-1, -2) \text{ e } (1, -2)$$

$$\text{min } \{ |f(x, y)| : (x, y) \in A \} = 0 \quad \begin{aligned} &\text{p.ti di min: tutti i punti} \\ &\text{in cui } f(x, y) = 0, \text{ cioè} \\ &y - 2x^2 = 0, \text{ cioè } y = 2x^2 \end{aligned}$$

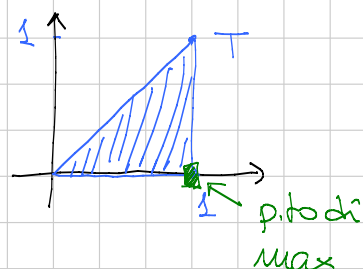


Esempio 3 $\{x-2y : (x,y) \in T\}$

$\Rightarrow$ max e min esistono

Per avere funzione max devo prendere x più grande che posso e y più piccolo

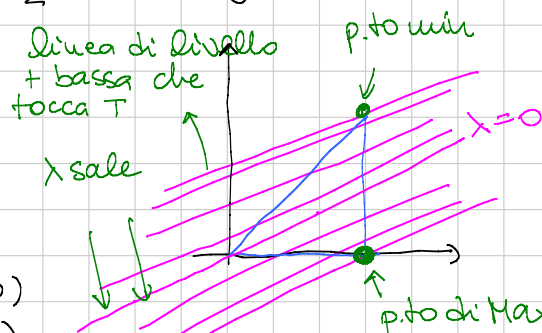
Lo stesso discorso per il min non funziona (verrebbe $(0,1)$ che però non sta in T)



Linee di livello : $f(x,y) = \lambda \quad x-2y = \lambda$

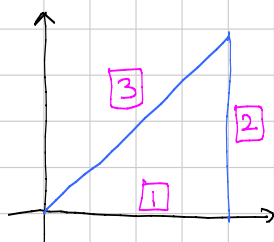
$$x - \lambda = 2y$$

$$y = \frac{x}{2} - \frac{\lambda}{2} \quad \text{famiglia di rette parallele}$$



Max = 1 p.to di max : $(1,0)$

min = -1 p.to di min : $(0,1)$



$$[1] = \{(t,0) : t \in [0,1]\}$$

$$[2] = \{(1,t) : t \in [0,1]\}$$

$$[3] = \{(t,t) : t \in [0,1]\}$$

MATEMATICA I

ORA 62

Titolo nota

20/11/2007

MULTIPLICATORI DI LAGRANGE

Metodo per cercare candidati p.ti di max./min sul bordo

Def. Sia $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. L'insieme

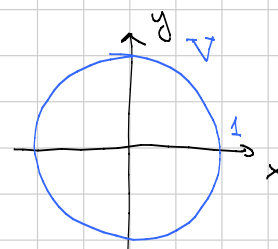
$$V = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Phi(x, y) = 0 \}$$

Equazione di V

si dice LUOGO DI ZERI della funzione $\Phi(x, y)$.

Esempio

$$\begin{aligned} V &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 + y^2 - 1}_{\Phi(x, y)} = 0 \} \end{aligned}$$

Metodo dei moltiplicatori

Siano $\Phi(x, y)$ e $f(x, y)$ 2 funzioni differenziabili. Sia

V il luogo di zeri di $\Phi(x, y)$.

Allora gli eventuali p.ti di max/min della funzione $f(x, y)$ sull'insieme V si trovano in una delle seguenti 2 categorie

Soluzioni del 1° sistema

→ PUNTI SINGOLARI DI V

$$\begin{cases} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{3 equazioni, 2 incognite} \\ \text{non ha soluzioni} \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow x \text{ e } y \\ \text{(spesso questo sistema} \\ \text{non ha soluzioni)} \end{array}$$

Soluzioni del 2° sistema

→ PUNTI STAZIONARI SU V

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda \Phi_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda \Phi_y(x, y) \\ \Phi(x, y) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{3 equazioni, 3 incognite: } x, y, \lambda \\ \text{(spesso questo sistema ha un nu-} \\ \text{mero finito di soluzioni)} \end{array}$$

Operativamente Devo fare max/min di $f(x,y)$ su un insieme V

- ① Scrivo V come luogo di zeri di una funzione $\Phi(x,y)$
- ② Risolvo il primo sistema: tutte le soluzioni ottenute sono candidati
- ③ Risolvo il secondo sistema: prendo le terne (x,y,λ) che risolvono il sistema, dimentico il λ , e le coppie (x,y) così ottenute sono i candidati.

Oss. Il 1° sistema cerca i p.ti di V (vedi 3° eq.) in cui $\nabla\Phi$ si annulla

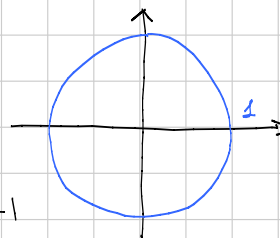
Il 2° sistema cerca i p.ti di V (vedi 3° eq.) in cui

$$\nabla f = \boxed{\lambda} \nabla \Phi, \text{ cioè } \nabla f \text{ è multiplo di } \nabla \Phi$$

↑
MULTIPLICATORE

Esempio 1 $\begin{matrix} \text{Max} \{ x+3y : x^2+y^2=1 \} \\ \text{min} \{ \quad \quad \quad \} \end{matrix}$ $f(x,y) = x+3y$

L'insieme su cui cerco max/min è la circonferenza (SOLO BORDO).



L'insieme è luogo di zeri di $\Phi(x,y) = x^2+y^2-1$

1° sistema

$$\begin{cases} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \rightarrow x=0 \\ \rightarrow y=0 \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \rightarrow x=0 \\ \rightarrow y=0 \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} \text{incompatibili con} \\ \text{3° eq.} \end{matrix}$$

2° sistema

$$\begin{cases} f_x = \lambda \Phi_x \\ f_y = \lambda \Phi_y \\ \Phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 3 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$$1^a \text{ eq.} \rightarrow x = \frac{1}{2\lambda}$$

$$2^a \text{ eq.} \rightarrow y = \frac{3}{2\lambda}$$

(λ non può essere $=0$, altrimenti 1^a e 2^a eq. sono impossibili)

Sostituisco nella 3^a eq. $\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 1$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow 10 = 4\lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

Dato λ , calcolo x e y

$$\lambda = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \rightarrow x = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2 \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad y = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \quad y = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

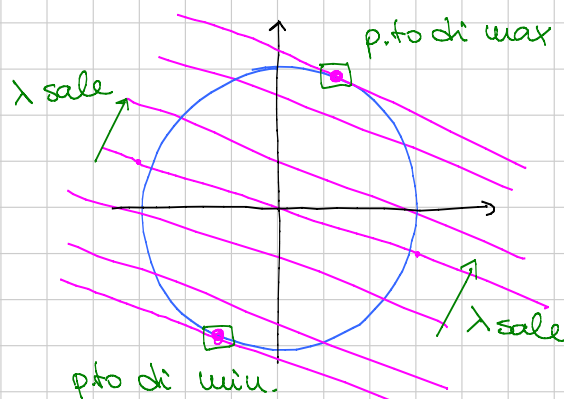
Candidati: $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$
PUNTO DI MAX

$\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$
PUNTO DI MIN

In termini di linee di livello

$$f(x,y) = \lambda, \quad x+3y = \lambda$$

$$y = -\frac{x}{3} + \frac{\lambda}{3}$$



Esempio 2

$$\max_{\min} \{ y - x^2 : x^2 + y^2 = 1 \} \quad f(x,y) = y - x^2$$

insieme come prima

$W \Rightarrow \max$ e $\min$ esistono

1^o sistema: stesso dell'esempio precedente $\Rightarrow$ nessuna soluzione

2° sistema : $\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x = 2\lambda x & \rightarrow \lambda x + x = 0 \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

1° eq.

$$x(\lambda + 1) = 0$$

$$x = 0$$

(3° eq.)

$$y^2 = 1$$

$$\downarrow$$

$$y = \pm 1$$

$$\downarrow$$

$$(0, 1), (0, -1)$$

$$\lambda = -1$$

(2° eq.)

$$1 = -2y \rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$\downarrow$$

(3° eq.)

$$x^2 + \frac{1}{4} = 1, \quad x^2 = \frac{3}{4}, \quad x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

In totale ho 4 candidati:

Sostituisco in $f(x, y) = y - x^2$

$$f(0, 1) = 1$$

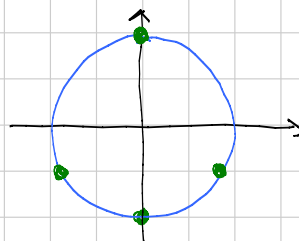
$$f(0, -1) = -1$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{4}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{4}$$

Max: 1 p.to di max: $(0, 1)$

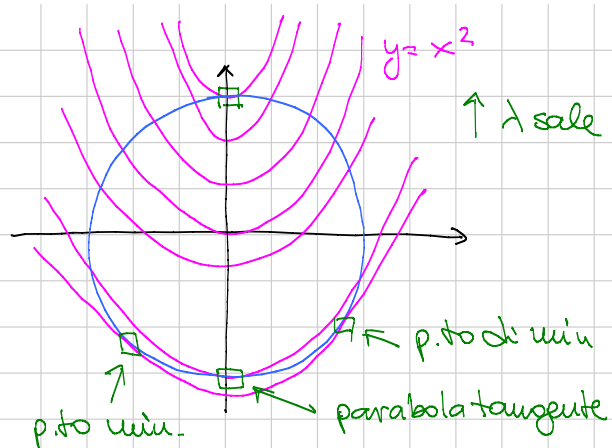
min: $-\frac{5}{4}$ p.to di min: $\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$



Linee di livello

$$y - x^2 = \lambda$$

$$y = x^2 + \lambda$$



MATEMATICA I

ORA 63

Titolo nota

20/11/2007

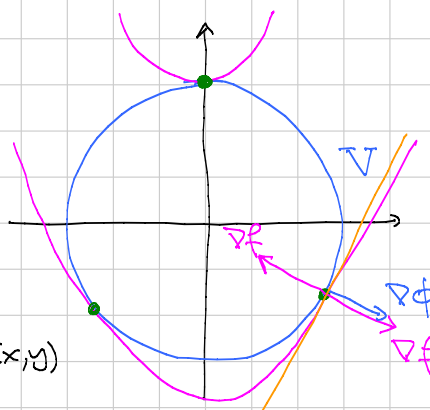
Giustificazione "brutale" del metodo dei moltiplicatori

FATTO 1 Nei p.ti di max/min
le linee di livello
della funzione $f(x,y)$
sono tg. all'insieme V

FATTO 2 L'insieme V è una linea
di livello della funzione $\phi(x,y)$

FATTO 3 Il gradiente di una funzione è $\perp$ alle linee di livello
della funzione stessa

FATTO 4 ∇f e $\nabla \phi$ devono essere perpendicolari alla stessa cosa, dunque
sono $\parallel$, dunque sono uno multiplo dell'altro.

**Esempio 1**

$$\max_{\min} \{x^2 + 2y^2 : x^4 + y^4 \leq 1\}$$

$f(x,y) = x^2 + 2y^2$ Come è fatto l'insieme $x^4 + y^4 \leq 1$?

È limitato? Sì: perché per forza $x^4 \leq 1$, cioè $|x| \leq 1$
e per forza $y^4 \leq 1$, cioè $|y| \leq 1$

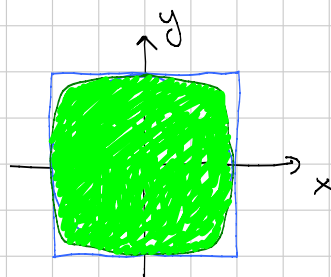
Quindi l'insieme è contenuto nel quadrato $[-1,1] \times [-1,1]$

Inoltre il cerchio con centro in $(0,0)$
e raggio 1 è contenuto nell'insieme
dato

Dici. Sia x_0, y_0 un punto del cerchio.
Allora $x_0^2 + y_0^2 \leq 1$. Ma allora

$$x_0^4 + y_0^4 \leq x_0^2 + y_0^2 \leq 1, \text{ quindi } x_0^4 + y_0^4 \leq 1, \text{ quindi}$$

$\uparrow$ perché x_0 e y_0 stanno in $[-1,1]$ (x_0, y_0) stanno nell'insieme



Quindi l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1\} = A$ è intermedio tra il cerchio ed il quadrato.

Oss. Gli insiemi $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2k} + y^{2k} \leq 1\}$ sono dei "televisori sempre + quadrati" all'aumentare di k .

Modo alternativo per vederlo:

$$x^4 + y^4 \leq 1 \Leftrightarrow y^4 \leq 1 - x^4 \Leftrightarrow -\sqrt[4]{1-x^4} \leq y \leq \sqrt[4]{1-x^4}$$

Non resta che studiare la funzione $\sqrt[4]{1-x^4}$

Troviamo a max/min di $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ su A .

$\Rightarrow$ max e min. esistono

Cerco i candidati nelle 3 categorie

① Stazionari interni: $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 4y = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{(0,0)}$

② Singolari interni: $\emptyset$ perché $f(x,y)$ è sempre differenziabile

③ Bordo: il bordo di A è l'insieme

$$\mathcal{V} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^4 + y^4 - 1}_{\phi(x,y)} = 0\}$$

Applico il metodo dei moltiplicatori

[3.1] Punti singolari del bordo = soluzioni 1° sistema

$$\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow x=0 \\ \rightarrow y=0 \end{matrix} \Rightarrow \text{INCOMPATIBILI CON 3° EQ.}$$

3.2 Punti stazionari relativamente al bordo = soluzioni 2° sistema

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 4\lambda x^3 \\ 4y = 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2\lambda x^3 \\ y = \lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} 2\lambda x^3 - x &= 0 \\ \lambda y^3 - y &= 0 \end{aligned}$$

1° eq. $x(2\lambda x^2 - 1) = 0$

$x = 0$

↓ (3° eq.)

$y^4 = 1$

$(0, 1), (0, -1)$

$2\lambda x^2 - 1 = 0$

↓ (2° eq.)

$y(\lambda y^2 - 1) = 0$

$y = 0$

↓ (3° eq.)

$x^4 = 1$

$(1, 0), (-1, 0)$

$\lambda y^2 - 1 = 0$

↓

→ Nel caso rimasto abbiamo che $\lambda y^2 - 1 = 0$ e $2\lambda x^2 - 1 = 0$

quindi: $x^2 = \frac{1}{2\lambda}$, $y^2 = \frac{1}{\lambda}$. Eleva alla 2° e metti nella 3° eq.

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1; \quad \frac{5}{4\lambda^2} = 1$$

$x^4 + y^4 = 1$

$\rightarrow \lambda^2 = \frac{5}{4} \quad \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow x^2 = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad y^2 = \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \text{ quindi}$

$(x, y) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}\right) \rightarrow \boxed{4 \text{ PUNTI}}$

$\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow x^2 = \frac{1}{2\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow \text{NULLA}$

In conclusione abbiamo 3 candidati

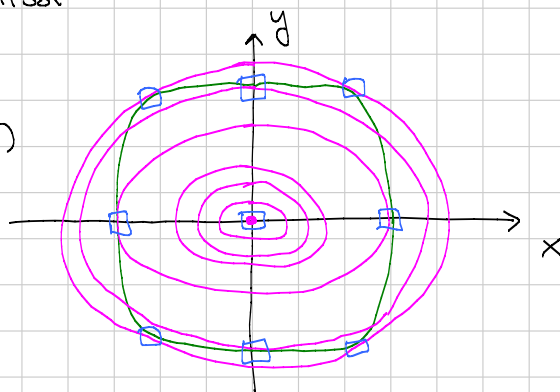
$(0,0) \rightarrow$ stat. interno

$(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$, e i 4 di sopra. Non resta che sostituire...

In termini di linee di livello $f(x,y) = \lambda$

$x^2 + 2y^2 = \lambda$ Famiglia di ellissi

Il livello + basso corrisponde a $\lambda=0$, che corrisponde a $(0,0)$
Quando λ sale ottengo ellissi sempre + grandi



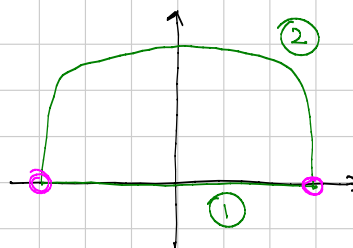
Utilizzo misto di moltiplicatori e altre tecniche

$$\max_{\min} \{ x^2 + 2y^2 : x^4 + y^4 \leq 1, y \geq 0 \}$$

INSIEME A

Il bordo di A è costituito da

- * un pezzo del bordo del televisore ②
- * un segmento ①



Quindi: pezzo ① si fa con parametrizzazione. Per il pezzo ② posso usare i moltiplicatori con $\phi(x,y) = x^4 + y^4 - 1$ ma devo

- 1°: escludere i candidati nella parte di televisore che non sto considerando
- 2°: INCLUDERE D'UFFICIO gli estremi del tratto di bordo che sto considerando

MATEMATICA I

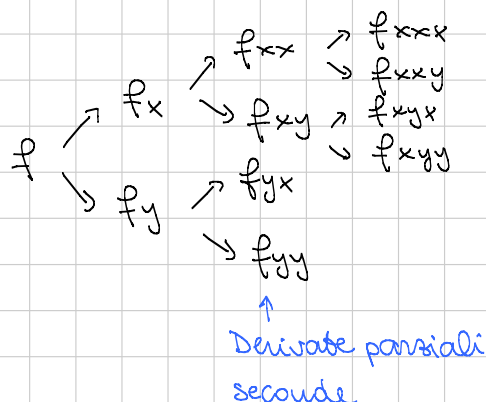
ORA 64

Titolo nota

21/11/2007

DERIVATE SUCC. PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

In 2 variabili

 $f(x,y)$ 

In generale, per una
funzione di 2 variabili
le derivate parziali
 k -esime sono 2^k ,
per una funzione di
 n variabili sono n^k

Esempio $f(x,y) = y \cos(xy)$

$$f_x(x,y) = -y^2 \sin(xy)$$

$$f_y(x,y) = \cos(xy) + y(-x \sin(xy)) = \cos(xy) - xy \sin(xy)$$

$$f_{xx}(x,y) = -y^3 \cos(xy)$$

$$f_{xy}(x,y) = -2y \sin(xy) - y^2 x \cos(xy)$$

$$\begin{aligned} f_{yx}(x,y) &= -y \sin(xy) - y \sin(xy) - xy \cdot y \cos(xy) \\ &= -2y \sin(xy) - y^2 x \cos(xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{yy}(x,y) &= -x \sin(xy) - x \sin(xy) - xy \cdot x \cos(xy) \\ &= -2x \sin(xy) - x^2 y \cos(xy) \end{aligned}$$

Teorema In tutti i casi decenti (ad esempio se f_{xy} e f_{yx} esistono e sono continue) si ha che

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Corollario Nel calcolo una derivata parziale qualunque (ad esempio f_{xyyxxy}) posso eseguire le operazioni in qualunque ordine (ad esempio $f_{xxxxxyyy}$)

Conseguenza: le derivate parziali k -esime di una funzione di 2 variabili "decente" sono in realtà non 2^k , ma $(k+1)$ perché conta solo quante volte derivo rispetto a x e lo posso fare

$$\underbrace{0, 1, 2, \dots, k \text{ volte}}_{k+1 \text{ possibilità}}$$

Ad esempio le derivate parziali quante sono: $f_{xxxx}, f_{xxxxy}, f_{xxxyy}, f_{xyyy}, f_{yyyy}$

f_{xxxxy} la posso realizzare in 4 modi diversi:

$$f_{xxxxy}, f_{xxxyx}, f_{xyxxx}, f_{yxxx} \leftarrow \text{TUTTE UGUALI}$$

Notazione

$$\frac{\partial^{37+15} f}{\partial x^{37} \partial y^{15}} \leftarrow \text{NOTAZIONE GENERALE}$$

$\uparrow$
 37 volte rispetto ad x
 15 volte rispetto ad y

Esempio 1 $f(x, y) = (\sin x)^{\cos x} + (\arctan y)^{\log y}$

Calcolare $f_{xy}(x, y) = 0$. Infatti

$$f_x(x, y) = \text{Mostro}(x) \quad (\text{il secondo pezzo ha derivata zero rispetto ad } x)$$

$$f_{xy}(x, y) = [\text{Mostro}(x)]_y = 0 \quad \text{perché il Mostro dipende solo dalla variabile } x.$$

Esempio 2 $f(x,y) = 3xy + 7y^2 + \text{Mostro}(x)$

$$f_{yy}(x,y) = 14 \quad f_y = 3x + 14y$$

Esempio 3 $f(x,y) = y \text{ Mostro}(x)$

$$f_{yy}(x,y) = 0$$

Esempi in cui il 1° sistema dei moltiplicatori ha soluzione

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \Phi(x,y) = 0\}$$

$$\begin{cases} \Phi_x(x,y) = 0 \\ \Phi_y(x,y) = 0 \\ \Phi(x,y) = 0 \end{cases}$$

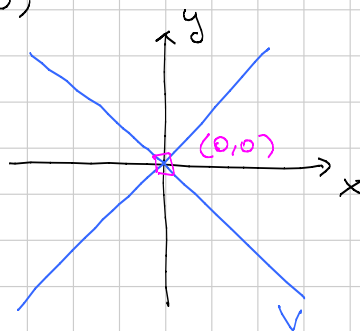
Esempio 1 $\Phi(x,y) = x^2 - y^2$

$$\begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ -2y = 0 \rightarrow y = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{OK con} \\ \text{terza} \\ \text{equazione} \end{array}$$

La soluzione del sistema è il pto $(0,0)$

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}$$

$$(x+y)(x-y) = 0 \quad \begin{array}{l} \rightarrow y = x \\ \rightarrow y = -x \end{array}$$



Esempio 2 $\Phi(x,y) = x^2 - y^3$

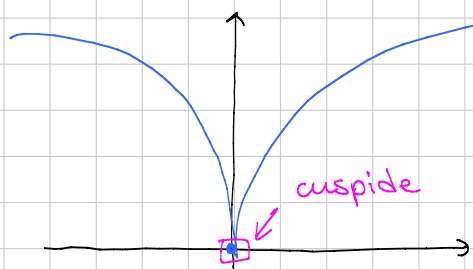
La solus. del sistema è $(0,0)$

$$\begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ -3y^2 = 0 \rightarrow y = 0 \\ x^2 - y^3 = 0 \end{cases} \quad \text{OK}$$

$$x^2 - y^3 = 0 ; y^3 = x^2 ;$$

$$y = \sqrt[3]{x^2}$$

V è il grafico di $\sqrt[3]{x^2}$



MAX E MIN SU INSIEMI NON LIMITATI

Esempio 1 $f(x,y) = x^2 + y^2$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=0$ e x enorme) $\max$ N.E.

$\min = 0$ p.to di $\min$ $(x,y) = (0,0)$ $\inf = 0$

Infatti $f(x,y) \geq 0$ sempre (somma di quadrati)
e $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

Esempio 2 $f(x,y) = x^2 - y^2$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=0$, x enorme)

$\inf = -\infty$ ($x=0$, y enorme)

Esempio 3 $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^4 - y^4$

$\sup = +\infty$ ($y=0$, x enorme)

$\inf = -\infty$ ($x=0$, y enorme poiché y^4 batte y^2)

Esempio 4 $f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^4 + 5}$

$\sup = \frac{1}{5} = \max$ p.to di $\max$: $(0,0)$

*Per avere la frazione + grande possibile, devo prendere il
denom. + piccolo possibile.*

Denominatore ≥ 5 sempre con uguaglianza $\Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

$\inf = 0$ (x e y enormi)

$\min$ N.E. ($f(x,y)$ non si annulla mai)

Esempio 5 $f(x,y) = \arctan(xy) + ye^x$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ (x e y enormi)

$\inf = -\infty$ Metto $x=1$ $\arctan(y) + ye$ e
 y enormemente negativo

Ancora + semplice: $x=0$ ottengo y e poi y enorm. neg.

Esempio 6 $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 3xy$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$. Completamento dei quadrati

$$\begin{aligned} x^2 + 3xy + 2y^2 &= x^2 + 2x \cdot \frac{3}{2}y + 2y^2 \\ &= \boxed{x^2 + 2x \cdot \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}y^2} - \frac{9}{4}y^2 + 2y^2 \\ &= \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 \end{aligned}$$

Se prendo y enorme e $x = -\frac{3}{2}y$, l'espressione diventa enormemente negativa $\Rightarrow \inf = -\infty$.

MATEMATICA I

ORA 65

Titolo nota

21/11/2007

INTEGRALI IN UNA VARIABILE

- ① NOTAZIONI
- ② SIGNIFICATO GEOMETRICO
- ③ "DEFINIZIONE"
- ④ TECNICHE DI CALCOLO

① NOTAZIONI

$$\int_a^b f(x) dx$$

 $\int$ = simbolo di integrale

= deformazione della

lettera S, che a sua volta sta per somma

a e b si chiamano estremi di integrazione

 $f(x)$ si chiama INTEGRANDA dx è un mistero

Si parla di INTEGRALI PROPRI quando

1) la zona di integrazione è un intervallo $[a, b]$, dunque un insieme limitato2) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Limitata, cioè esiste una costante $M \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$ (cioè il grafico è compreso nella striscia tra $-M$ e M)Due varianti Per definizione si pone

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

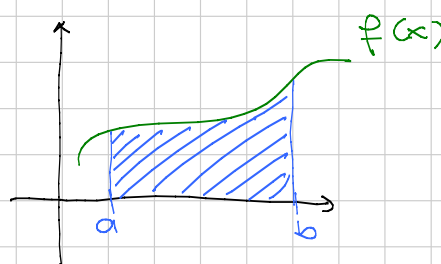
$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

↑ si intende che $b > a$

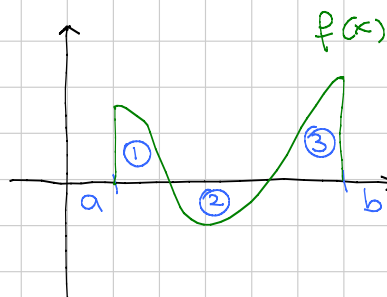
② SIGNIFICATO GEOMETRICO

$$\int_a^b f(x) dx = \text{NUMERO}$$

L'integrale rappresenta
l'AREA CON SEGNO della
parte di piano compresa tra
il grafico di $f(x)$ e l'asse x .



Se la funzione non è
sempre ≥ 0 , l'integrale
tiene conto con il segno +
delle aree sopra l'asse x e
con il segno - delle aree
sotto l'asse x .



$$\int_a^b f(x) dx = \text{Area ①} + \text{Area ③} - \text{Area ②}$$

③ IDEA DELLA DEFINIZIONE

- CASO BANALE
- CASO SEMIBANALE
- CASO GENERALE

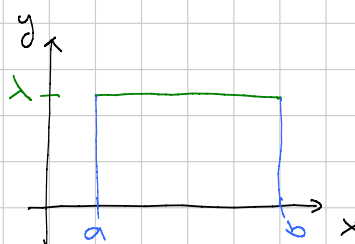
CASO BANALE: $f(x)$ costante in $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \text{area con segno del rettangolo}$$

$$= \lambda (b-a)$$

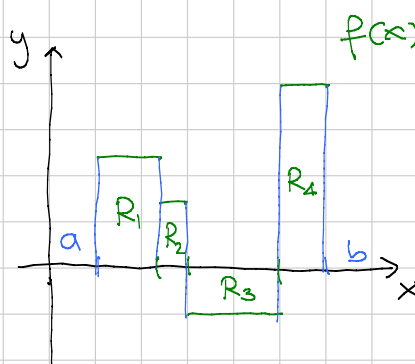
↑
base

↑
altezza con segno ($\lambda > 0 \Rightarrow$ integrale positivo
 $\lambda < 0 \Rightarrow$ " " " negativo)



CASO SEMIBANALE $f(x)$ COSTANTE A TRATTI

In questo caso la parte di piano tra asse x e grafico di $f(x)$ è un'unione finita di rettangoli.



In questo caso

$$\int_a^b f(x) dx = \text{somma algebrica dei rettangoli}$$

Queste funzioni si chiamano

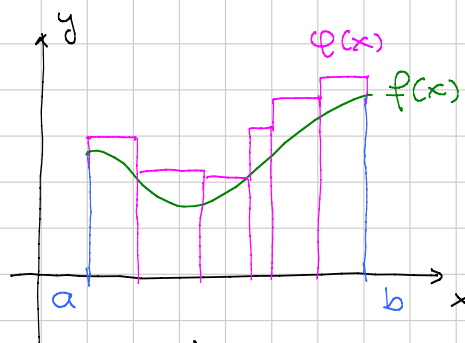
COSTANTI A TRATTI
FUNZIONI A GRADINO
STEP FUNCTIONS

SINONIMI

CASO GENERALE

Considero una qualunque funzione a gradino $\varphi(x)$ che sia $\geq f(x) \forall x \in [a, b]$

Intuitivamente, $\int_a^b f(x) dx$



(che devo ancora definire) è + piccolo di $\int_a^b \varphi(x) dx$ che ho già definito.

Si definisce INTEGRALE SUPERIORE di $f(x)$ in $[a, b]$

l'estremo inferiore di

$\int_a^b \varphi(x) dx$, al variare di $\varphi(x)$ tra tutte le funzioni a gradino t.c. $\varphi(x) \geq f(x) \forall x \in [a, b]$.

Si indica con $I^+(f; [a, b])$

L'integrale INFERIORE di $f(x)$ in $[a,b]$ si definisce come l'estremo superiore di

$\int_a^b \varphi(x) dx$, al variare di $\varphi(x)$ tra

tutte le funzioni a gradino t.c.

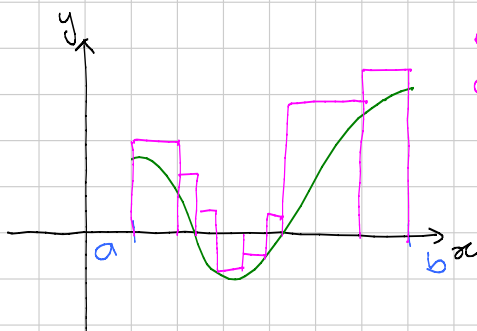
$\varphi(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

Si indica con

$$I^-(f; [a,b])$$



Oss.



esempio di funzione
a gradino $\geq f(x)$

Si ha sempre che $I^+(f; [a,b]) \geq I^-(f; [a,b])$.

Spesso succede che $I^+(f; [a,b]) = I^-(f; [a,b])$.

In questo caso si dice che $f(x)$ è INTEGRABILE in $[a,b]$,
e il valore comune è l'integrale.

Le seguenti classi di funzioni sono integrabili

- * tutte le funzioni continue
- * " " " monotone
- * " " " con un numero finito di punti di discontinuità, in cui esistono limite destro e sinistro

Oss. Il fatto che la funzione sia limitata assicura che
esistono funzioni a gradino $\geq f(x)$ ed
" " " " $\leq f(x)$

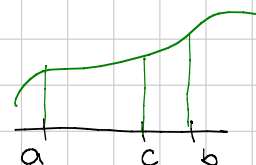
Proprietà dell'integrale

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b (\lambda f(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \text{Nulla di Furbo!!!}$$

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$



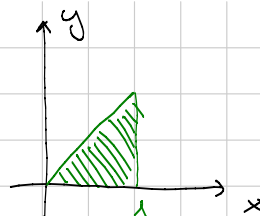
Oss. Quelle che abbiamo usato per costruire I^+ e I^- si chiamano **SOMME DI RIEMANN** (superiori e inferiori)
L'integrale si chiama **INTEGRALE DI RIEMANN**

Esempio 1

$$\int_0^1 x dx =$$

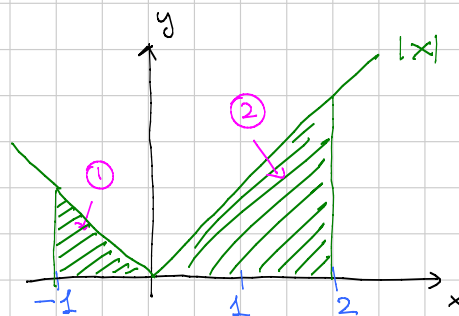
= area triangolo

$$= \frac{1}{2}$$

Esempio 2

$$\int_{-1}^2 |x| dx =$$

$$= \text{Area } \textcircled{1} + \text{Area } \textcircled{2} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

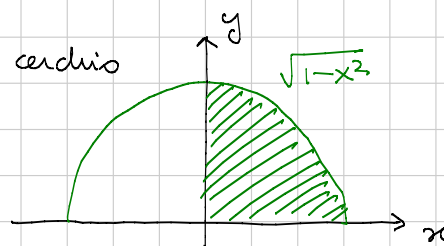
Esempio 3

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{4} \text{ Area cerchio}$$

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

$$y^2 = 1-x^2, \quad y^2 + x^2 = 1$$

$$= \frac{\pi}{4}$$



MATEMATICA I

ORA 66

Titolo nota

21/11/2007

- FUNZIONE INTEGRALE
- PRIMITIVE
- TEO. MEDIA INTEGRALE
- TEO. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

PRIMITIVE Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice PRIMITIVA di $f(x)$ è una qualunque funzione $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile tale che

↑

ANTI-DERIVATIVE

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

FUNZIONE INTEGRALE Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione INTEGRABILE. Si dice funzione integrale la funzione

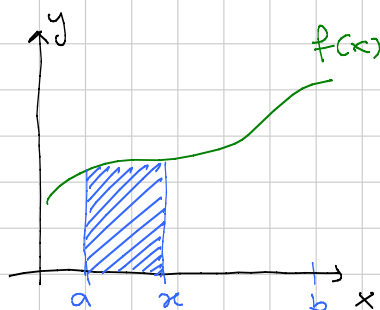
$$I(x) = \int_a^x f(t) dt$$

x ESTREMO
↑ VAR. DI INTEGR.

← Non va bene (doppio uso della x)

$$= \int_a^x f(t) dt$$

definita per $x \in [a, b]$. (Esempio $I(a) = 0$)



TEO. MEDIA INTEGRALE Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, dunque integrabile.

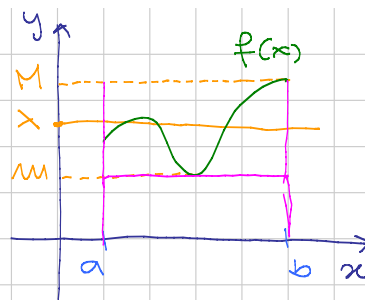
Allora esiste un punto $\xi \in [a, b]$ tale che

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Dim. $W \Rightarrow$ nell'intervallo $[a, b]$
esistono massimo e minimo

Quindi $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

$\int_a^b f(x) dx \leq$ area del rettangolo di
altezza M
 $\geq$ area del rettangolo di altezza m



$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Area rettangolo
di altezza M

Dividendo per $(b-a)$ (che è > 0) ho

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

Questo numero è un valore λ compreso fra
max e min della funzione

Essendo $f(x)$ continua, per il teo. di esistenza degli zeri e
sue estensioni ci sarà un punto ξ in cui $f(\xi) = \lambda$.

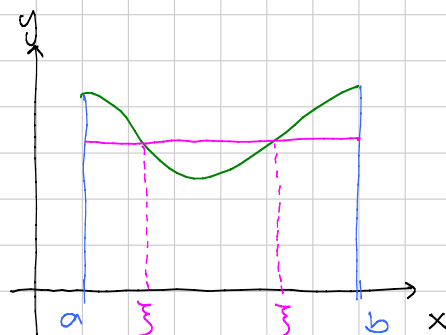
Ciascuno di questi punti ξ è quello cercato.

Interpretazione geometrica. Scriviamo la tesi nella forma

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\xi)$$

"Area sotto la funzione"

Area di un rettangolo che ha
come base il segmento $[a, b]$
e come altezza $f(\xi)$



TEO. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

Sia $I(x) = \int_a^x f(t) dt$ la funzione integrale.

Allora $I(x)$ è una primitiva, cioè $I'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

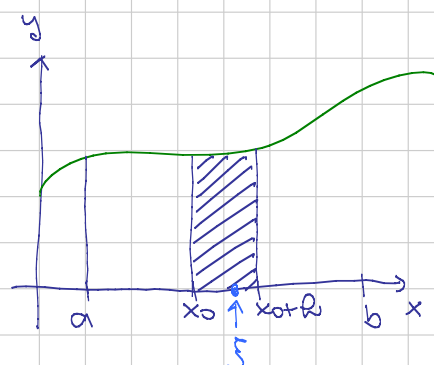
Dim. prendo un p.to $x_0 \in (a, b)$

$$I'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(x_0+h) - I(x_0)}{h} =$$

$I(x_0+h)$ = integrale tra a e x_0+h

$I(x_0)$ = " " " " x_0

$$\text{Quindi } I(x_0+h) - I(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$$



$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$$

integrale su un
intervallo di
lunghezza h

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi)$$

↑
TEO.
MEDIA
INTEGRALE SULL'INTERVALLO
 $[x_0, x_0+h]$

Il p.to ξ sta tra x_0 e x_0+h .

Quando $h \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow x_0$ quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(x_0+h) - I(x_0)}{h} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} f(\xi) = f(x_0)$$

— 0 — 0 —

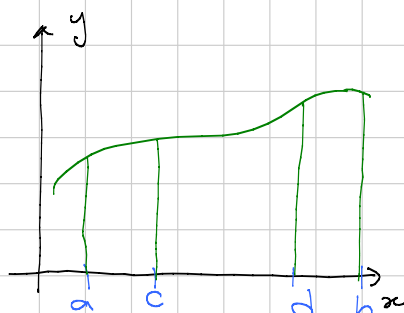
FUNZIONE INTEGRALE E CALCOLO DI INTEGRALI

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $I(x)$ la funzione integrale.

Allora per ogni intervallo $[c, d] \subseteq [a, b]$ si ha che

$$\int_c^d f(x) dx = \int_a^d f(x) dx - \int_a^c f(x) dx$$

$$= I(d) - I(c)$$



Conclusione: se conosco la funzione integrale, so calcolare il valore degli integrali

Ma la funzione integrale è una primitiva di $f(x)$, quindi la ottengo cercando una funzione $I(x)$ t.c. $I'(x) = f(x)$.

FATTO GENERALE: due primitive della stessa funzione $f(x)$, definite su un intervallo $[a, b]$, differiscono tra di loro per una costante.

Perché? Siano $F_1(x)$ e $F_2(x)$ due primitive, cioè

$$F_1'(x) = f(x) \quad F_2'(x) = f(x), \text{ Allora}$$

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1' - F_2' = f(x) - f(x) = 0$$

$\Rightarrow$ La derivata della differenza è 0, quindi la differenza è costante. (prima o poi commentiamo)

Conclusione operativa Voglio calcolare $\int_c^d f(x) dx$.

Devo fare $I(d) - I(c)$. Prendo invece una qualunque primitiva $F(x)$ e calcolo $F(d) - F(c)$. Il risultato è lo stesso!

Infatti: $F(x)$ e $I(x)$ sono 2 primitive, quindi $F(x) = I(x) + \alpha$,
ma allora ↑
costante

$$F(d) - F(c) = (I(d) + \cancel{\alpha}) - (I(c) + \cancel{\alpha}) = I(d) - I(c)$$

Quindi : calcolare gli integrali = calcolare le primitive.

Notazione : con $\int_a^b f(x) dx$ indichiamo una qualunque
↑
 senza
 estremi
 primitiva di $f(x)$

Esempi $\int e^x dx = e^x$ $\int \sin x dx = -\cos x$

$\int \cos x dx = \sin x$ $\int \cos kx dx = \sin kx$

$\int \sin kx dx = -\cos kx$ $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$

$\int \frac{1}{x} dx = \log x$ ← PARLIAMONE

$\int x dx = \frac{x^2}{2}$

$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}$

Funzione $\forall k \in \mathbb{R}$
 $k \neq -1$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$$

$\int_0^8 \sqrt{x} dx =$ devo prendere una primitiva e fare
 la differenza del valore negli estremi

$$= \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} \right]_0^8 = \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} \right]_{x=0}^{x=8}$$

$$= \frac{2}{3} 8 \sqrt{8} - \frac{2}{3} 0 \sqrt{0}$$

$$= \frac{16}{3} \sqrt{8}$$

MATEMATICA I

ORA 67

Titolo nota

22/11/2007

TECNICHE DI INTEGRAZIONE Come calcolare le PRIMITIVE.

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{Cerco una } F \text{ t.c. } F' = f \text{ (una qualunque)}$$

$$= [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

Quanto fa $\int_a^b f'(x) dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$

La primitiva di $f'(x)$ è $f(x)$.

La scrivo nella formula $\int_a^b \varphi'(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a)$

Applico questa formula con $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\varphi'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) g'(x). \quad \text{Quindi}$$

$$\int_a^b [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)] = [\varphi(x)]_{x=a}^{x=b} =$$

$$= [f(x) g(x)]_{x=a}^{x=b}$$

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

FORMULA INTEGRAZIONE PER PARTI "UFFICIALE"
(integrali con termini)

ABUSIVA:

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) g'(x) dx$$

Altro modo di scrivere la formula

$$\int f' G = FG - \int F g' \quad \text{dove si intende } F' = f, G' = g$$

Esempio 1

NON UTILE

$$\int x \cos x \, dx = (\sin x) x - \int 1 \cdot \sin x \, dx$$

$\begin{matrix} \leftarrow f & G \\ G & f \end{matrix} \qquad \begin{matrix} F & G \\ & g & F \end{matrix}$

$$= x \sin x + \cos x$$

Controllare sempre che la primitiva sia quello che deve essere facendo la derivata:

$$\begin{aligned} (x \sin x + \cos x)' &= \cancel{\sin x} + x \cdot \cos x - \cancel{\sin x} \\ &= x \cos x \quad \text{OK.} \end{aligned}$$

Esempio 2

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x \, dx$$

$\begin{matrix} G & f \\ & g & F \end{matrix} \qquad \begin{matrix} G & F \\ & g & F \end{matrix}$

$$= x^2 \cdot e^x - 2 \int x e^x \, dx$$

ora devo calcolare $\int x e^x \, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx$

$\begin{matrix} G & f \\ & g & F \end{matrix} \qquad \begin{matrix} G & F \\ & g & F \end{matrix}$

$$= x \cdot e^x - e^x$$

$$\begin{aligned} \text{In conclusione: } \int x^2 e^x \, dx &= x^2 \cdot e^x - 2x e^x + 2e^x \\ &= (x^2 - 2x + 2) e^x \end{aligned}$$

Quali integrali si fanno con la stessa tecnica? $p(x)$ polinomio

$$\int p(x) \cdot e^x \, dx \quad \int p(x) \cos x \, dx \quad \int p(x) \sin x \, dx$$

Esempio 3

$$\int \log x \, dx = \int \underset{F}{1} \cdot \underset{G}{\log x} \, dx = x \cdot \log x - \int \underset{F}{x} \cdot \underset{G}{\frac{1}{x}} \, dx$$

$$= x \cdot \log x - \int 1 \, dx = x \log x - x$$

Esempio 4

$$\int x^2 \log(x^{20}) \, dx = 20 \int x^2 \log x \, dx$$

$$\int \underset{F}{x^2} \log \underset{G}{x} \, dx = \frac{\underset{F}{x^3}}{3} \cdot \log \underset{G}{x} - \int \frac{\underset{F}{x^3}}{3} \cdot \underset{G}{\frac{1}{x}} \, dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \log x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \log x - \frac{1}{9} x^3$$

Moltiplicare per 20 per
l'esercizio
iniziale

Esempio 5

$$\int \arctan x \, dx =$$

$$= \int \underset{F}{1} \cdot \underset{G}{\arctan x} \, dx = x \cdot \arctan x - \int \underset{F}{x} \cdot \underset{G}{\frac{1}{1+x^2}} \, dx$$

$$= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx$$

$$= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

$$= x \cdot \arctan x - \log \sqrt{1+x^2}$$

N.B. $\left[\log(1+x^2) \right]' = \frac{2x}{1+x^2}$

Esempio 6

GRANDE RITORNO

$$\int \underset{G}{e^x} \cos \underset{F}{x} \, dx = \underset{G}{e^x} \sin \underset{F}{x} - \int \underset{G}{e^x} \sin \underset{F}{x} \, dx$$

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x (-\cos x) - \int e^x (-\cos x) \, dx$$

g F → NO BUONO
g f

G F

g F

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

Tornando all'inizio abbiamo che

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \sin x \, dx}$$

↓
SOSTITUISCO

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

è tornato
l'integrale iniziale,
ma con
segno diverso

Portando l'integrale a sinistra ho che

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$$

Esempio 7

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \underbrace{\cos x}_G \cdot \underbrace{\cos x}_f \, dx = \cos x \cdot \sin x - \int \underbrace{(-\sin x)}_g \cdot \underbrace{\sin x}_f \, dx$$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \, dx \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int 1 \, dx - \int \cos^2 x \, dx$$

↑ Grande aiuto

$$2 \int \cos^2 x \, dx = \cos x \cdot \sin x + x \Rightarrow \boxed{\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x + \frac{x}{2}}$$

Allo stesso modo si fa $\int \sin^2 x dx$

Esempio 8

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin x \cdot \sin^2 x dx = \underbrace{(-\cos x)}_F \cdot \underbrace{\sin^2 x}_G - \int \underbrace{(-\cos x)}_F \cdot \underbrace{2 \sin x \cos x}_G dx$$

$$= -\cos x \cdot \sin^2 x + 2 \int \sin x \cdot \cos^2 x dx \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$= -\cos x \cdot \sin^2 x + 2 \int \sin x - 2 \int \sin^3 x dx$$

↑ Grande ritorno

$$\Rightarrow 3 \int \sin^3 x dx = -\cos x \cdot \sin^2 x + 2 \int \sin x dx$$

$$\Rightarrow \int \sin^3 x dx = \frac{1}{3} [-\cos x \cdot \sin^2 x - 2 \cos x]$$

Esempio 9

$$\int \tan x dx = \int \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} dx$$

F G

$$= \underbrace{(-\cos x)}_F \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_G - \int \underbrace{(-\cos x)}_F \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right)}_G (-\sin x) dx$$

$$= -1 + \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$\Rightarrow \int \cancel{\tan x} dx = -1 + \int \cancel{\tan x} dx$$

$$\Rightarrow \boxed{0 = -1} \quad \text{La formula di int. per parti è ABUSIVA!!!}$$

MATEMATICA I

ORA 68

Titolo nota

22/11/2007

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Sostituzioni banali

$$\int \cos(3x) dx = \frac{1}{3} \sin(3x)$$

$$\int \cos(3x) dx = \frac{1}{3} \int 3 \cos(3x) dx = \frac{1}{3} \sin(3x)$$

$$\int e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} ; \int \sin(7x) dx = -\frac{1}{7} \cos(7x)$$

$$\int \cos(\sqrt{2}x) dx = + \sin(\sqrt{2}x) \frac{1}{\sqrt{2}} ; \int \sin \frac{x}{2} dx = -2 \cos \frac{x}{2}$$

Sostituzioni quasi banali

$$\int x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int 2x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sin x^2$$

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

$$\int x^3 e^{x^4} dx = \frac{1}{4} \int \underbrace{4x^3}_{-o-o-o-} e^{x^4} dx = \frac{1}{4} e^{x^4}$$

Ripartiamo da:

$$\int_a^b \varphi'(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

La applico con $\varphi(x) = F(G(x))$. Allora

$$\varphi'(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x) = f(G(x)) \cdot g(x).$$

Sostituendo:

$$\int_a^b f(G(x)) \cdot g(x) dx = F(G(b)) - F(G(a))$$

INT. PER SOSTITUZIONE UFFICIALE

$$= \int_{G(a)}^{G(b)} f(t) dt$$

$$= [F(t)]_{t=G(a)}^{t=G(b)}$$

Brutalmente: devo calcolare

$$\int_a^b f(G(x)) \underbrace{g(x)}_{\downarrow}$$

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(y) dy$$

Pongo $y = G(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \text{derivata di } y \text{ risp. a } x$$

$$= G'(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow dy = g(x) dx$$

Come cambiano gli estremi? Quando $x=a$, ho che $y=G(a)$
 " " $x=b$, ho che $y=G(b)$

— o —

Esempio 1

$$\int x \cos(x^2) dx = \text{Pongo } x^2 = y \quad \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow dy = 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \underbrace{2x}_{dy} \cdot \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int \cos y dy = \frac{1}{2} \sin y$$

$$= \frac{1}{2} \sin x^2$$

— o —

Esempio 2

$$\int \frac{1}{x \log^7 x} dx$$

Pongo $y = \log x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dy = \frac{dx}{x}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x \log^7 x} dx &= \int \frac{1}{\log^7 x} \cdot \boxed{\frac{dx}{x}}_{dy} = \int \frac{1}{y^7} dy \\
 &= \int y^{-7} dy = -\frac{1}{6} y^{-6} \\
 &= -\frac{1}{6} \frac{1}{y^6} = -\frac{1}{6} \frac{1}{\log^6 x}
 \end{aligned}$$

Esempio 3 $\int \frac{1}{x \log x} dx =$ Pongo $y = \log x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad dy = \frac{dx}{x}$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{1}{\log x} \cdot \boxed{\frac{1}{x} dx}_{dy} = \int \frac{1}{y} dy = \log y = \log(\log x)
 \end{aligned}$$

Esempio 4 $\int \cos^2 x dx$ Usare formule trigonometriche!

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{\cos(2x) + 1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \int \cos^2 x dx &= \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx + \int \frac{1}{2} dx \\
 &= \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{x}{2}
 \end{aligned}$$

Esempio 5 $\int \sin^2 x dx$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$= \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x)$$

Esempio 6 $\int \sin x \cdot \cos x \, dx$

1° modo Sostituzione $y = \sin x \quad \frac{dy}{dx} = \cos x$
 $\Rightarrow dy = \cos x \cdot dx$

$$\int \boxed{\sin x} \cdot \boxed{\cos x \, dx} = \int y \, dy = \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} \sin^2 x$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 y dy

2° modo Formula trigonometrica! $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$

$$\int \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) = -\frac{1}{4} \cos(2x)$$

N.B. Le 2 primitive ottenute differiscono per una costante

3° modo Per parti...

Esempio 7

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $\sqrt{1-\sin^2 y}$ $\cos y \, dy$
 $= \cos y$

Pongo $x = \sin y$
 $\frac{dx}{dy} = \text{derivata di } x \text{ rispetto a } y = \cos y$
 $\Rightarrow dx = \cos y \cdot dy$

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \int \cos^2 y \, dy$$

Se $x = \sin y$, allora
 $y = \arcsin x$

$$= \frac{1}{2} \boxed{\cos y} \cdot \boxed{\sin y} + \frac{1}{2} \boxed{y}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $\sqrt{1-x^2}$ x $\arcsin x$

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

In conclusione

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} \cdot x + \frac{1}{2} \arcsin x$$

DERIVARE PER
 SICUREZZA

1° anettrato $\int \frac{dx}{x} = \log x$ $\frac{1}{x}$ è definita $\forall x \neq 0$
 $\log x$ solo per $x > 0$

Voglio avere una $F(x)$ t.c. $F'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$

Questo è vero prendendo $F(x) = \log |x|$

Per $x > 0$ $F(x) = \log x$, quindi $F'(x) = \frac{1}{x}$

Per $x < 0$ $F(x) = \log(-x)$, quindi $F'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1)$
 $= \frac{1}{x}$

2° anettrato il "+c"

Quali sono TUTTE le primitive di $\cos x$? Sono

$$\sin x + c$$

Quali sono TUTTE le primitive di $\frac{1}{x}$?

Sono $\log |x| + c$ NOOOOO !!!!!!!

Sono del tipo $F(x) = \begin{cases} \log |x| + c_1 & \text{per } x > 0 \\ \log |x| + c_2 & \text{per } x < 0 \end{cases}$

Posso scegliere c diversi per $x > 0$ e per $x < 0$.

Questo succede tutte le volte che l'insieme di definizione è fatto da 2 o più pezzi ($x < 0$ e $x > 0$)

Esempio 8 $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ Sostituisco $y = \cos x$
 $\frac{dy}{dx} = -\sin x \Rightarrow dy = -\sin x dx$
 $= - \int \frac{-\sin x dx}{\cos x} = - \int \frac{dy}{y} = -\log |y| = -\log |\cos x|$

MATEMATICA I

ORA 69

Titolo nota

23/11/2007

Integrazione delle funzioni razionali

$$\text{Funzione razionale} = \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Quattro fasi: ① Divisione

② Fattorizzazione

③ Sistema lineare

④ Integrazione

① Divisione Abbiamo $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Se grado di $P(x)$ è $\leq$ grado $(Q(x))$

allora non c'è nulla da fare. Altrimenti divido $P(x)$ per $Q(x)$.

$$P(x) = Q(x) \cdot A(x) + R(x)$$

↑ resto con grado
 $<$ del grado di $Q(x)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x) \cdot A(x) + R(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

↑ polinomio
 (facile da integrare)

↑ altra funzione
 razionale, ma
 con grado (num.) $<$
 grado den.

Conclusione Fase 1: se so integrare
 le funz. raz. con grado (num.) $<$
 grado (den.), allora le so integrare
 tutte

$$\frac{x^5 + x^3 + 2}{x+3} = x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 30x + 90 - \frac{268}{x+3}$$

Volendo si può integrare subito:

$$\int \frac{x^5 + x^3 + 2}{x+3} dx = \frac{x^5}{5} - \frac{3}{4}x^4 + \frac{10}{3}x^3 - 15x^2 + 90x - 268 \log|x+3|$$

— 0 — 0 —

② **FATTORIZZAZIONE** Prendiamo il denominatore $Q(x)$.

Un teorema (difficile) dice che è possibile scrivere $Q(x)$ come prodotto di fattori di 1° o 2° grado, ciascuno con la propria molteplicità

$$Q(x) = \underbrace{(a_1x+b_1)^{\alpha_1} \cdots (a_mx+b_m)^{\alpha_m}}_{\text{m fattori di 1° grado}} \cdot \underbrace{(c_1x^2+d_1x+e_1)^{\beta_1} \cdots (c_kx^2+d_kx+e_k)^{\beta_k}}_{\text{k fattori di 2° grado}}$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_m \rightarrow$ molteplicità
 $\beta_1, \dots, \beta_k \rightarrow$ molteplicità

Esempio 1

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \quad \text{2 fattori di 1° grado con molteplicità 1}$$

$$x^2 - 2 = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \quad \text{"}$$

$$x^2 + 1 = x^2 + 1 \quad \text{1 fattore di 2° grado con molteplicità 1}$$

$$x^5 - 3x^3 = x^3(x^2 - 3) = x^3(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$

$\uparrow$ Fattore di 1° grado con mult. 3 $\nwarrow \nearrow$ due fattori 1° grado mult. 1

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = \underbrace{(x^2 + 1 + \sqrt{2}x)(x^2 + 1 - \sqrt{2}x)}_{\text{2 fattori di 2° grado di mult. 1.}} \end{aligned}$$

$\Delta < 0$ $\Delta < 0$

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) \quad \Delta < 0$$

3) Sistema lineare Supponiamo di aver scomposto il denominatore.

1° caso: supponiamo che tutti i fattori abbiano mult. 1

$$\frac{P(x)}{(x-1)(x+2)(x^2+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

Sopra i fattori di grado 1 mett. costanti
 " " " " " 2 mett. pol. di grado 1
 A, B, C, D sono incognite

Esempio 1

$$\frac{x+3}{x^2-1} = \frac{x+3}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

$$= \frac{Ax - A + Bx + B}{(x+1)(x-1)}$$

Uguaglio i coeff.

$$\begin{cases} A+B=1 & \text{coeff. di } x \\ -A+B=3 & \text{termine noto} \end{cases} \quad \text{Somma: } 2B=4 \rightarrow B=2 \rightarrow A=-1$$

Conclusione:

$$\frac{x+3}{x^2-1} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x-1}$$

Esempio 2

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 & \text{coeff. } x^2 \\ A-B+C=1 & \text{coeff. } x \\ A-C=0 & \text{termine noto} \end{cases} \quad \begin{aligned} B &= -A \\ A+A+A &= 1 \\ C &= A \end{aligned} \quad \begin{aligned} A &= \frac{1}{3} \\ B &= -\frac{1}{3} \\ C &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \frac{-x+1}{x^2+x+1}$$

Oss. Quante sono le incognite: ogni fatt. di 1° grado $\rightarrow$ 1 inc.
 2° grado $\rightarrow$ 2 inc.

$\Rightarrow$ Numero incognite = somma gradi dei fattori
 = grado prodotto dei fattori
 = grado di $Q(x)$

Quante sono le equazioni? Sappiamo che grado num. è
 $<$ grado di $Q(x)$.

Le equazioni sono quelle che corrispondono a
 termine noto, coeff. x , coeff. x^2 , ..., coeff. x^{m-1} dove
 $m = \text{grado}(Q(x))$

$\Rightarrow m$ equazioni

$\rightarrow$ Le equazioni sono tante quante le incognite

$\rightarrow$ SI DIMOSTRA che il sistema ha sempre soluz. unica.

2° caso Ci sono fattori con molteplicità

$$\frac{P(x)}{(x-2)(x+1)^3(x-5)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-5} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

come se non ci fossero molteplicità

pd. gen.
 con grado
 inferiore di
 uno risp.
 al denom.

$$+ \frac{d}{dx} \left(\frac{F+Gx+Hx^2+Ix^3+Lx^4}{(x+1)^2(x-5)(x^2+1)} \right)$$

$\uparrow$
 ciò che rimane
 del denom.

Ancora una volta tante eq. quante incognite!!

MATEMATICA I

ORA 70

Titolo nota

23/11/2007

Esempio (sistema lineare con molteplicità)

$$\frac{2x+1}{x^4-x^3} = \frac{2x+1}{x^3(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{d}{dx} \left(\frac{Cx+D}{x^2} \right)$$

equazioni = # incognite = grado denominatore

$$A+B=0$$

$$-A-C=0$$

$$C-2D=2$$

$$2D=1$$

coeff. x^3 coeff. x^2 coeff. x

termine noto

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C \cdot x^2 - 2x(Cx+D)}{x^4}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx - 2Cx - 2D}{x^3}$$

$$= \frac{Ax^2(x-1) + Bx^3 + (-Cx - 2D)(x-1)}{x^3(x-1)}$$

$$= \frac{Ax^3 - Ax^2 + Bx^3 - Cx^2 + Cx - 2Dx + 2D}{x^3(x-1)}$$

$$D = \frac{1}{2}$$

$$C = 2D + 2 = 3$$

$$A = -C = -3$$

$$B = -A = 3$$

$$\frac{2x+1}{x^4-x^3} = -\frac{3}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{d}{dx} \left(\frac{3x + \frac{1}{2}}{x^2} \right)$$

$$\int \frac{2x+1}{x^4-x^3} dx = -3 \int \frac{1}{x} dx + 3 \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{d}{dx} \left(\frac{3x + \frac{1}{2}}{x^2} \right) dx$$

$$= -3 \log|x| + 3 \log|x-1| + \frac{3x + \frac{1}{2}}{x^2}$$

-o-o-

FASE 4: INTEGRAZIONE

Si tratta di integrare gli addendi prodotti in FASE 3.

Ci si ritrova con 3 tipi di pezzi

* $\frac{d}{dx} () \rightarrow$ banale da integrare

$$* \frac{A}{ax+b}$$

$$* \frac{Ax+B}{ax^2+bx+C}$$

con $\Delta < 0$

$$\int \frac{A}{ax+b} dx = A \int \frac{1}{ax+b} dx = A \frac{1}{a} \int \frac{a}{ax+b} dx$$

$$= \frac{A}{a} \log |ax+b|$$

Restano i fattori del tipo $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$

Esempi $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x$ volendo $y = x^2+1$
e sostituzione

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \log(x^2+1)$$

$$\int \frac{3x+4}{x^2+1} dx = 3 \int \frac{x}{x^2+1} dx + 4 \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{3}{2} \log(x^2+1) + 4 \arctan x$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \log(x^2+x+1)$$
Num = derivata di
denominatore

↓ Pongo $x^2+x+1 = y$ $\frac{dy}{dx} = 2x+1 \rightarrow dy = (2x+1)dx$

$$= \int \frac{dy}{y} = \log y = \log(x^2+x+1)$$
essendo $\Delta < 0$ il pol.
di 2° grado è sempre
maggiore di zero

$$\int \frac{dx}{1+2x^2} = \int \frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x)$$

$$\int \frac{dx}{1+ax^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan(\sqrt{a}x) \quad (\text{se } a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{1-2x^2} \quad \text{il denominatore si può scomporre}$$

$$\frac{1}{1-2x^2} = \frac{1}{(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)} = \frac{A}{1-\sqrt{2}x} + \frac{B}{1+\sqrt{2}x}$$

sistema lineare, ---, vengono 2 logaritmi.

$$\int \frac{dx}{2+2x+x^2} = \int \frac{dx}{1+(x+1)^2} = \arctan(x+1)$$

$$\int \frac{dx}{2+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1}{2}}x\right)$$

esercizio

precedente con $a = \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

In generale

$$\int \frac{dx}{b+x^2} = \frac{1}{\sqrt{b}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{b}}\right) \quad \text{se } b > 0$$

Se $b < 0$, si scompone

$$\int \frac{3x+4}{x^2+2x+2} dx$$

Se non fosse $2x+2$ sarebbe log.
" " " $3x+3$ sarebbe
ancora log

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+3}{x^2+2x+2} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx \\ &= \frac{3}{2} \log(x^2+2x+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+4}{x^2+2x+2} dx &= \int \frac{3x+3}{x^2+2x+2} dx + \int \frac{1}{x^2+2x+2} dx \\ &= \frac{3}{2} \log(x^2+2x+2) + \arctan(x+1) \end{aligned}$$

In generale i pezzi $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ producono un pezzo con

il logaritmo che "sistema la x " e un pezzo con $\arctan$ che "sistema il termine noto"

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

FASE 3

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2+1)^2} &= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \left(\frac{Cx+D}{x^2+1} \right) \\ &= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C(x^2+1) - 2x(Cx+D)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(Ax+B)(x^2+1) + Cx^2 + C - 2Cx^2 - 2Dx}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx^2 + C - 2Cx^2 - 2Dx}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$A=0$$

$$B-C=0$$

$$A-2D=0$$

$$B+C=1$$

coeff. x^3 " x^2 " x

term. noto

$$A=0$$

$$B=\frac{1}{2}$$

$$D=0$$

$$C=\frac{1}{2}$$

$$B=C$$

$$2B=1$$

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1} \right)$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx + \int \frac{d}{dx} \left(\frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1}$$

Trucchetto

$$\int \frac{x}{x^2-5x+6} dx$$

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)}$$

Moltiplico per $(x-2)$:

$$\frac{x}{x-3} = A + \frac{B}{(x-3)}(x-2)$$

Pongo $x=2$

$$\frac{2}{-1} = A \rightarrow A = -2$$

Per ricavare B moltiplico per $x-3$

$$\frac{x}{x-2} = A \frac{x-3}{x-2} + B \quad \text{sostituisco } x=3$$

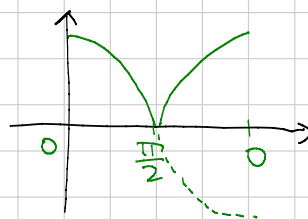
$$\frac{3}{+1} = B \rightarrow B = +3$$

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = -\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3}$$

$$\int \frac{x}{x^2-5x+6} = -2 \log|x-2| + 3 \log|x-3| = \log \frac{|x-3|^3}{|x-2|^2}$$

Esempio $\int_0^{\pi} |\cos x| dx$

$$= \int_0^{\pi/2} |\cos x| dx + \int_{\pi/2}^{\pi} |\cos x| dx$$



$$= \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos x) \, dx$$

$\uparrow$ $\cos x \geq 0$ in $[0, \pi/2]$ $\uparrow$ $\cos x \leq 0$ in $[\pi/2, \pi]$

$$= \left[\sin x \right]_0^{\pi/2} - \left[\sin x \right]_{\pi/2}^{\pi} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 - \left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= 1 + 1 = 2$$

MATEMATICA I

ORA 71

Titolo nota

27/11/2007

SOSTITUZIONI RAZIONALIZZANTI

$$\int \frac{x}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctan}(x^2)$$

$$\int \frac{x^2}{x^4+1} dx = \text{bisogna fare i conti}$$

$$\int \frac{x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \log(x^4+1)$$

$$x^4+1+2x^2-2x^2 = (x^2+1) - (\sqrt{2}x)^2$$

$$= (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

1° caso: $\operatorname{Rat}(e^x)$ = funzione razionale di e^x

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \text{Pongo } y = e^x \quad (\text{in alternativa, } y = e^x+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \Rightarrow dy = e^x dx$$

$$= \int \frac{e^x dx}{e^x(e^x+1)} = \int \frac{dy}{y(y+1)} = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right) dy =$$

$$\frac{1}{y(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$$

$$= \log |y| - \log |y+1|$$

$$= \log e^x - \log(e^x+1)$$

Altro modo di vedere la sostituzione

$$= x - \log(e^x+1)$$

$$y = e^x; \quad x = \log y; \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}; \quad dx = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{dy}{y} \frac{1}{y+1}$$

Esempio 2

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+2} dx$$

Pongo $e^x = y$ $\frac{dy}{dx} = e^x$

$$dy = e^x dx$$

$$= \int \frac{e^{2x} \cdot \boxed{e^x dx}}{e^{2x}+2} = \int \frac{y^2 dy}{y^2+2} = \int \frac{y^2+2-2}{y^2+2} dy =$$

$$= \int \left(1 - \frac{2}{y^2+2}\right) dy = y - 2 \int \frac{dy}{y^2+2} = y - 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{y}{\sqrt{2}}$$

$$= e^x - \sqrt{2} \arctan\left(\frac{e^x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \arctan(e^x)$$

per esercizio fare la sostituzione!

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2} \log(e^{2x}+1) = \log \sqrt{e^{2x}+1}$$

per es. la sostituzione $\nearrow y = e^x$
 $\searrow y = e^{2x}$

Esempio

$$\int \frac{1}{3^x-2} dx =$$

$y = 3^x$ $\frac{dy}{dx} = 3^x \log 3$

$$dy = 3^x \cdot \log 3 \cdot dx$$

$$= \int \frac{\boxed{3^x \cdot \log 3 \cdot dx}}{3^x \cdot \log 3} \cdot \frac{1}{3^x-2} = \frac{1}{\log 3} \int \frac{dy}{y(y-2)} = \text{solita funzione razionale}$$

2° caso: radici di roba di 1° grado

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x}+1} dx \quad y = \sqrt{x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$= \int \frac{x+3}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx = \int \frac{y^2+3}{y+1} \cdot 2y dy = 2 \int \frac{y^3+3y}{y+1} dy$$

$$= 2 \int \frac{\boxed{y^3+y^2} - \boxed{y^2-y} + y + \boxed{3y-3+3}}{y+1} dy = 2 \int \left(y^2 - y + 3 + \frac{y+1-4}{y+1} \right) dy$$

$$= 2 \int \left(y^2 - y + 3 + 1 - \frac{4}{y+1} \right) dy = 2 \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 4y - 4 \log|y+1| \right]$$

$$= \frac{2}{3} y^3 - y^2 + 8y - 8 \log|y+1| = \frac{2}{3} x\sqrt{x} - x + 8\sqrt{x} - 8 \log(\sqrt{x}+1)$$

1° commento: si poteva fare la divisione

$$\begin{array}{r} y^3 + 3y \\ -y^3 - y^2 \\ \hline -y^2 + 3y \\ +y^2 + y \\ \hline 4y \\ -4y - 4 \\ \hline -4 \end{array} \quad \begin{array}{r} y+1 \\ \hline y^2 - y + 4 \end{array}$$

2° commento

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x}+1} dx$$

$$y = \sqrt{x} \rightarrow x = y^2 \rightarrow \frac{dx}{dy} = 2y \\ \rightarrow dx = 2y dy$$

$$= \int \frac{y^2+3}{y+1} \frac{2y dy}{dx}$$

Esempio 2

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}+2} dx$$

$$\text{Pongo } y = \sqrt[3]{x} \rightarrow x = y^3$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dy} = 3y^2 \rightarrow dx = 3y^2 dy$$

$$= \int \frac{y+1}{y+2} 3y^2 dy = \text{funzione razionale...}$$

minimo comune
multiplo di 2 e 3

Esempio 3

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+2} dx$$

$$\text{Pongo } y = \sqrt[6]{x}$$

$$\sqrt{x} = y^3 \quad \sqrt[3]{x} = y^2$$

$$x = y^6; \quad \frac{dx}{dy} = 6y^5; \quad dx = 6y^5 dy$$

$$= \int \frac{y^3+1}{y^2+2} \cdot 6y^5 dy = \text{funzione razionale ...}$$

Esempio 4 $\int \sqrt{\frac{x+1}{x+4}} dx$

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{x+4}} ; y^2 = \frac{x+1}{x+4}$$

$$= \int \underbrace{y}_{\text{G}} \underbrace{\left(\frac{1-4y^2}{y^2-1} \right)'}_{\text{F}} dy =$$

$$y^2(x+4) = x+1$$

$$x(y^2-1) = 1-4y^2$$

$$x = \frac{1-4y^2}{y^2-1}$$

$$dx = \left(\frac{1-4y^2}{y^2-1} \right)' dy \quad \leftarrow \text{derivato}$$

$$= y \frac{1-4y^2}{y^2-1} - \int 1 \cdot \frac{1-4y^2}{y^2-1} dy$$

$$= \underbrace{y}_{\text{G}} \underbrace{\frac{1-4y^2}{y^2-1}}_{\text{F}} + \int \underbrace{\frac{4y^2-4+3}{y^2-1}}_{\text{g F}} dy = y \frac{1-4y^2}{y^2-1} + \int \left(4 + \frac{3}{y^2-1} \right) dy$$

$$= y \frac{1-4y^2}{y^2-1} + 4y + 3 \int \frac{dy}{y^2-1} = \text{Int}$$

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{(y+1)(y-1)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right]$$

$$\text{Moltiplico per } (y+1) \rightarrow \frac{1}{y-1} = A + B \frac{y+1}{y-1}$$

$$\text{Pongo } y^2-1 \rightarrow -\frac{1}{2} = A$$

$$\text{Moltiplico per } (y-1) \rightarrow \frac{1}{y+1} = A \frac{y-1}{y+1} + B$$

$$\text{Pongo } y=1 \rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$\text{Int} = y \frac{1-4y^2}{y^2-1} + 4y + \frac{3}{2} \log \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = \text{sostituire } y \dots$$

Queste tecniche funzionano con integrali che contengono espressioni del tipo $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$

Se ci sono radici con indici diversi (l'argomento deve essere lo stesso) si sceglie una radice che ha come indice il min. com. multiplo

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} dx \rightarrow \text{NULLA DA FARE !!!}$$

MATEMATICA I

ORA 72

Titolo nota

27/11/2007

3° caso Radici di roba di 2° grado

$$\int \sqrt{x^2+7} \, dx$$

Pongo $\sqrt{x^2+7} = x+y$.

Provo a ricavare x :

$$\cancel{x^2}+7 = \cancel{x^2}+2xy+y^2 \quad \text{resta di 1° grado in } x$$

$$2xy = 7-y^2; \quad x = \frac{7-y^2}{2y}$$

$$dx = \left(\frac{7-y^2}{2y} \right)' dy$$

$$\int \sqrt{x^2+7} \, dx = \int \left(\underbrace{\frac{7-y^2}{2y}}_x + y \right) \underbrace{\left(\frac{7-y^2}{2y} \right)' dy}_{dx}$$

$$= \int \frac{7+y^2}{2y} \cdot \left(\frac{7-y^2}{2y} \right)' dy = \int \frac{7+y^2}{2y} \cdot \frac{-4y^2-14+2y^2}{4y^2} dy$$

e da qui è una funzione razionale...

Alla fine al posto di y devo mettere $\sqrt{x^2+7} - x$

Esempio 2 $\int \sqrt{7x^2+1} \, dx$

$$\sqrt{7x^2+1} = \sqrt{7}x + y$$

$$\cancel{7x^2}+1 = \cancel{7x^2}+y^2+2\sqrt{7}xy$$

$$2\sqrt{7}xy = 1-y^2$$

$$x = \frac{1-y^2}{2\sqrt{7}y}$$

e diventa razionale

$$\int \sqrt{7x^2 - 3x + 5} \, dx$$

$$\sqrt{7x^2 - 3x + 5} = \sqrt{7}x + y$$

$$\cancel{7x^2} - 3x + 5 = \cancel{7x^2} + y^2 + 2\sqrt{7}x$$

→ 1° grado in x

→ ricavo x senza radici

$$\int \frac{\sqrt{7x^2 + 1}}{x + 3} \, dx$$

NON CAMBIA NULLA: x risulta una funzione razionale della y.

Questo metodo funziona quando l'integranda contiene un termine del tipo

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \quad \text{purché } a > 0 \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + y$$

Esempio

$$\int \sqrt{9 - x^2} \, dx$$

1° metodo: $x = 3 \cos y$

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9 \cos^2 y} = 3 \sin y$$

$$dx = -3 \sin y \, dy$$

→ integrale in sin y.

2° metodo

$$9 - x^2$$

Dove si annulla?

$$x = \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow -3 \end{matrix}$$

Scelgo una radice a caso: $x = 3$

Pongo $\sqrt{9 - x^2} = \underbrace{(x - 3)}_{\substack{x - \text{radice} \\ \text{scelta}}} \cdot y$

$$9 - x^2 = (x - 3)^2 \cdot y^2; \quad -(3 + x)(\cancel{3 - x}) = (x - 3)^2 \cdot y^2$$

$$-(3 + x) = (x - 3) y^2 \quad \rightarrow \text{1° grado in } x$$

$$-3 - x = xy^2 - 3y^2$$

$$x(y^2 + 1) = 3y^2 - 3$$

$$x = 3 \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1} = \text{funzione razionale della } y$$

$$\int \sqrt{9 - x^2} dx = \int \underbrace{\left(3 \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1} - 3 \right)}_{(x-3)} \underbrace{y}_{\cdot y} \underbrace{\left(3 \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1} \right)' dy}_{dx}$$

= integrali di funzione razionale

Esempio 2 $\int \sqrt{x^2 - 6x + 8} dx$

1° metodo: $\sqrt{x^2 - 6x + 8} = x + y$

2° metodo (con le radici) $x^2 - 6x + 8 = 0$

Radici: $x = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases} \leftarrow \text{SCELGO A CASO QUESTA RADICE}$

Pongo

$$\sqrt{x^2 - 6x + 8} = (x - 4) \cdot y$$

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 4)^2 \cdot y^2$$

$$(x - 2)(\cancel{x - 4}) = (x - 4)^2 \cdot y^2$$

$$x - 2 = (x - 4) \cdot y^2 \rightarrow 1^\circ \text{ grado in } x$$

$$x(1 + y^2) = -4y^2 + 2 \quad x = \frac{2 - 4y^2}{1 + y^2}$$

... sono conti

Funziona quando l'integranda contiene $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

purché ci siano radici reali ($\Delta > 0$)

Oss. Per $\Delta = 0$ quello sotto la radice è un quadrato perfetto !!!

$$\sqrt{ax^2+bx+c}$$

	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$	Funzionano 2 metodi	$\sqrt{\quad} = \sqrt{ax+y}$
$a < 0$	Metodo con radici	?

Nel caso restante $\Delta < 0$ e $a < 0$, dunque quello che è sotto la radice è sempre < 0 , quindi la funzione integranda non è definita per nessun valore della x .

4° caso : funzioni razionali di $\sin x$ e $\cos x$.

Se una funziona viene altro, provare con

$$\sin x = \frac{2y}{y^2+1} \quad \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2} \quad \text{dove } y = \tan \frac{x}{2}$$

FORMULE TRIGONOMETRICHE

Esempio $\int \frac{1}{\sin x} dx =$ Pongo $y = \tan \frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2y}{y^2+1} \quad \leftarrow \text{FORMULA TRIGONOM.}$$

$$= \int \underbrace{\frac{y^2+1}{2y}}_{\frac{1}{\sin x}} \cdot \underbrace{\frac{2}{1+y^2} dy}_{dx}$$

$$\frac{x}{2} = \arctan y ; \quad x = 2 \arctan y$$

$$dx = \frac{2}{1+y^2} dy$$

$$= \int \frac{1}{y} dy = \log |y| = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

Esempio $\int \sin(\log x) dx =$ Pongo $y = \log x$

$$x = e^y, \quad dx = e^y dy$$

$$= \int \underbrace{\sin y}_{\sin(\log x)} \cdot \underbrace{e^y dy}_{dx}$$

$$= \int e^y \cdot \sin y dy = \text{parti + grande ritorno}$$

$$\int_e^{25} \sin(\log x) dx$$

$$y = \log x$$

$$= \int_{\boxed{1}}^{\boxed{\log 25}} e^y \cdot \sin y dy$$

↑

Estreми di integrazione:

quando $x = e$, allora $\boxed{y = 1}$

quando $x = 25$, allora $\boxed{y = \log 25}$

Faccio la primitiva
in y e sostituisco i nuovi
estreми ad y

Altro metodo: faccio primitiva in y ,
poi torno in x ponendo $y = \log x$,
e sostituisco a x i vecchi estreми.

MATEMATICA I

Titolo nota

ORA 73

28/11/2007

INTEGRALI IN 2 VARIABILI

- ① NOTAZIONI
- ② SIGNIFICATO GEOMETRICO
- ③ "DEFINIZIONI"
- ④ TECNICHE DI CALCOLO

NOTAZIONI

$$\iint_A f(x,y) dx dy$$

$A \subseteq \mathbb{R}^2$
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

integrandi (pointing to $f(x,y)$)
variabili di integrazione (pointing to $dx dy$)
insieme di integrazione (pointing to A)

$$\int_A f(x,y) dx dy$$

Integrale PROPRIO $\rightarrow$ integranda $f(x,y)$ limitata ($|f(x,y)| \leq M$)
 $\rightarrow$ A insieme LIMITATO

SIGNIFICATO GEOMETRICO

$\iint_A f(x,y) dx dy =$ volume con segno della parte di spazio compresa tra il grafico di $f(x,y)$ e il piano base x,y .

CON SEGNO nel senso che le parti sopra piano base contano con segno +, quelli sotto il piano con segno -.

IDEA DELLE DEFINIZIONI

Caso banale
 $\hookrightarrow$ semibanale
 $\hookrightarrow$ generale

Caso banale: $A = [a,b] \times [c,d]$ rettangolo del piano con lati // agli assi

$f(x,y) = \lambda$ costante $\forall (x,y) \in A$

In questo caso

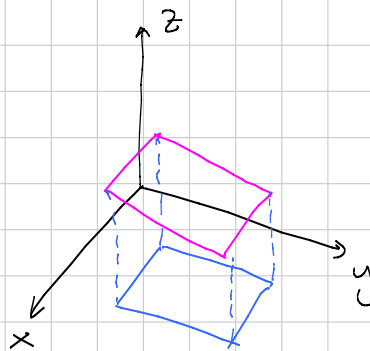
$$\iint_A f(x,y) dx dy =$$

= volume con segno del
parallelepipedo

= area base · altezza

$$= (b-a)(d-c) \lambda$$

↑
— o —
altezza con segno.



Caso semibonale : $A = \text{unione finita di rettangoli}$

$$R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_k$$

tutti con i lati paralleli agli assi e senza parti interni in comune

$$f(x,y) = \lambda_i \quad \forall (x,y) \in R_i$$

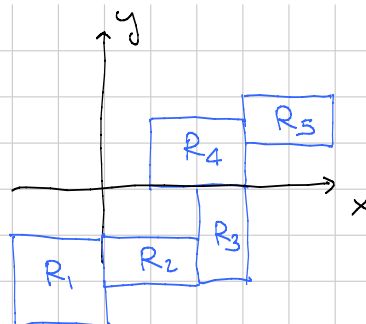
(costante su ogni rettangolo)

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \text{somma algebrica volume dei singoli parallelepipedi}$$

$$= \sum_{i=1}^k \text{Area}(R_i) \times \lambda_i$$

↑
Area base
i-esimo
parall.

↑
altezza con segno
i-esimo parall.



In questo caso il grafico è "un insieme di grattacieli".
Queste funzioni si chiamano

FUNZIONI SEMPLICI

FUNZIONI A GRADINO

STEP FUNCTIONS.

Caso generale $A =$ insieme limitato qualunque
 $f =$ funzione limitata qualunque

Integrale superiore $I^+(f; A) =$

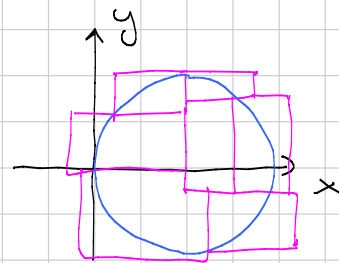
$$= \inf \left\{ \iint_{\square} \varphi(x, y) dx dy : \begin{array}{l} \varphi(x, y) \text{ è funzione a gradini e} \\ \varphi(x, y) \geq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in A \end{array} \right\}$$

$\uparrow$
 zona di definizione
 di $\varphi(x, y)$

NOTA BENE: la zona di def. di $\varphi(x, y)$ in generale può / deve essere + grande dell'insieme A .

Esempio $A =$ cerchio

$\varphi(x, y)$ sfiora rispetto a $f(x, y)$ sia in altezza, sia ai bordi di A



Integrale inferiore $I^-(f; A) =$

$$= \sup \left\{ \iint_B \varphi(x, y) dx dy : \begin{array}{l} \varphi(x, y) \text{ è funzione a gradini e} \\ \varphi(x, y) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in A \end{array} \right\}$$

$\uparrow$
 insieme di definizione di $\varphi(x, y)$
 in generale $B \supseteq A$

Integrale inferiore e superiore esistono sempre (N.B. il fatto che A ed f siano limitati assicura che esistono funzioni a gradini $\geq f$ e altre $\leq f$). Inoltre

$$I^+(f; A) \geq I^-(f; A)$$

Se vale il segno di $=$ (cosa che accade in tutti i casi "tranquilli") si dice che f è INTEGRABILE SECONDO RIEMANN nell'insieme A e il valore comune di I^+ e I^- è l'integrale,

TECNICHE DI CALCOLO $\leadsto$ FORMULE DI RIDUZIONE

Formula di riduzione su un rettangolo

$A = \text{rettangolo } [a,b] \times [c,d]$ lati // agli assi

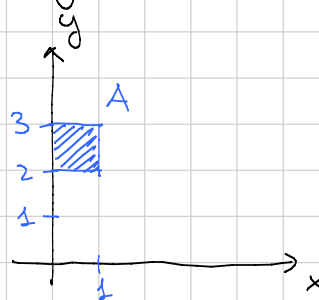
$f(x,y)$ = funzione limitata in A

$$\begin{aligned} \iint_A f(x,y) dx dy &= \int_a^b dx \int_c^d dy f(x,y) \\ &= \int_c^d dy \int_a^b dx f(x,y) \end{aligned}$$

Esempio 1 $A = [0,1] \times [2,3]$ $f(x,y) = xy^2$

Oss. $f(x,y) \geq 0$ in A (anzi > 0 ovunque su un lato)

Quindi l'integrale sarà > 0 .



$$\iint_A xy^2 dx dy = \int_0^1 dx \int_2^3 dy xy^2$$

$$= \int_0^1 dx \int_2^3 xy^2 dy = \int_0^1 dx \left[x \frac{y^3}{3} \right]_{y=2}^{y=3}$$

Devo integrare xy^2 rispetto alla variabile y ↑
primitiva rispetto a y

$$= \int_0^1 dx \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ y=3}}{9x} - \underset{\substack{\uparrow \\ y=2}}{\frac{8}{3}x} \right\} = \int_0^1 \frac{19}{3} x dx = \left[\frac{19}{6} x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{19}{6}$$

In alternativa posso inventare le 2 integrazioni:

$$\iint_A xy^2 dx dy = \int_2^3 dy \int_0^1 xy^2 dx = \int_2^3 dy \left[\frac{x^2}{2} y^2 \right]_{x=0}^{x=1}$$

integrale
risp. ad x
primitiva
rispetto ad x

$$= \int_2^3 dy \left\{ \frac{y^2}{2} - 0 \right\} = \frac{1}{2} \int_2^3 y^2 dy = \frac{1}{6} [y^3]_{y=2}^{y=3} = \frac{19}{6}$$

↑
x=1
↑
x=0

- 0 -

Piccola astuzia:

$$\iint_A f(xy) dx dy = \int_2^3 dy \int_0^1 x y^2 dx = \int_2^3 y^2 dy \int_0^1 x dx$$

↑
è una
costante

MATEMATICA I

ORA 74

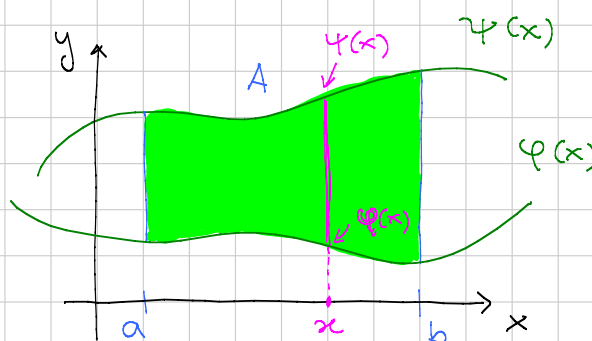
Titolo nota

28/11/2007

INSIEMI NORMALI RISPETTO ALL'ASSE x

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice NORMALE rispetto all'asse x se è della forma

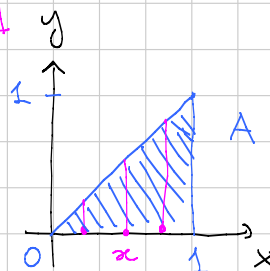
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

FORMULA DI RIDUZIONE PER INTEGRALI SU INSIEMI NORMALI RISPETTO ALL'ASSE x

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

Esempio 1

$$\iint_A xy^2 dx dy$$



Scriviamo A come insieme normale risp. all'asse x

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq x\}$$

$\varphi(x) = \text{limitazione inferiore} = 0$
 $\psi(x) = \text{" " superiore} = x$

$$\begin{aligned}
 \iint_A xy^2 dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^x xy^2 dy = \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 dy \\
 &= \int_0^1 x dx \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=x} = \frac{1}{3} \int_0^1 x \{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{primitiva} \\ \text{di } y^2 \text{ in } y}}{x^3} - \underset{\substack{\uparrow \\ y=0}}{0} \} dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^5}{5} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{15}.
 \end{aligned}$$

Esempio 2 $A =$ come sopra $f(x,y) = x$

$$\begin{aligned}
 \iint_A x dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^x dy \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{integrale di } 1 = \text{lung. int.}}}{x} = \int_0^1 x dx \int_0^x dy = \\
 &= \int_0^1 x(x-0) dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

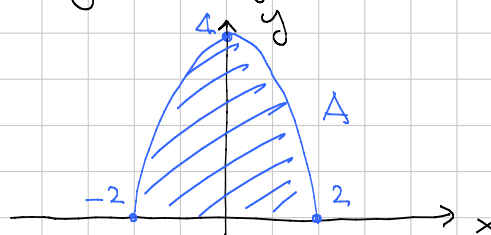
Oss. $\int_a^b 1 dx = b-a = \text{lunghezza dell'intervallo}$

$=$ area di un rettangolo di altezza 1
(quindi come numero coincide con la lunghezza della base)

Oss. $\iint_A 1 dx dy = \text{Area}(A)$
(Sarebbe il volume di un solido con base A e altezza 1, dunque il volume coincide come numero con l'area della base)

Esempio 3 $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4-x^2 \}$

$$\iint_A y dx dy$$



Scriviamo A come insieme normale risp. asse x :

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 2], 0 \leq y \leq 4 - x^2 \}$$

$$\begin{aligned} \iint_A y \, dx \, dy &= \int_{-2}^2 dx \int_0^{4-x^2} y \, dy = \int_{-2}^2 dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=4-x^2} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (4-x^2)^2 \, dx = \text{int. in 1 variabile} \end{aligned}$$

$\uparrow$
 $y = 4 - x^2$

Esempio 4 A come sopra

$$\iint_A x \, dx \, dy = \int_{-2}^2 dx \int_0^{4-x^2} x \, dy = \int_{-2}^2 x \, dx \int_0^{4-x^2} 1 \, dy$$

$\uparrow$
 $y = 4 - x^2$

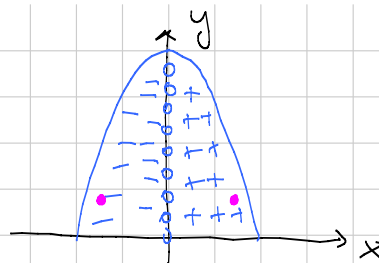
$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{lungh. intervallo, cioè } 4-x^2}$

$$= \int_{-2}^2 x (4-x^2) \, dx = \int_{-2}^2 (4x - x^3) \, dx = \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_{x=-2}^{x=2} = 0$$

Perché si poteva dire o direttamente?

La funzione x è tanto positiva a dx
quanto negativa a dx

I 2 volumi si compensano e
l'integrale risulta $= 0$.



Più formalmente: $f(x, y) = x$ è DISPARI rispetto alla variabile x

$$f(-x, y) = -f(x, y).$$

L'insieme A è simmetrico rispetto alla trasformazione

$$(x, y) \rightarrow (-x, y) \quad (\text{scambia dx e sinistra})$$

Esempio 5 A = sempre il solito

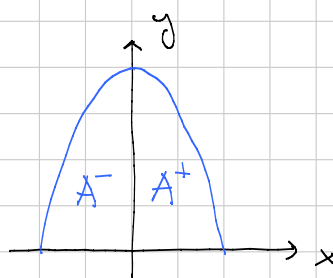
$$\iint_A |x| dx dy \quad (\text{viene per forza } > 0)$$

$$= 2 \iint_{A^+} |x| dx dy$$

$$= 2 \iint_{A^+} x dx dy =$$

$$= 2 \int_0^2 dx \int_0^{4-x^2} x dy = 2 \int_0^2 x dx \int_0^{4-x^2} 1 dy = 2 \int_0^2 x(4-x^2) dx$$

$$= 2 \int_0^2 (4x - x^3) dx = 2 \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=2} = 2 \{ 8 - 4 \} = 8.$$



$$A^+ = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2], 0 \leq y \leq 4 - x^2 \}$$

Esempio 6 $A = [0, 1] \times [0, 1]$ $f(x, y) = |2y - x|$

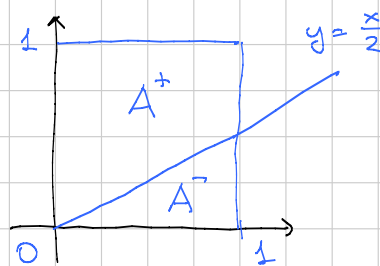
$$f(x, y) = \begin{cases} 2y - x & \text{dove } 2y - x \geq 0, \text{ cioè dove } y \geq \frac{x}{2} \\ -2y + x & \text{dove } " < 0 " " y < \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\iint_A |2y - x| dx dy = \iint_{A^+} |2y - x| dx dy + \iint_{A^-} |2y - x| dx dy$$

$$= \iint_{A^+} (2y - x) dx dy + \iint_{A^-} (x - 2y) dx dy =$$

$$A^- = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq \frac{x}{2} \}$$

$$A^+ = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], \frac{x}{2} \leq y \leq 1 \}$$



$$= \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^1 (2y - x) dy + \int_0^1 dx \int_0^{\frac{x}{2}} (x - 2y) dy$$

$$= \int_0^1 dx \left[y^2 - xy \right]_{y=\frac{x}{2}}^{y=1} + \int_0^1 dx \left[xy - y^2 \right]_{y=0}^{y=\frac{x}{2}}$$

$$= \int_0^1 dx \left\{ \underbrace{1-x}_{y=1} - \underbrace{\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2}}_{y=\frac{x}{2}} \right\} + \int_0^1 dx \left\{ \underbrace{\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4}}_{y=\frac{x}{2}} - \underbrace{0}_{y=0} \right\} = \dots$$

MATEMATICA I

ORA 75

Titolo nota

28/11/2007

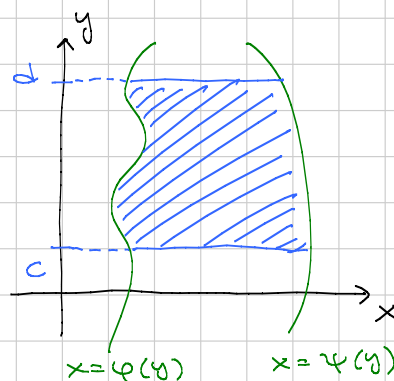
INSIEMI NORMALI RISPETTO ASSE y

Def. Un insieme si dice normale rispetto all'asse y se si scrive nella forma

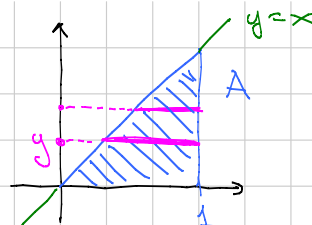
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

Formula di riduzione:

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &= \\ &= \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \end{aligned}$$

Esempio 1

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], y \leq x \leq 1\}$$



$$\iint_A xy^2 dx dy = \int_0^1 dy \int_y^1 xy^2 dx = \int_0^1 y^2 dy \int_y^1 x dx$$

$$= \int_0^1 y^2 dy \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y}^{x=1} = \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 \{1 - y^2\} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (y^2 - y^4) dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{15}$$

Esempio 2

$$\iint_A y \, dx \, dy =$$

$$= \iint_{A_1} y \, dx \, dy + \iint_{A_2} y \, dx \, dy + \iint_{A_3} y \, dx \, dy$$

A_1, A_2, A_3 normali rispetto asse x

$$A_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0], \quad 0 \leq y \leq x+1 \}$$

$$A_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1] \}$$

$$A_3 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, 2], \quad 0 \leq y \leq -x+2 \}$$

$$= \int_{-1}^0 dx \int_0^{x+1} y \, dy + \int_0^1 dx \int_0^1 y \, dy + \int_1^2 dx \int_0^{-x+2} y \, dy = \text{si FA !!}$$

Alternativa: impostazione come insieme norm. risp. asse y

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], \quad \underbrace{y-1}_{\substack{\text{lo esplicitato} \\ y=x+1 \\ \text{risp. ad } x}} \leq x \leq \underbrace{2-y}_{\substack{\text{lo esplicitato} \\ y=-x+2 \\ \text{risp. ad } x}} \}$$

$$\iint_A y \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{2-y} y \, dx = \int_0^1 y \, dy \int_{y-1}^{2-y} dx$$

lung. intervallo
= $(2-y) - (y-1)$

$$= \int_0^1 y (3-2y) \, dy =$$

$$= \int_0^1 (3y - 2y^2) \, dy = \left[\frac{3y^2}{2} - \frac{2y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

controllare che venga =
con l'altro sistema.

Esempio 3

$$\iint_A xy \, dx \, dy =$$

$$= \iint_{A_1} xy \, dx \, dy + \iint_{A_2} xy \, dx \, dy$$

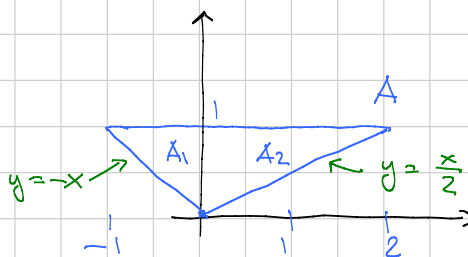
$$= \int_{-1}^0 dx \int_{-x}^1 xy \, dy + \int_0^2 dx \int_{x/2}^1 xy \, dy = \dots \text{ calcolare}$$

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0], -x \leq y \leq 1\}$$

$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2], \frac{x}{2} \leq y \leq 1\}$$

A come normale rispetto all'asse y

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1], -y \leq x \leq 2y\}$$



$$\iint_A xy \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_{-y}^{2y} xy \, dx = \int_0^1 y \, dy \int_{-y}^{2y} x \, dx$$

$$= \int_0^1 y \, dy \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=-y}^{x=2y} = \int_0^1 y \left\{ 2y^2 - \frac{y^2}{2} \right\} dy$$

$\uparrow$ $x=2y$ $\uparrow$ $x=-y$

$$= \frac{3}{2} \int_0^1 y^3 dy = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{=0} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{=0}$

Esempio 4

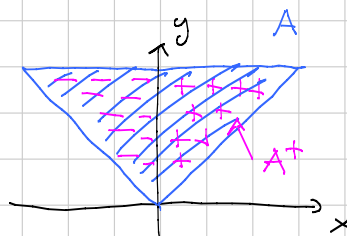
$$\iint_A xy \, dx \, dy = 0$$

SOLITA REGIONE DI SIMMETRIA!!

$f(x,y)$ è DISPARI RISPETTO a x

$$f(-x,y) = -f(x,y)$$

Insieme simmetrico risp. asse y.



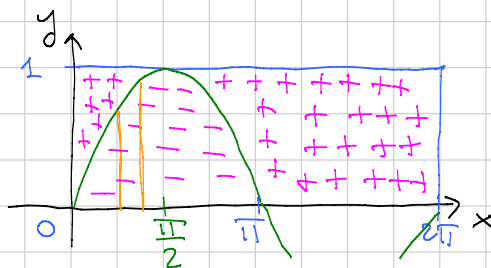
Esempio 5 A come in esempio 4

$$\iint_A |xy| \, dx \, dy = 2 \iint_{A^+} xy \, dx \, dy = 2 \int_0^1 dx \int_x^1 dy \, xy = \text{si finisce}$$

Esempio 6 $A = [0, 2\pi] \times [0, 1]$

$$\iint_A |y - \sin x| \, dx \, dy = \iint_{A^+} (y - \sin x) \, dx \, dy - \iint_{A^-} (y - \sin x) \, dx \, dy$$

$$|y - \sin x| = \begin{cases} y - \sin x & \text{dove } y - \sin x \geq 0, \text{ cioè } y \geq \sin x \quad A^+ \\ -(y - \sin x) & \text{se } y < \sin x \quad A^- \end{cases}$$



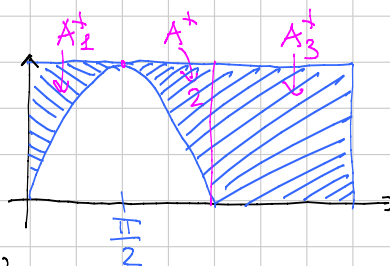
$$A^- = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \pi], 0 \leq y \leq \sin x \}$$

$$\iint_{A^-} (y - \sin x) \, dx \, dy = \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} (y - \sin x) \, dy = \dots$$

$$A_1^+ = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin x \leq y \leq 1 \}$$

$$A_2^+ = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \sin x \leq y \leq 1 \}$$

$$A_3^+ = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\pi, 2\pi], 0 \leq y \leq 1 \}$$



A_1^+ e A_2^+ si possono mettere insieme $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \pi], \sin x \leq y \leq 1 \}$

Alternativa

$$A^+ = ([0, 2\pi] \times [0, 1]) \setminus A^-$$

$$\iint_{A^+} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\text{retto.}} f(x, y) \, dx \, dy - \iint_{A^-} f(x, y) \, dx \, dy$$

In conclusione

$$\iint_A |y - \sin x| dx dy = \iint_{\text{ret.}} (y - \sin x) dx dy - 2 \iint_A (y - \sin x) dx dy$$

in soli 2 passi

Esercizio: controllare che venga lo stesso !!!

MATEMATICA I

ORA 76

Titolo nota

29/11/2007

INTEGRALI IMPROPRI (in una variabile)

Integrale proprio: $\rightarrow$ zona di integrazione limitata
 $\rightarrow$ integranda $f(x)$ limitata

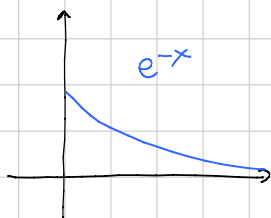
Integrale improprio: se manca uno/o entrambe gli ingredienti
 (zona di int. non limitata e/o $f(x)$ non limitata)

Esempi

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

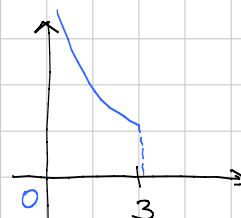
$$\int_0^3 \frac{1}{x^3} dx$$



funzione limitata
 zona integr. non lim.



zona int. non lim.
 funz. non lim.



zona int. limit.
 funz. non lim.

INTEGRALI IMPROPRI **MONOPROBLEMA**

$\rightarrow$ zona di integrazione: intervallo $[a, b]$ (dunque limitato)
 $f(x)$ non limitata vicino a $x=a$ oppure $x=b$

$\rightarrow$ $f(x)$ limitata, zona di integrazione = semiretta $[a, +\infty)$
 oppure $(-\infty, b]$

Dato un integrale improprio, occorre spezzarlo nella somma di tanti integrali MONOPROBLEMA

Esempi

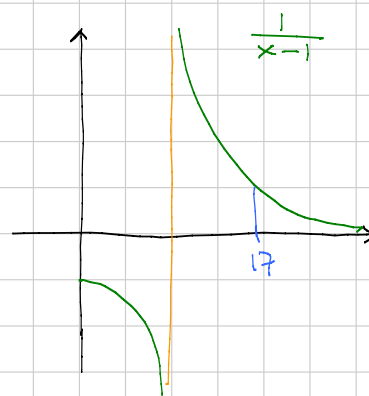
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \int_0^7 \frac{1}{x} dx + \int_7^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 unico probl. unico problema
 $f(x)$ non limitata zona di int.
 vicino ad $x=0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x-1} dx =$$

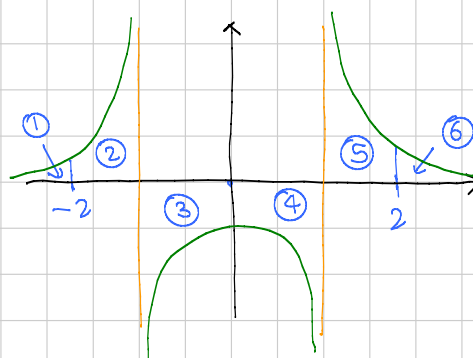
$$= \int_0^1 \frac{1}{x-1} dx + \int_1^{17} \frac{1}{x-1} dx + \int_{17}^{+\infty} \frac{1}{x-1} dx$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $f(x)$ non lim. zona int. zona int.
 vicino $x=1$ non limit. non limit.



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{-2} + \int_{-2}^{-1} + \int_{-1}^0 + \int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^{+\infty}$$



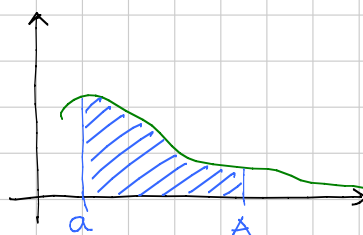
— 0 — 0 —

TRATTAMENTO INTEGRALI MONOPROBLEMA

1° CASO $f(x)$ limitata, zona di integrazione: $[a, +\infty)$

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

$\underbrace{\int_a^A f(x) dx}_{\text{integrale proprio}}$



Essendo un limite, ci sono i soliti 4 possibili comportamenti

Esempio 1

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x} dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-e^{-x} \right]_{x=0}^{x=A}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\boxed{e^{-A}} + 1 \right] = 1$$

L' int. improprio
CONVERGE
a 1.

Esempio 2

$$\int_7^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_7^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\log x]_{x=7}^{x=A}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} [\log A - \log 7] = +\infty$$

L' int. improprio DIVERGE a $+\infty$ (stessa cosa se sostituisco 7 con un qualunque $a > 0$)

Esempio 3

$$\int_7^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_7^A \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$$

$\alpha \neq 1$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_{x=7}^{x=A}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{A^{\alpha-1}} + \underbrace{\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{7^{\alpha-1}}}_{\text{Numero}} \right)$$

$$= \text{Numero} + \frac{1}{1-\alpha} \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A^{\alpha-1}} = \begin{cases} \text{Numero} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Conclusione

$\int_7^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \begin{cases} \nearrow \text{converge se } \alpha > 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \leq 1 \end{cases}$

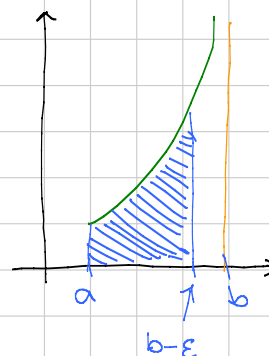
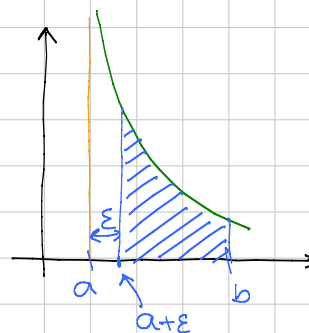
Posso sostituire
7 con ogni
 $a > 0$

2° caso zona di integr. = intervallo $[a, b]$
 $f(x)$ non limitata vicino ad $x = a$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Se il problema fosse in $x = b$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$



Esempio 1

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[2\sqrt{x} \right]_{x=\varepsilon}^{x=2} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2\sqrt{2} - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2\sqrt{2} \rightarrow \text{CONVERGE} \end{aligned}$$

Esempio 2

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\log x]_{x=\varepsilon}^{x=2} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\log 2 - \log \varepsilon) = +\infty \rightarrow \text{DIVERGE} \end{aligned}$$

Esempio 3

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^2 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{1-2} \frac{1}{x^{2-1}} \right]_{x=\varepsilon}^{x=2}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{2^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right)$$

$\nearrow$ se $\alpha < 1$ tende a $\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{2^{\alpha-1}}$
 $\searrow$ se $\alpha > 1$ "è al denominatore" quindi tende a $+\infty$
 (occhio ai segni!)

Conclusione

$\int_0^2 \frac{dx}{x^\alpha}$	$\nearrow$ converge se $\alpha < 1$ $\searrow$ Diverge a $+\infty$ se $\alpha \geq 1$
--------------------------------	--

Il 2 non è importante

Oss. Per $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$

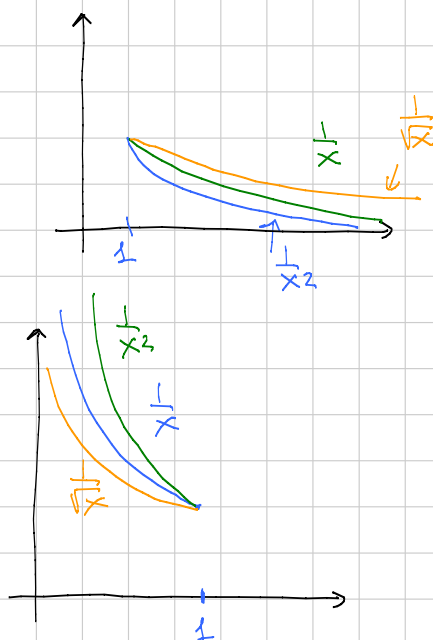
"Più α è grande, più la funzione è piccola, più è facile che l'integrale improprio converga"

Per $\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx$ la situazione è opposta

"Più α è piccolo, più facile è la convergenza"

Se l'integrale ha tanti problemi,

- ① si scompone in tanti pezzi con un problema solo
- ② si studiano i vari pezzi
- ③ si conclude (se c'è un pezzo che div. a $+\infty$ e un pezzo



che diverge a $-\infty$, quello complessivo si dichiara indeterminato).

Esempio

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]_{x=-1}^{x=1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

NO!!!!!! L'integrale è IMPROPRIO!!

$$= \int_{-1}^0 \frac{1}{x^3} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^3} dx$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 DIVERGE DIVERGE A $+\infty$
 A $-\infty$ ($\alpha=3$)



$$\Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx \text{ è indeterminato}$$

MATEMATICA I

Titolo nota

ORA 77

29/11/2007

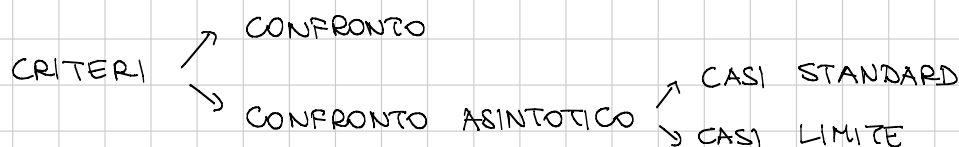
Integrali impropri: criteri di convergenza

Servono a stabilire se un integrale improprio converge o no senza usare la definizione (primitiva + limite).

Se l'integrale converge, NON permettiamo di calcolarne il valore esatto.

Integranda $f(x)$ a segno costante (≥ 0): i comportamenti possibili sono solo 2;

- converge
- divergere a $+\infty$



Integranda $f(x)$ a segno variabile: CRITERIO ASSOLUTA INTEGRABILITÀ

Criterio assoluta integrabilità (E è la zona di integrazione: intervallo o semiretta)

$$\int_E |f(x)| dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx \text{ converge}$$

(In generale non vale il viceversa)

$$\int_E |f(x)| dx = +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

CRITERIO CONFRONTO

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in E$$

$$\int_E f(x) dx = +\infty \Rightarrow \int_E g(x) dx = +\infty$$

$$\int_E g(x) dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx < +\infty$$

CONFRONTO ASINTOTICO $f(x) \geq 0$ $g(x) > 0$ in E

$$\lim_{x \rightarrow \uparrow} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0, \neq +\infty, \text{ allora}$$

PROBLEMA (se la zona di int. è $[a, +\infty)$ il problema è $+\infty$,
se la zona è $[a, b]$, il problema è l'estremo in cui
la funzione non è limitata)

$$\int_E f(x) dx \text{ si comporta come } \int_E g(x) dx$$

CON QUEL TIPO DI PROBLEMA

Esempio 1

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \underbrace{\int_0^3 \frac{1}{x^2} dx}_{\text{DIVERGE A } +\infty} + \underbrace{\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx}_{\text{CONVERGE}} = +\infty$$

Esempio 2

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{x^5+5}{x^7+7}}_{f(x)} dx$$

$f(x)$ è limitata perché il
denominatore non si annulla
nella zona di integrazione

→ UNICO PROBLEMA : $+\infty$

Brutale $\frac{x^5+5}{x^7+7} \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \rightarrow +\infty$

Rigoroso : confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow \boxed{+\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5+5}{x^7+7} \cdot x^2 = 1 \neq 0, \neq +\infty$$

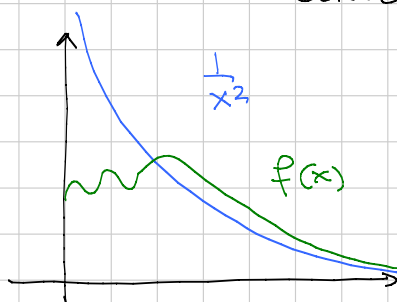
PROBLEMA

Quindi $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ si comporta come $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$, dunque
diverge a $+\infty$

NO!!!!!!!

Quindi l'integrale di $f(x)$ con unico problema $+\infty$ si comporta come l'integrale di $\frac{1}{x^2}$ con problema a $+\infty$, dunque
CONVERGE

Il confronto tra $f(x)$ e $g(x)$ vale solo per x grandi



Esempio 2

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx$$

2 problemi: $x=0$ e $x=+\infty$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx}_{\text{CONV.}}$$

$$+ \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx}_{\text{CONV.}}$$

Integranda ≥ 0

$\Rightarrow$ CONVERGE

$$\frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} \leq \frac{100}{x^{3/2}}$$

$\int \frac{100}{x^{3/2}} dx$ con problema a $+\infty$ CONVERGE ($\alpha = 3/2 > 1$)
quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx \text{ converge}$$

Esaminiamo l'integrale in $[0,1]$

Per $x \sim 0$ si ha $\frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} \sim \frac{x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

di conseguenza l'integrale di $f(x)$ con problema in $x=0$ si comporta come

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ con pb. in } x=0, \text{ dunque CONVERGE}$$

Esempio 3

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

Unico problema: $x = +\infty$

Integranda a segno variabile $\Rightarrow$ unica speranza (per ora) è l'assoluta integrabilità. Quindi studio

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx$$

$$\frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx \text{ con pb. a } +\infty \text{ CONVERGE } (x > 2)$$

$\Downarrow$ (CRITERIO CONFRONTO)

$$\int \frac{|\sin x|}{x^2} dx \text{ con pb. a } +\infty \text{ CONVERGE}$$

$\Downarrow$ (ASSOLUTA INTEGRABILITÀ)

$$\int \frac{\sin x}{x^2} dx \text{ con pb. a } +\infty \text{ CONVERGE}$$

Esempio 4

$$\int_0^{10} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

Unico pb. a $x = 0$

L'integranda è ≥ 0 vicino al problema, quindi posso usare i criteri

Vicino a $x = 0$

$$\frac{\sin x}{x^2} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \quad \text{Rigorosamente faccio contr. asint. con } g(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Quindi $\int \frac{\sin x}{x^2} dx$ con problema a $x = 0$ si comporta come

$$\int \frac{1}{x} dx \text{ con problema a } x = 0, \text{ dunque DIVERGE}$$

Esempio 5 $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$ problema in $x=1$

CAMBIO VARIABILI $y = x-1$ $dy = dx$

Quando $x=1$, ho che $y=0$; quando $x=2$, ho che $y=1$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dy}{y}, \text{ dunque DIVERGE}$$

Esempio 6 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4-1} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^4-1} dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^4-1} dx$

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^4-1} dx$ converge per confr. asint. con $\frac{1}{x^4}$

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}$$

↑ COLPEVOLE DELL'INT. IMPROPRIO

Individuato il problema si fa confr. asint. con $\frac{1}{x-1} = g(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^4-1} \cdot (x-1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^3+x^2+x+1} = \frac{1}{4} \neq 0, \neq +\infty \end{aligned}$$

Quindi $\int_1^2 \frac{dx}{x^4-1}$ si comporta come $\int \frac{dx}{x-1}$ con pb. in $x=1$,

il quale a sua volta si comporta come $\int \frac{dy}{y}$ con pb. in $y=0$, dunque diverge.

Esempio 7 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$

CONVERGE CONVERGE $\sim \frac{1}{x^2}$

$$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{x-1}} \text{ a } x=1 \sim \frac{1}{\sqrt{y}} \text{ a } y=0$$

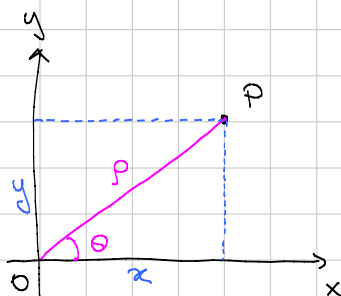
MATEMATICA I

ORA 78

Titolo nota

30/11/2007

COORDINATE POLARI

Coord. CARTESIANE di P: (x, y) Coord. POLARI di P: ρ, θ ρ = distanza OP θ = angolo formato dal semiasse positivo delle x e OPEccezione; $P = O$ ^{origine} allora $\rho = 0$, θ non è definito ρ assume solo valori ≥ 0 θ è un angolo, dunque definito a meno di multipli di 2π Esempi

$P = (0, 1)$

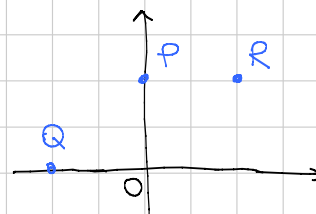
$Q = (-1, 0)$

$R = (1, 1)$

$\rho = 1, \theta = \frac{\pi}{2}$

$\rho = 1, \theta = \pi$

$\rho = \sqrt{2}, \theta = \pi/4$



Formule di passaggio

Noti ρ e θ , calcolare x e y

$x = \rho \cos \theta$

$y = \rho \sin \theta$

Noti x e y , calcolare ρ e θ

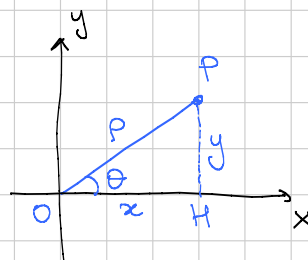
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

Per θ la situazione è + complessa

$\tan \theta = \frac{y}{x}$

quindi

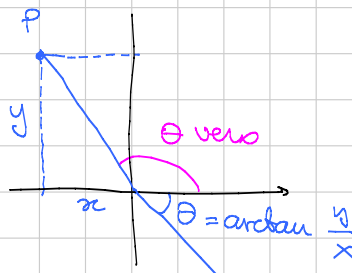
$\theta = \arctan \frac{y}{x}$

NO!!! arctan fornisce solo valori tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ 

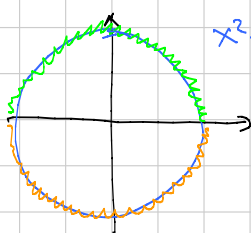
La formula $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ è corretta nel I e IV quadrante con $x \neq 0$.

Se siamo nel II o III quadrante se uso la formula non ottengo θ , ma il suo supplementare, quindi

$$\theta_{\text{vero}} = \pi - \arctan \frac{y}{x} \quad \text{II e III quadr.}$$



Descrizione di insiemi mediante coordinate polari

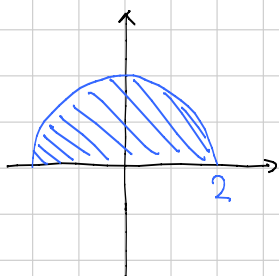


$$x^2 + y^2 \leq 1$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

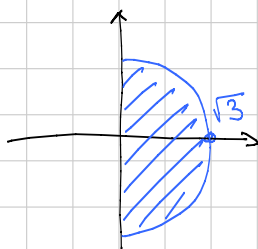
$$A = \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) : \rho \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]\}$$



$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 2], 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

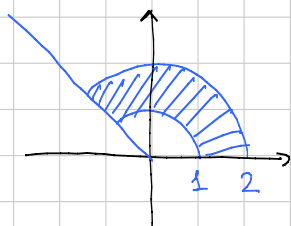
$$= \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) : \rho \in [0, 2], \theta \in [0, \pi]\}$$



$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3, x \geq 0\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \sqrt{3}], -\sqrt{3-x^2} \leq y \leq \sqrt{3-x^2}\}$$

$$= \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) : \rho \in [0, \sqrt{3}], \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$$



$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4}_{\text{CORONA}}, \underbrace{y \geq 0}_{\text{SOPRA ASSE } x}, \underbrace{y \geq -x}_{\text{SOPRA RETTA } y = -x}\}$$

$$= \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) : \rho \in [1, 2], \theta \in [0, \frac{3\pi}{4}]\}$$

Integrali doppi in coordinate polari.

Esempio 1 $\iint_A (x^2 + y^2) dx dy$ $A =$ come nell'esempio

$$= \int_0^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta$$

↓
sfrutto la descrizione
di A in coord. polari

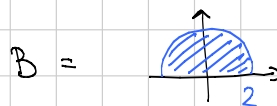
p^2 p pagamento: occorre moltiplicare tutto per p

funzione $x^2 + y^2$ in coord. polari.
In generale pongo $x = p \cos \theta$, $y = p \sin \theta$

$$x^2 + y^2 = p^2 \cos^2 \theta + p^2 \sin^2 \theta = p^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = p^2$$

$$= \int_0^1 dp \int_0^{2\pi} p^3 d\theta = \int_0^1 p^3 dp \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \int_0^1 p^3 dp = 2\pi \left[\frac{p^4}{4} \right]_{p=0}^{p=1} = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Esempio 2 $\iint_B y dx dy =$



$$= \int_0^2 dp \int_0^{\pi} d\theta$$

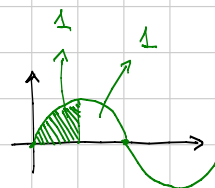
DESCRIZIONE
INSIEME

$p \sin \theta$
y in coord.
polari

p
pagamento

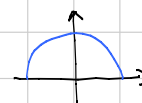
$$= \int_0^2 dp \int_0^{\pi} p^2 \sin \theta d\theta = \int_0^2 p^2 dp \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta$$

$$= 2 \int_0^2 p^2 dp = 2 \left[\frac{p^3}{3} \right]_{p=0}^{p=2} = \frac{16}{3}$$



Esempio 2.5 $\iint_B x dx dy = 0$

↑
per simmetria



Ciascuno dei pezzi ①, ②, ③, ..., ⑦ fa $\frac{\pi}{4}$

Conclusione: L'integrale di $\cos^2\theta$ o di $\sin^2\theta$ fra 2 estremi che sono multipli di $\frac{\pi}{2}$ è sempre uguale a metà della lungh. dell'intervallo

Tornando all'esempio

$$\int_0^{\sqrt{3}} \rho^3 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{3}}$$

Misura intervallo $\approx \pi$
 $\Rightarrow \text{integr} = \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{3\pi}{8}$$

MATEMATICA I

ORA 79

Titolo nota

30/11/2007

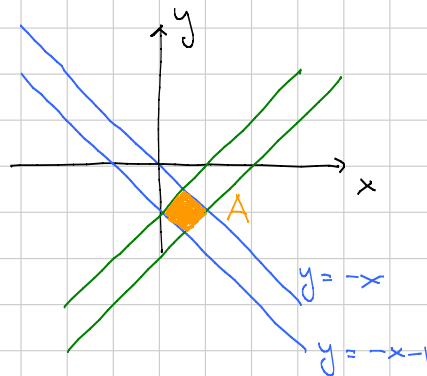
CAMBI DI VARIABILE NEGLI INTEGRALI DOPPI

Esempio $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x+y \leq 0, 1 \leq x-y \leq 2\}$

$$\iint_A (x^2 - y^2) dx dy$$

$$\begin{aligned} x+y \leq 0 & \quad y \leq -x \\ x+y \geq -1 & \quad y \geq -x-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-y \leq 2 & \quad y \geq x-2 \\ x-y \geq 1 & \quad y \leq x-1 \end{aligned}$$



$$-1 \leq \underbrace{x+y}_u \leq 0$$

$$1 \leq \underbrace{x-y}_v \leq 2$$

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = uv$$

$$\iint_A (x^2 - y^2) dx dy = \int_{-1}^0 du \int_1^2 dv \quad \underbrace{uv}_{\substack{\text{PAGAMENTO} \\ J(u,v) \\ \text{integrande } x^2 - y^2 \\ \text{scritta nelle variabili} \\ u \text{ e } v}}$$

Descrizione insieme A nelle variabili u e v

Come si calcola $J(u,v)$?

- ① Ricavare
- ② Matrice
- ③ Determinante

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad u &= x+y \\ v &= x-y \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Quello che} \\ \text{ho posto} \end{array} \right\}$$

Ricavare x e y in funzione di u e v

Sommo: $u+v = 2x$

Sottraggo: $u-v = 2y$

$$x = \frac{u+v}{2}$$

$$y = \frac{u-v}{2}$$

② MATRICE JACOBIANA

 x_u = derivata di x rispetto ad u

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

In questo caso la matrice è costante.

In generale gli elementi saranno funzioni di u e v

③ $J(u,v) = |\text{Det (Matrice)}|$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Nel vostro caso $J(u,v) = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}$

Conclusione dell'esercizio: $\iint_A (x^2 - y^2) dx dy = \int_{-1}^0 du \int_1^2 uv \frac{1}{2} dv$
 $= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 u du \cdot \int_1^2 v dv = \dots$

Esempio di calcolo di J Coordinate polari

① Ricavare $x = \rho \cos \theta$ $y = \rho \sin \theta$

② Matrice jacobiana $\begin{pmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$

③ Determinante

$$J(\rho, \theta) = |\text{Det (Matrice)}| = \underbrace{\rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta}_{= \rho} = \rho$$

Cambi di variabile particolarmente usatiTRASLAZIONI

$u = x - x_0$

$v = y - y_0$

 x_0, y_0 numeri fissati

① Ricavare: $x = u + x_0$, $y = v + y_0$

② Matrice: $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

③ $J(u,v) = 1$

Esempio

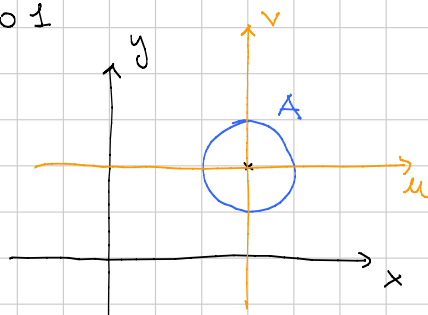
$$\iint_A x \, dx \, dy$$

A = cerchio con centro in $(3,2)$
e raggio 1

Equazione di A :

$$\underbrace{(x-3)^2 + (y-2)^2}_{\text{distanza di } (x,y) \text{ da } (3,2)} \leq \underbrace{1}_{\text{raggio}^2}$$

$$u^2 + v^2 \leq 1$$



$$\iint_A x \, dx \, dy = \iint_{u^2+v^2 \leq 1}$$

insieme nelle
coordinate (u,v)

$$(u+3) \cdot \underbrace{1}_{J(u,v)}$$

x scritta in termini
di u e v

$$= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} (u+3) \, du \, dv = \underbrace{\iint_{u^2+v^2 \leq 1} u \, du \, dv}_{=0} + \iint_{u^2+v^2 \leq 1} 3 \, du \, dv = 3 \text{Area}''$$

DILATAZIONI DEGLI ASSI

$$u = ax$$

$$v = by$$

① Ricavare

$$x = \frac{u}{a}$$

$$y = \frac{v}{b}$$

$$a > 0, b > 0$$

② Matrice

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

③ Determinante

$$J(u,v) = |\text{Det}| = \frac{1}{ab}$$

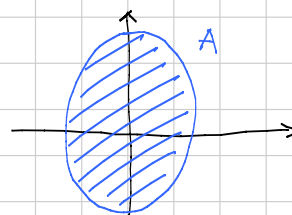
Esempio

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 2y^2 \leq 5\}$$

$$\text{Area}(A) = \iint_A 1 \, dx \, dy$$

$$\underbrace{(\sqrt{3}x)^2}_u + \underbrace{(\sqrt{2}y)^2}_v \leq 5$$

$$u^2 + v^2 \leq 5$$



$$\begin{aligned}
 \iint_A 1 \, dx \, dy &= \iint_{u^2+v^2 \leq 5} 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \, du \, dv \\
 &\quad \text{INSIEME A nelle coordinate } u \text{ e } v \quad \downarrow \text{funzione resta uguale} \quad \uparrow \text{J calcolato con } a=\sqrt{2}, b=\sqrt{3} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \iint_{u^2+v^2 \leq 5} 1 \, du \, dv \\
 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \text{Area (cerchio } u^2+v^2 \leq 5) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \pi \cdot 5 = \frac{5\pi}{\sqrt{6}}
 \end{aligned}$$

$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 \leq 1$

In generale l'area dell'ellisse in forma canonica $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} \leq 1$ è data dalla formula πAB (se $A=B$ è l'area del cerchio)

Altro esempio

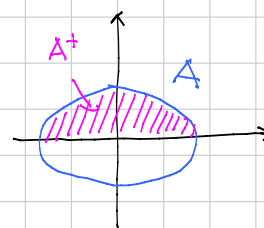
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 \leq 5\}$$

$$\iint_A y \, dx \, dy = 0$$

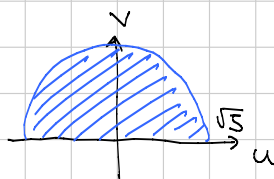
$$\iint_A |y| \, dx \, dy = 2 \iint_{A^+} y \, dx \, dy =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \iint_{\substack{u^2+v^2 \leq 5 \\ v \geq 0}} \frac{v}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \, du \, dv \\
 &\quad \text{A}^+ \text{ nelle nuove coord} \quad \uparrow y \quad \uparrow J(u,v) = \frac{1}{ab}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} \iint_{\substack{u^2+v^2 \leq 5 \\ v \geq 0}} v \, du \, dv$$



$$\begin{aligned}
 x^2 + 3y^2 &\leq 5 \\
 x^2 + (\sqrt{3}y)^2 &\leq 5 \\
 u = x \quad v = \sqrt{3}y \\
 a = 1 \quad b = \sqrt{3}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 u &= \rho \cos \theta \\
 v &= \rho \sin \theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{3} \int_0^{\sqrt{5}} dp \int_0^{\pi} d\theta \underbrace{\rho \sin \theta}_{\sqrt{}} \underbrace{\rho}_{\sqrt{}} = \\
 &\quad \text{semicircle} \\
 &= \frac{2}{3} \int_0^{\sqrt{5}} \rho^2 dp \underbrace{\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta}_2 = \frac{4}{3} \int_0^{\sqrt{5}} \rho^2 dp \\
 &= \frac{4}{3} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{5}} = \\
 &= \frac{20\sqrt{5}}{9}
 \end{aligned}$$

MATEMATICA I

Titolo nota

ORA 80

04/12/2007

INTEGRALI TRIPLI

① Notazioni

 $A \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato $f(x, y, z)$ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ limitata

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$$

$$\text{oppure } \int_A f(x, y, z) dx dy dz$$

② Significato geometrico / fisico

③ Definizione

$A = \text{solido}$ $f(x, y, z) > 0$ in A pensiamo come densità del materiale di cui è composto A .

Obiettivo: calcolare il peso di A .



Caso banale: $A = \text{parallelepipedo con spigoli paralleli agli assi}$
 $A = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$

$$f(x, y, z) = \lambda \text{ costante in } A$$

$$\begin{aligned} \text{In questo caso peso} &= \text{Volume}(A) \cdot \lambda \\ &= (b-a)(d-c)(f-e) \cdot \lambda \end{aligned}$$

Caso semibanale: $A = \text{unione finita di parallelepipedi}$
 come sopra che si toccano solo sul bordo (unione di mattoni)

$$f(x, y, z) = \text{costante (eventualmente diversa da mattone a mattone)}$$

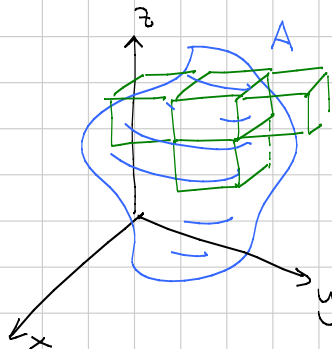
In questo caso: peso = somma pesi dei singoli mattoni

Caso generale : A generico insieme limitato
 $f(x,y,z)$ generica funzione limitata

Suddivido il solido in tanti "mattoni".

Se voglio una approssimazione del peso dall'alto faccio finta che su ogni mattone la densità sia una costante $\geq$ dei valori di $f(x,y,z)$ in quel mattone.

Se voglio approssimazione buona devo "sforare poco ai lati" e approssimare bene su ogni mattone.



Idem se voglio approssimazione dal basso i mattoni non devono sfiorare, ma essere contenuti in A.

In questo modo ho costruito $I^+(f; A)$, $I^-(f; A)$

④ Tecniche di calcolo. $\rightarrow$ Formule di riduzione
 $\rightarrow$ Cambi di variabile

Formule di riduzione $\begin{cases} \nearrow 3 = 1+1+1 & \text{Parallelepipedo} \\ \rightarrow 3 = 2+1 & \text{Per COLONNE} \\ \searrow 3 = 1+2 & \text{Per SEZIONI} \end{cases}$

$3 = 1+1+1$ $A = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ parallelepipedo con spigoli // agli assi

$f(x,y,z)$ = funzione limitata qualunque

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz f(x,y,z)$$

Ci sono 6 varianti di questa formula!

- * posso iniziare con una qualunque delle 3 variabili (3 possib.)
- * la seconda variabile la posso scegliere tra le 2 rimanenti

Esempio $A = [0,1] \times [0,2] \times [0,3]$

$$\iiint_A (xy+z) dx dy dz = \iiint_A xy dx dy dz + \iiint_A z dx dy dz = 3+3 = 12.$$

$$\iiint_A xy dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 xy dz = \int_0^1 x dx \int_0^2 y dy \int_0^3 1 dz$$

$$= 3 \int_0^1 x dx \int_0^2 y dy = 3 \int_0^1 x dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} =$$

$$= 6 \int_0^1 x dx = 6 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = 3$$

$$\iiint_A z dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 z dz \quad \text{oppure}$$

$$\int_0^3 dz \int_0^1 dx \int_0^2 dy z = \int_0^3 z dz \int_0^1 dx \int_0^2 dy$$

$$= 2 \int_0^3 z dz = 2 \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=3} = 9$$

$3 = 2 + 1$ Formule di integrazione per COLONNE

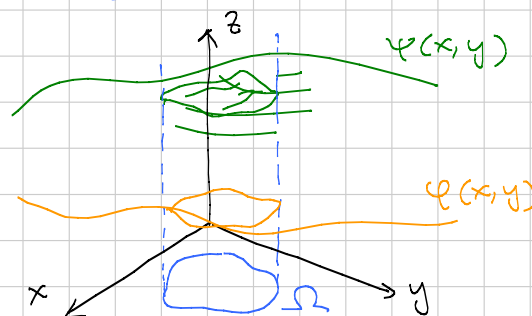
Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice NORMALE rispetto al piano base x,y se si può scrivere nella forma

$$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega, \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y) \}$$



$\psi(x,y)$ descrive
il COPERCHIO

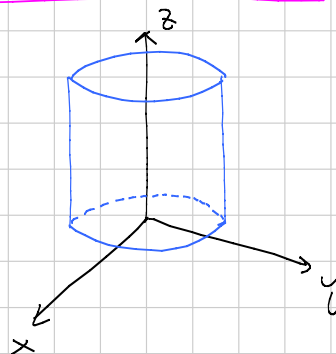
$\varphi(x,y)$ descrive
il FONDO



Formula di int. per colonne

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Esempio 1 A = cilindro con
raggio base = 2 e
altezza = 3
e asse lungo asse z



$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

= cerchio nel piano con centro
nell'origine e raggio 2

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, 0 \leq z \leq 3\}$$

$$\iiint_A z^2 dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_0^3 dz z^2$$

$$= \iint_{\Omega} dx dy \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^{z=3} = 9 \iint_{\Omega} dx dy$$

$$= 9 \underbrace{\text{Area}(\Omega)}_{= 4\pi} = 36\pi$$

$$\iiint_A x^2 dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_0^3 x^2 dz = \iint_{\Omega} x^2 dx dy \int_0^3 dz$$

$$= 3 \iint_{\Omega} x^2 dx dy = 3 \int_0^2 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\rho^2 \cos^2 \theta}_{x^2} \underbrace{\rho}_{\rho}$$

$$= 3 \int_0^2 \rho^3 d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta}_{\pi} = 3\pi \int_0^2 \rho^3 d\rho = 3\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{\rho=2} = 12\pi$$

$$\iiint_A x \, dx \, dy \, dz = 0 \quad \text{solite ragioni di simmetria}$$

(volendo ci si riconduce a $\iint x$ sul cerchio)

Esempio 2 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 3\}$

Base $\Omega =$

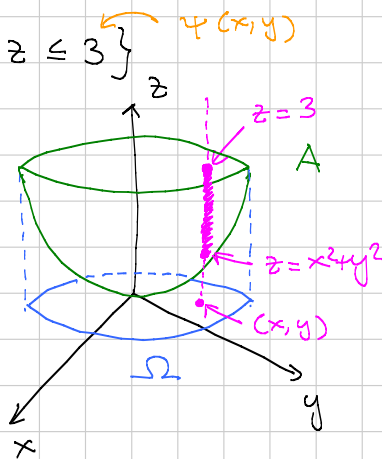
$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3\}$$

Scrittura di A come insieme normale

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, x^2 + y^2 \leq z \leq 3\}$$

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Omega} dx \, dy \int_{x^2+y^2}^3 f(x, y, z) \, dz$$

integrale nella colonna sopra p.to (x, y)



MATEMATICA I

ORA 81

Titolo nota

04/12/2007

3 = 1 + 2

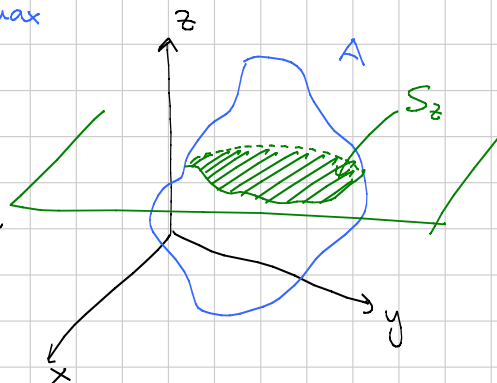
FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SEZIONI

La descrizione di un insieme A per sezioni è una scrittura del tipo

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [a, b], (x, y) \in S_z \}$$

$z_{\min}$ $z_{\max}$

$z_{\min}$ e $z_{\max}$ sono la minima e la massima quota dei pti di A .
Fissato z , S_z è la sezione di A mediante il piano // al piano base a quota z .



$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{S_z} dx dy f(x, y, z)$$

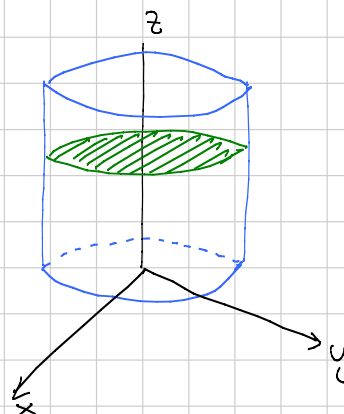
Esempio 1 A = cilindro con raggio base 2 e altezza 3

$$\iiint_A z^2 dx dy dz \stackrel{\text{sezioni}}{=} \int_0^3 dz \iint_{S_z} z^2 dx dy$$

$$z_{\min} = 0 \quad z_{\max} = 3$$

S_z (qualunque sia $z \in [0, 3]$) è sempre il cerchio con centro nell'origine e raggio 2.

$$= \int_0^3 dz \iint_{S_z} z^2 dx dy = \int_0^3 z^2 dz \underbrace{\iint_{S_z} dx dy}_{\text{AREA } S_z} = 4\pi \int_0^3 z^2 dz = 36\pi$$

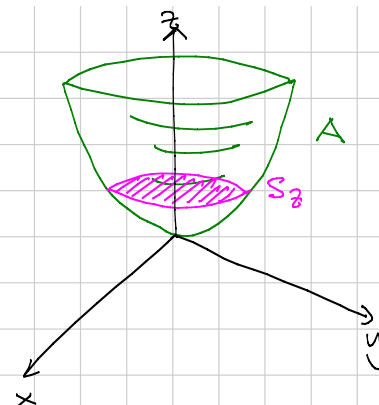


Esempio 2 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 3\}$

$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz = \quad z_{\min} = 0, \quad z_{\max} = 3$$

$$= \int_0^3 dz \iint_{S_z} z \, dx \, dy = \int_0^3 z \, dz \iint_{S_z} dx \, dy$$

$$= \int_0^3 z \, \text{Area}(S_z) \, dz$$



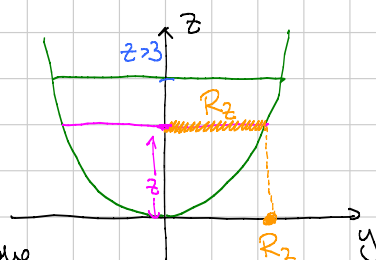
S_z è un cerchio di raggio R_z variabile. Determinare R_z

L'equazione della parabola è

$$z = y^2,$$

dunque

$$z = (R_z)^2 \rightarrow \text{esprime } R_z \text{ in funzione di } z$$



$$\int_0^3 z \, \text{Area}(S_z) \, dz = \int_0^3 z \cdot \pi R_z^2 \, dz = \pi \int_0^3 z^2 \, dz = \pi \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^{z=3}$$

$$= 9\pi$$

Esempio 3

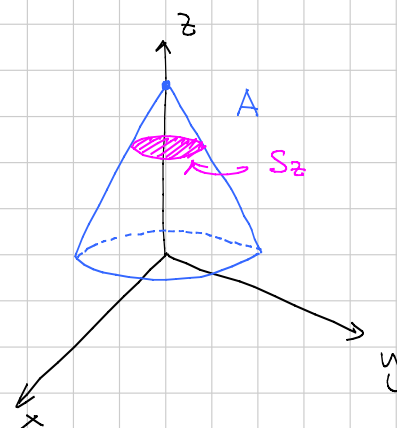
$A = \text{cono}$

raggio base = 1

altezza = 3

$$\iiint_A z^2 \, dx \, dy \, dz$$

potrei farlo per colonne,
ma dovrei scrivere l'eq.
del cono



Proviamo per sezioni:

$$= \int_0^3 dz \iint_{S_z} z^2 \, dx \, dy = \int_0^3 z^2 \, dz \iint_{S_z} dx \, dy = \int_0^3 z^2 \, \text{Area}(S_z) \, dz$$

S_z , al variare di z , è un cerchio di raggio R_z

Il p.to P ha coordinate (R_z, z) .

Il p.to P sta su una retta di eq.
 $z = -3y + 3$.

Di conseguenza

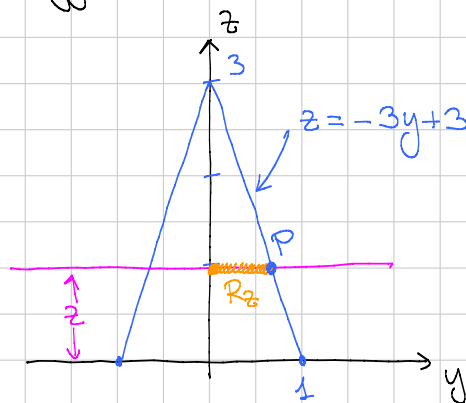
$$z = -3R_z + 3 \text{ e quindi}$$

$$R_z = \frac{3-z}{3} = 1 - \frac{z}{3}$$

Piccolo controllo: $z=0 \rightarrow R=1$
 $z=3 \rightarrow R=0$

$$\int_0^3 z^2 \text{area}(S_z) dz = \int_0^3 z^2 \pi R_z^2 dz = \pi \int_0^3 z^2 \left(1 - \frac{z}{3}\right)^2 dz$$

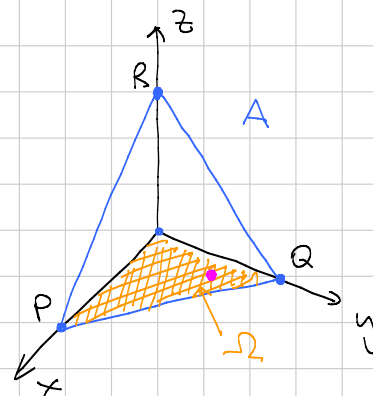
$$= \text{si fa.}$$



Esempio 4

A = piramide con vertici in
 $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

Scriviamo A come insieme normale
rispetto al piano base x,y .



$$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega, \quad 0 \leq z \leq 1-x-y \}$$

Equazione del piano per P, Q, R : $z = ax + by + c$ oppure
 $ax + by + cz = d$

In questo caso : $x + y + z = 1$, oppure $z = 1 - x - y$

Proviamo alcuni casi particolari $(x,y) = (0,0)$, $0 \leq z \leq 1$
 $(x,y) = (1,0)$, $0 \leq z \leq 1-1=0$

$$\iiint_A x dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_0^{1-x-y} dz \cdot x$$

↑
per
colonne

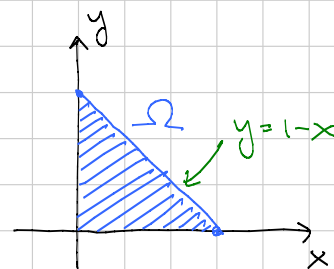
$$= \iint_{\Omega} x dx dy \int_0^{1-x-y} dz$$

↑
lung. intervallo
= 1-x-y

$$= \iint_{\Omega} x(1-x-y) dx dy =$$

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in [0,1], 0 \leq y \leq 1-x\}$$

↑ insieme normale rispetto
asse x



$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy x(1-x-y) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x - x^2 - xy) dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left[xy - x^2 y - x \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} =$$

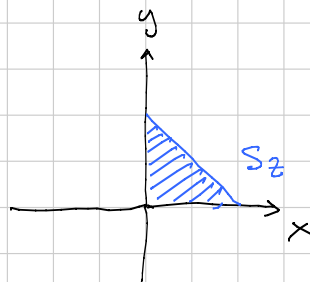
$$= \int_0^1 dx \left[x(1-x) - x^2(1-x) - x \frac{(1-x)^2}{2} \right] = \text{viene} \dots$$

$$\iiint_A x dx dy dz = \int_0^1 dz \iint_{S_z} x dx dy$$

↑
sezioni

$S_z =$ triangolo rettangolo isoscele
con cateti lunghi 1-z

VERIFICARE FACENDO IN VARI MODI



MATEMATICA I

ORA 82

Titolo nota

05/12/2007

Cambi di variabile negli integrali TRIPLI

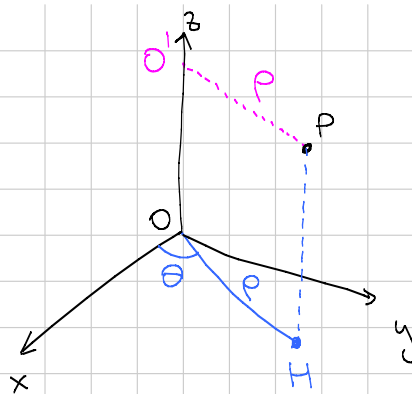
- ① COORDINATE CILINDRICHE
- ② COORDINATE SPERICHE
- ③ CAMBI COORDINATE IN GENERALE

Coordinate cilindriche (nello spazio) (x, y, z) cartesiane (ρ, θ, z) cilindrichepiani di
 (x, y)

↑ quota

PH con segno = z $OH = \rho \geq 0$

Altro modo di vederlo:
 ρ è la distanza di P
 dall'asse z (PO')



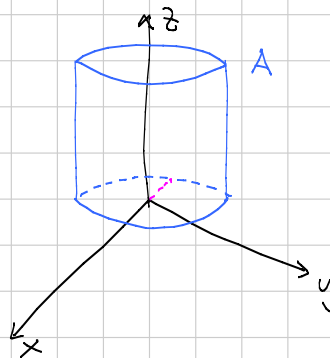
Esempio raggio base = 2
 altezza = 3

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, z \in [0, 3] \}$$

In coordinate cilindriche diventa

$$\rho \in [0, 2] \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad z \in [0, 3]$$

↑ distanza dall'asse



$$\begin{aligned}
 \iiint_A z^2 dx dy dz &= \int_0^2 \underbrace{dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 dz}_{\text{Descrizione di A in coord. cilindriche}} \underbrace{z^2}_{\text{funzione in coord. cilindriche}} \underbrace{p}_{\text{Pag. coord. cilindr.}} \\
 &= \int_0^2 p dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 z^2 dz = \int_0^2 p dp \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^{z=3} \\
 &= 3 \int_0^2 p dp \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} = 18\pi \int_0^2 p dp = 18\pi \left[\frac{p^2}{2} \right]_{p=0}^{p=2} \\
 &= 36\pi
 \end{aligned}$$

Formule di passaggio :

Noti $\rho, \theta, z \rightarrow x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta \quad z = z$

Noti $x, y, z \rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \text{vedi disegno} \quad z = z$

COORDINATE SFERICHE

ρ, θ, φ

$\rho = \text{lunghezza } OP \geq 0$

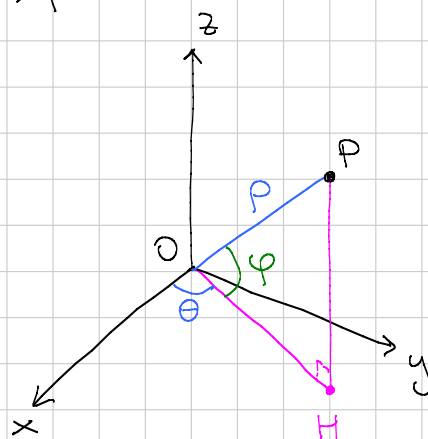
Sia H la proiezione di P sul piano base

$\theta = \text{come nelle coordinate cilindriche} = \text{angolo tra semiasse positivo delle } x \text{ e semiretta } OH, (\theta \in [0, 2\pi])$

$\varphi = \text{angolo tra } OH \text{ e } OP, \quad \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Interpretazione geografica :

- φ è la latitudine
- θ è la longitudine



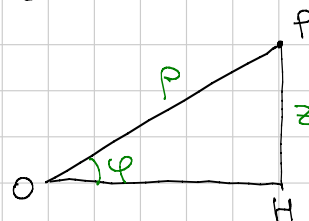
Formule di passaggio:

Noti $(x, y, z) \rightsquigarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Noti $(\rho, \theta, \varphi) \rightsquigarrow$

$$\rho \sin \varphi = z$$

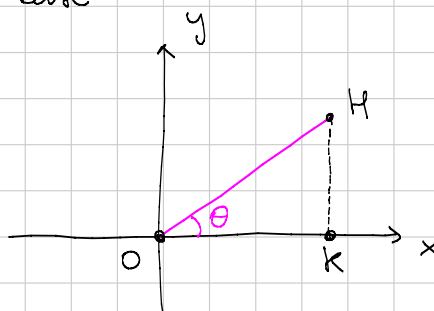
$$\rho \cos \varphi = r$$



Per calcolare x e y disegno il piano base

$$r \cos \theta = x$$

$$r \sin \theta = y$$



Quindi

$$x = \rho \cos \varphi \cos \theta \quad y = \rho \cos \varphi \sin \theta \quad z = \rho \sin \varphi$$

Casi particolari:

* L'origine $(0,0,0)$ ha $\rho=0$ e θ e φ non definite

* per tutti i punti dell'asse z si ha $\varphi = \frac{\pi}{2}$ per $z > 0$ e

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ per $z < 0$. Inoltre H coincide con O , dunque θ non è definito.

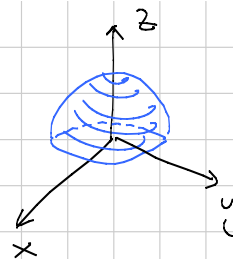
Descrizione di insiemi in coordinate sferiche

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \}$$

pti dello spazio da distanza da O meno di 2

$$\rho \in [0, 2], \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

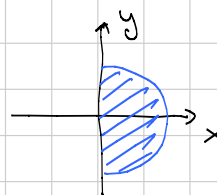
$$B = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 \leq 3}_{\text{sfera di raggio } \sqrt{3}}, \underbrace{z \geq 0}_{\text{parte alta}} \}$$



$$\rho \in [0, \sqrt{3}], \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x \geq 0 \}$$

vista dall'alto



$$\rho \in [0, \sqrt{2}], \quad \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \} = \frac{1}{8} \text{ di sfera}$$

$$\rho \in [0, 3], \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Pagamento

$$J(\rho, \theta, \varphi) = \rho^2 \cos \varphi$$

Esempio

$$\iiint_D z^2 dx dy dz =$$

$$= \int_0^3 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \quad \underbrace{\rho^2 \sin^2 \varphi}_{z^2 \text{ in coord. sferiche}} \quad \underbrace{\rho^2 \cos \varphi}_J$$

Descrizione D in coord. sferiche

$$= \int_0^3 \rho^4 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^3 \rho^4 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^3 \rho^4 d\rho \left[\frac{\sin^3 \varphi}{3} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} \int_0^3 \rho^4 d\rho \quad \text{e si finisce}$$

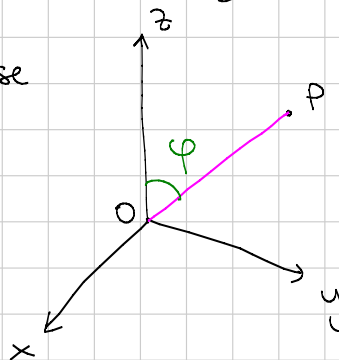
ACHTUNG! I fisici usano spesso altre coord. sferiche

φ è l'angolo fra OP e il semiasse positivo delle z .

Quindi

$$\varphi_{\text{fisici}} \in [0, \pi]$$

$$\varphi_{\text{fisici}} + \varphi_{\text{geografi}} = \frac{\pi}{2}$$



Tutto cambia nel senso che $\sin \varphi$ e $\cos \varphi$ si scambiano ovunque (in tutte le formule, compreso il J)

MATEMATICA I

Titolo nota

ORA 83

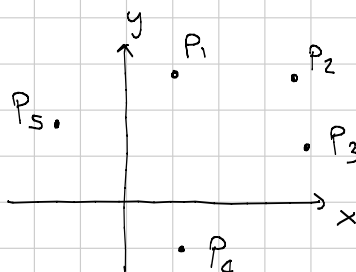
05/12/2007

BARICENTRI

In fisica il BARICENTRO di un sistema di n punti nel piano o nello spazio e un pto G di coordinate

nel pto P_i ci sia una massa m_i

$$G = \left(\frac{\sum m_i x_i}{M}, \frac{\sum m_i y_i}{M} \right)$$



$$P_i = (x_i, y_i) \quad M = \text{massa totale} = \sum m_i$$

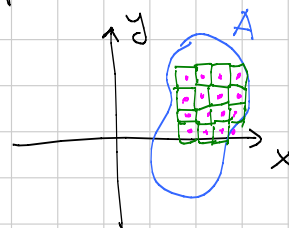
Le coordinate di G sono la media delle coordinate dei vari P_i , pesate con le masse m_i .

Se tutti i punti hanno la stessa massa m , allora

$$G = \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} \right)$$

Nello spazio stessa cosa con 3 coordinate.

Se invece di avere n pti abbiamo una figura piana A si può pensare di suddividere la figura in tanti quadratini e considerarli come fossero masse puntiformi concentrate nel centro del quadrato. Passando al limite si ottiene



$$G = (x_G, y_G), \text{ dove}$$

$$x_G = \frac{1}{\text{Area}(A)} \iint_A x \, dx \, dy$$

$$y_G = \frac{1}{\text{Area}(A)} \iint_A y \, dx \, dy$$

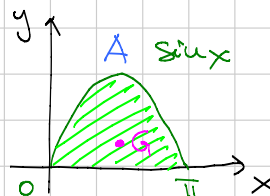
supponendo A costruito di un materiale di densità unif.

Nello spazio il baricentro di un solido $V \subseteq \mathbb{R}^3$ è il p.to

$G = (x_G, y_G, z_G)$, dove

$$x_G = \frac{1}{\text{Vol}(V)} \iiint_V x \, dx \, dy \, dz \quad \text{e idem per } y_G \text{ e } z_G.$$

Esempio 1 $x_G = \frac{\pi}{2}$ per ragioni di
simmetria
(controllare con il calcolo)



Per calcolare y_G serve l'area $\text{Area}(A) = 2$

$$\iint_A y \, dx \, dy = \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} dy \cdot y = \int_0^\pi dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\sin x} =$$

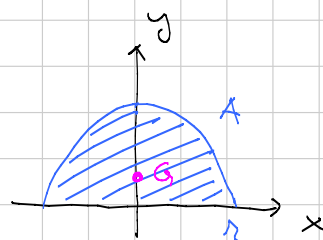
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \pi], 0 \leq y \leq \sin x\}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Quindi } y_G = \frac{1}{\text{Area}} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

Esempio 2 Semicerchio

$x_G = 0$ per simmetria



$$\text{Area}(A) = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$\iint_A y \, dx \, dy = \int_0^r \rho \, d\rho \int_0^\pi \sin \theta \cdot \rho \, d\theta \quad \text{PAG} \downarrow = \int_0^r \rho^2 \, d\rho \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta}_2$$

$$= 2 \int_0^r \rho^2 \, d\rho = 2 \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^{\rho=r} = \frac{2}{3} r^3 \Rightarrow y_G = \frac{2}{3} r^3 \cdot \frac{2}{\pi r^2} = \frac{4}{3\pi} r$$

Esempio 3 Semisfera

Per simmetria $x_G = y_G = 0$

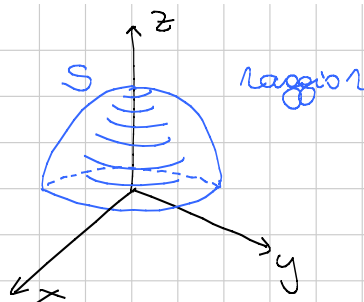
z_G ci aspettiamo che dipenda da r

Volume (S) =

$$= \iiint_S 1 \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \int_0^r dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \, 1 \cdot \overbrace{p^2 \cos \varphi}^J = \int_0^r p^2 dp \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi}_1$$

$$= 2\pi \int_0^r p^2 dp = 2\pi \left[\frac{p^3}{3} \right]_{p=0}^{p=r} = \frac{2\pi}{3} r^3$$



$$S: \rho \in [0, r], \theta \in [0, 2\pi] \\ \varphi \in [0, \pi/2]$$

$$\iiint_S z \, dx \, dy \, dz = \underbrace{\int_0^r dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi}_{\text{Descrizione di S}} \underbrace{p \sin \varphi}_z \underbrace{p^2 \cos \varphi}_J$$

$$= \int_0^r p^3 dp \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi = 2\pi \int_0^r p^3 dp \left[\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2}$$

$$= \pi \int_0^r p^3 dp = \pi \left[\frac{p^4}{4} \right]_{p=0}^{p=r} = \frac{\pi}{4} r^4$$

$$z_G = \frac{1}{\text{Vol}(S)} \cdot \iiint_S z \, dx \, dy \, dz = \frac{3}{2\pi r^3} \cdot \frac{\pi}{4} r^4 = \frac{3}{8} r$$

Semisfera $z_G = \frac{3}{8} r$
+ BASSO

Semicerchio $y_G = \frac{4}{3\pi} r$

Esercizio 3 bis

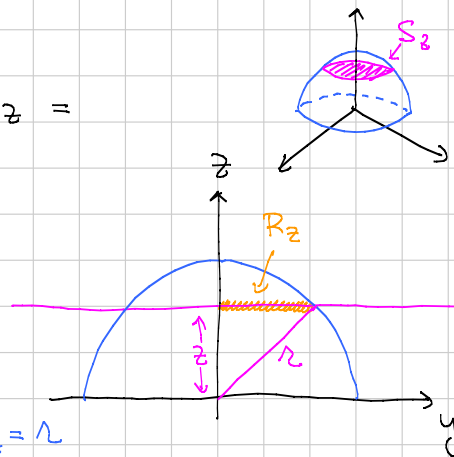
$$\begin{aligned} \iiint_S z \, dx \, dy \, dz &= \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} dz \iint_{S_z} z \, dx \, dy = \int_0^z z \, dz \iint_{S_z} dx \, dy \\ &= \int_0^z z \cdot \text{Area}(S_z) \, dz = \pi \int_0^z z \cdot R_z^2 \, dz = \end{aligned}$$

S_z è un cerchio di raggio R_z

Pitagora $\rightarrow (R_z)^2 + z^2 = r^2$

$$R_z = \sqrt{r^2 - z^2}$$

Controlli: $z=0 \rightarrow R_z=r$
 $z=r \rightarrow R_z=0$



$$\pi \int_0^r z \cdot (r^2 - z^2) \, dz = \pi \int_0^r (r^2 z - z^3) \, dz = \pi \left[r^2 \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_{z=0}^{z=r}$$

$$= \pi \left(\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4} \right) = \frac{\pi}{4} r^4$$

Esempio 3 ter

$$\iiint_S z \, dx \, dy \, dz \quad \text{colonne}$$

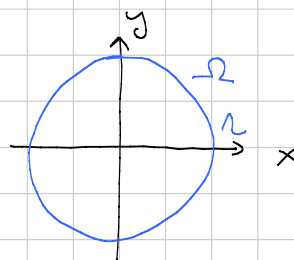
Eq. sfera (parte alta)

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \rightarrow z^2 = r^2 - x^2 - y^2 \rightarrow z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

$$= \iint_{\Omega} dx \, dy \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dz \cdot z = \iint_{\Omega} dx \, dy \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (r^2 - x^2 - y^2) \, dx \, dy =$$



$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^z dp \int_0^{2\pi} d\theta \overset{x^2+y^2}{(z^2-p^2)} p = \frac{1}{2} \int_0^z p (z^2-p^2) dp \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \\ &= \pi \int_0^z p (z^2-p^2) dp = \text{stesso integrale del 3bis} \text{ per} \\ &\quad \text{di cambiare } p \text{ con } z. \end{aligned}$$

MATEMATICA I

ORA 84

Titolo nota

05/12/2007

- Cambi di variabile in generale
- Solidi di rotazione
- Guldino 1

Cambi di variabile in generale

Esempio S = sfera con centro in $(3, 4, -5)$ e raggio 2

$$\iiint_S x^2 dx dy dz$$

S = punti (x, y, z) la cui distanza da $(3, 4, -5)$ è ≤ 2

$$\underbrace{(x-3)}_u^2 + \underbrace{(y-4)}_v^2 + \underbrace{(z+5)}_w^2 \leq 4$$

↑ raggio al quadrato

Nelle variabili u, v, w l'insieme di integrazione diventa
 $u^2 + v^2 + w^2 \leq 4$

$$\iiint_S x^2 dx dy dz = \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 4} \underbrace{(u+3)^2}_{x^2} \underbrace{J(u, v, w)}_1 du dv dw$$

Come si calcola J ? Come in 2 variabili:

① Ricavare: $x = u+3$, $y = v+4$, $z = w-5$

② Matrice: $\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

③ $J(u, v, w) = |\text{Det}| = 1$

Integrale dato:

$$\iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 4} (u^2+6u+9) du dv dw =$$

$$= \iiint u^2 + \underbrace{6 \iiint u}_{0 \text{ per simmetria}} + 9 \iiint 1$$

9 Volume sfera
 $= 9 \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3$
 $\uparrow$ raggio

Resta da calcolare

$$\iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 4} u^2 du dv dw$$

Questo è uguale a $\iiint v^2$ e $\iiint w^2$

$$= \int_0^2 dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi$$

sfera in coord. sferiche

$$\underbrace{p^2 \sin^2 \varphi}_{\downarrow \text{ho scelto la + semplice}} \underbrace{p^2 \cos \varphi}_J = \text{si finisce}$$

Secondo esempio di cambio di coordinate

$$2x^2 + 3y^2 + 5z^2 \leq 7 \quad (\underbrace{\sqrt{2}x}_u)^2 + (\underbrace{\sqrt{3}y}_v)^2 + (\underbrace{\sqrt{5}z}_w)^2 \leq 7$$

① Ricavare: $x = \frac{u}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{v}{\sqrt{3}} \quad z = \frac{w}{\sqrt{5}}$

② Matrice: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

③ $|Det| = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}$
 come in 2 variabili

Esercizio Calcolare il J in coordinate sferiche a partire da

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \cos \theta \\ y &= \rho \cos \varphi \sin \theta \\ z &= \rho \sin \varphi \end{aligned} \quad J(\rho, \theta, \varphi) = \left| \text{Det} \begin{pmatrix} x_\rho & x_\theta & x_\varphi \\ y_\rho & y_\theta & y_\varphi \\ z_\rho & z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix} \right|$$

SOLIDI DI ROTAZIONE

F = figura nel piano y, z

Ruotando F intorno all'asse z ottengo un solido di rotazione ("vaso")

F è un insieme NORMALE rispetto all'asse z

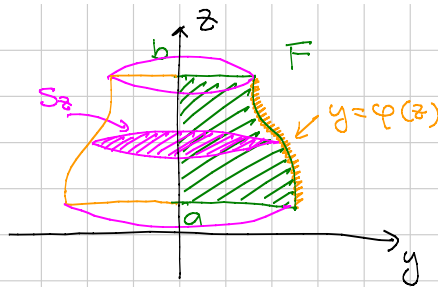
$$F = \{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 : z \in [a, b], \quad 0 \leq y \leq \varphi(z) \}$$

Sia S il solido.

PER SEZIONI

$$\begin{aligned} \text{Volume}(S) &= \iiint_S 1 \, dx \, dy \, dz \stackrel{\downarrow}{=} \int_a^b dz \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy = \\ &= \int_a^b \text{Area}(S_z) \, dz = \pi \int_a^b [\varphi(z)]^2 \, dz \end{aligned}$$

$\uparrow R_z^2$



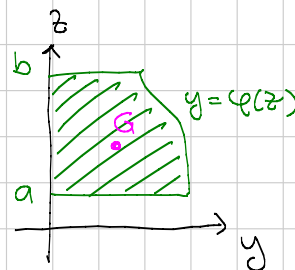
S_z = cerchio di raggio $\varphi(z) = R_z$

1° modo di scrivere il volume

$$\text{Vol}(S) = \pi \int_a^b [\varphi(z)]^2 \, dz$$

Calcolo il baricentro di F , in particolare la coordinata y :

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F y \, dy \, dz \quad \leftarrow F \text{ normale asse } z \\ &= \frac{1}{\text{Area}(F)} \int_a^b dz \int_0^{\varphi(z)} y \, dy = \frac{1}{\text{Area}(F)} \int_a^b dz \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\varphi(z)} \\ &= \frac{1}{\text{Area}(F)} \cdot \frac{1}{2} \int_a^b \varphi^2(z) \, dz \end{aligned}$$



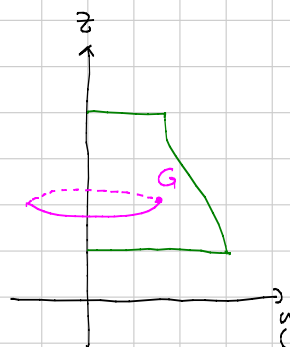
TEOREMA GULDINO 1

$$\text{Volume (S)} = \text{Area (F)} \cdot 2\pi y_G$$

Volume solido
di rotazione

Area figura
che ruota

percorso che fa
G ruotando



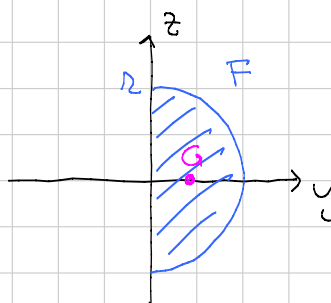
Quando F ruota, il baricentro G descrive una circonferenza lunga $2\pi y_G$

Esempio 1 Volume sfera

$$\text{Area (F)} = \frac{\pi}{2} r^2 \quad y_G = \frac{4}{3\pi} r$$

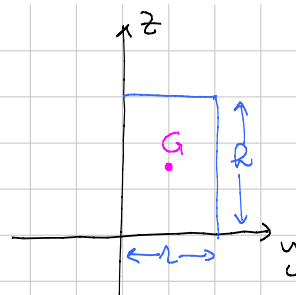
$$\text{Volume} = \text{Area (F)} \cdot 2\pi y_G$$

$$= \frac{\pi}{2} r^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3\pi} r = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Esempio 2 Cilindro

$$\text{Volume} = \text{Area} \cdot 2\pi y_G$$

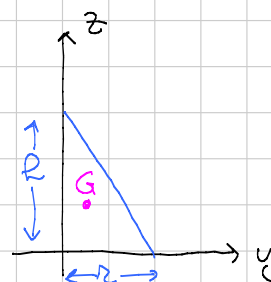
$$= rR \cdot 2\pi \cdot \frac{R}{2} = \pi r^2 R$$

Esempio 3 Cono

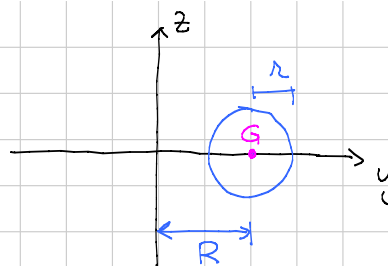
$$\text{Area} = \frac{1}{2} rR$$

$$G = \left(\frac{r}{3}, \frac{R}{3} \right) \quad (\text{Verificare con l'integrale})$$

y_G



$$\text{Volume} = \text{Area} \cdot 2\pi y_G = \frac{1}{2} rR \cdot \frac{R}{3} \cdot 2\pi = \frac{1}{3} \pi r^2 R$$

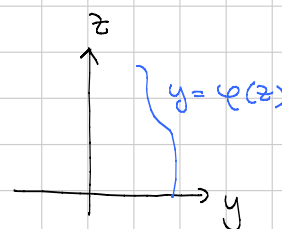
Esempio 4 TORO

$$\text{Volume (Toro)} = \text{Area} \cdot 2\pi y_G = \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R$$

Equazione del solido di rotazione.

La figura che ruota è $y = \varphi(z)$

"Ad altezza z il solido sono tutti i punti che stanno su un cerchio di raggio $\varphi(z)$ "



$$x^2 + y^2 = [\varphi(z)]^2$$

↑
superficie

$$x^2 + y^2 \leq \varphi^2(z)$$

↑
interno

quando x e y compaiono come
 $x^2 + y^2$ è un solido
di rotazione.

MATEMATICA I

ORA 85

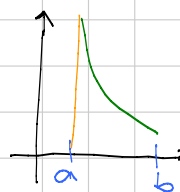
Titolo nota

06/12/2007

Integrali impropri

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$



Analogo al problema è in b.

Esempio $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x e^{-x} dx =$

$$\int_0^A x e^{-x} dx = \underbrace{-x e^{-x}}_{GF} + \int_0^A \underbrace{1}_{GF} \cdot \underbrace{(-e^{-x})}_{GF} dx = -x e^{-x} - e^{-x}$$



$$\lim_{A \rightarrow +\infty} [-x e^{-x} - e^{-x}]_{x=0}^{x=A} = \lim_{A \rightarrow +\infty} (-\underbrace{A e^{-A}}_0 - \underbrace{e^{-A}}_0 + 1) = 1$$

CRITERI Integranda $f(x)$ a segno qualunque $\rightarrow$ Assoluta integrab.

$$\int_E |f(x)| dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_E f(x) dx \text{ converge}$$

$f(x)$ segno costante $\rightarrow$ criterio confronto
 $\rightarrow$ criterio confronto asint $\rightarrow$ casi standard
 $\rightarrow$ casi limite

Esempio $\int_{1/2}^2 \frac{dy}{\log y} = \underbrace{\int_{1/2}^1 \frac{dy}{\log y}}_{\text{Diverge a } -\infty} + \underbrace{\int_1^2 \frac{dy}{\log y}}_{\text{Diverge a } +\infty} = \text{INDETERMINATO}$

Esempio $\int_{10}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$ Unico problema a $+\infty$

$\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ha segno costante > 0 quando $x \rightarrow +\infty$

Brutale $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \rightarrow +\infty$

$\int \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$ con pb. a $+\infty$ si comporta come

$\int \frac{1}{x^2} dx$ con pb. a $+\infty \Rightarrow$ converge

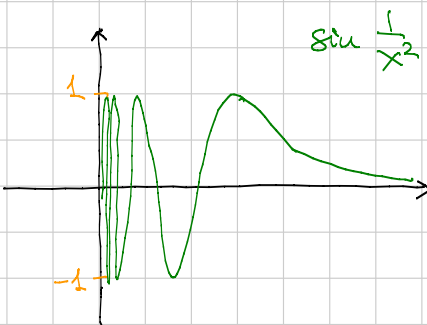
Rigrosso: confronto asint. tra $f(x) = \sin \frac{1}{x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{x^2}$

$\lim_{x \rightarrow \boxed{+\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{y = \frac{1}{x^2}}{\downarrow} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1 \neq 0 \neq +\infty$

↑
PROBLEMA

$\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$ Quanti problemi? UNO!!!! $\rightarrow +\infty$

$\int_0^{10} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$ è un integrale PROPRIO perché la funzione è LIMITATA



Il comportamento è lo stesso di sopra $\Rightarrow$ converge.

$$\int_0^{+\infty} \sin(e^{-x}) dx$$

Unico problema: $+\infty$

$f(x) > 0$ quando $x \rightarrow +\infty$

e^{-x} assume (per $x \geq 0$) tutti i valori in $(0, 1]$, quindi

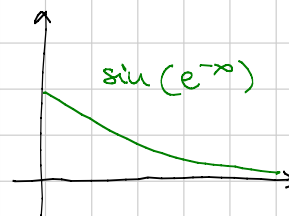
$\sin(e^{-x})$ è sempre > 0 per ogni $x \geq 0$

Brutale: $\sin(e^{-x}) \sim e^{-x}$ per $x \rightarrow +\infty$

Quindi $\int \sin(e^{-x}) dx$ con pb. a $+\infty$ si

comporta come $\int e^{-x} dx$ con pb. a $+\infty$, quindi converge
(si fa con la definizione)

— o —



$$\int_0^{+\infty} x^{100} e^{-x} dx$$

CONVERGE

RIGOROSO: C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^2}$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{100} e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{102} e^{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{102}}{e^x} = 0 \quad \text{CASO LIMITE}$$

Poiché $\lim = 0$, allora $\frac{f(x)}{g(x)} < 1$ per x grandi,

quindi $f(x) < g(x)$ per x grandi ($g(x) > 0$)

quindi $\int f(x) dx < \int g(x) dx$
 $\uparrow$ CONVERGE

In generale $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx$ converge $\forall \alpha > 0$.

TRUCCO INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

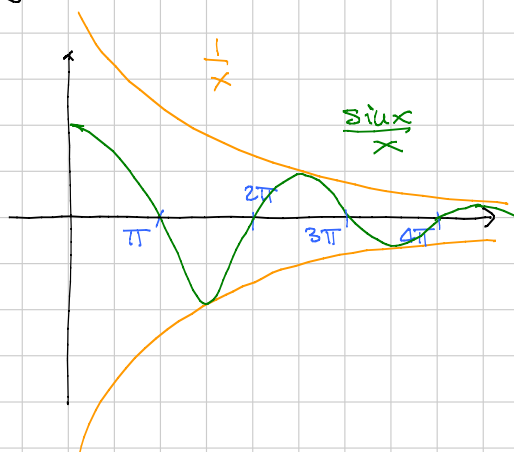
Unico problema a $+\infty$.
Integrandu ha signu variabile

Unica speranza finora è
assol. integ.

$$\int \frac{|\sin x|}{x} dx$$

$$\frac{|\sin x|}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty \Rightarrow \text{BOH !!}$$



$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \underbrace{\frac{1}{x}}_G \cdot \underbrace{\sin x}_F dx \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{\left[\frac{-\cos x}{x} \right]_{x=1}^{x=A}}_{GF} - \int_1^A \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2} \right)}_G \underbrace{(-\cos x)}_F dx \right\} \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{\cos A}{A} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx \right\} \\ &= \frac{\cos 1}{1} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx}_{\text{CONVERGE}} \\ &= \text{CONVERGE} \end{aligned}$$

$$\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx \text{ con pb. a } +\infty \text{ converge}$$

⇓ CONFRONTO TRA INTEGRANDE POSITIVE

$$\int \frac{|\cos x|}{x^2} dx \text{ con pb. a } +\infty \text{ converge}$$

⇓ ASSOLUTA INTEGRABILITÀ

$$\int \frac{\cos x}{x^2} dx \text{ con pb. a } +\infty \text{ converge}$$

Oss. Anche $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge (in $x=0$ il problema non c'è !!!)

MATEMATICA I

ORA 86

Titolo nota

06/12/2007

CONFRONTI SERIE - INTEGRALI

PARTE 1: GLI INTEGRALI AIUTANO LE SERIE

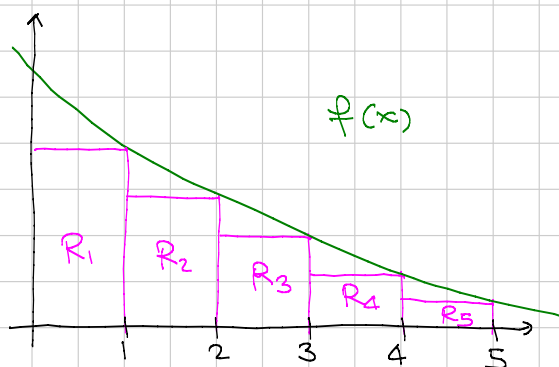
 $f(x)$ positiva e decrescente

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \text{area sotto grafico di } f(x)$$

 $\geq$ somma aree dei rettangoli

$$\begin{aligned} \text{Area } (R_k) &= \text{base} \cdot \text{altezza} \\ &= 1 \cdot f(k) \end{aligned}$$

$$\text{Somma aree rettangoli} = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$



Conclusione

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

Più in generale, dato un intero $M \geq 0$,

$$\int_M^{+\infty} f(x) dx \geq \sum_{k=M+1}^{\infty} f(k)$$

Applicazione Prendo $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $M=1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \geq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

CONVERGE PERCHÉ
LO ABBIAMO
STUDIATO CON LA DEF.

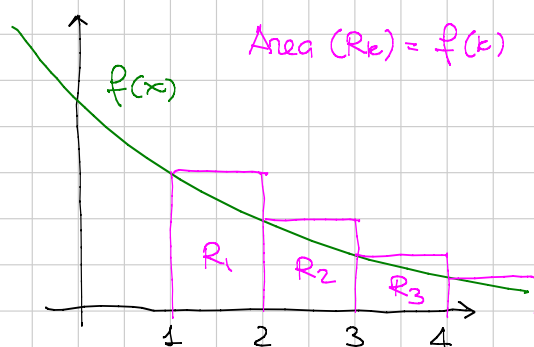
DUNQUE LA
SERIE CONVERGE

(stessa cosa vale
con $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$
per $\alpha > 1$)

$f(x)$ positiva e decrescente

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \leq \text{somma aree rettangoli} \\ = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$



Analogamente: $\int_M^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=M}^{\infty} f(k)$

Applicazione $M=1$, $f(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

DIVERGE
(studiato con
definizione)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

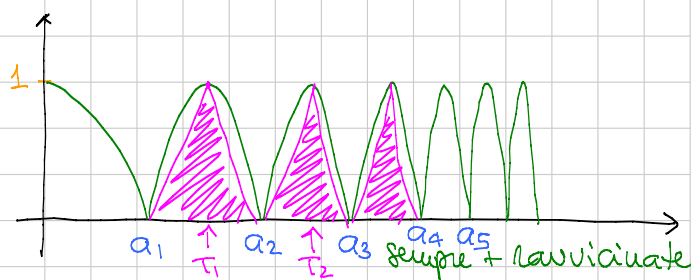
DIVERGE

Stesso discorso con
 $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ per $\alpha \leq 1$

N.B. Il fatto che f sia decrescente serve per confrontare il sottografico di $f(x)$ con i rettangoli

2ª PARTE Le serie aiutano gli integrali. METODO DEI TRIANGOLINI

$$\int_0^{+\infty} |\cos x^2| dx$$



$$\int_0^{+\infty} |\cos x^2| dx \geq \text{Somma aree dei triangoli}$$

$$\text{Area triangolo } T_k = \frac{1}{2} \text{ base} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{\text{altezza}} = \frac{1}{2} (a_{k+1} - a_k)$$

Occorre trovare a_k . Risolvo $\cos x^2 = 0 \quad x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$a_k = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$$

$$\text{Somma aree triangoli} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k) =$$

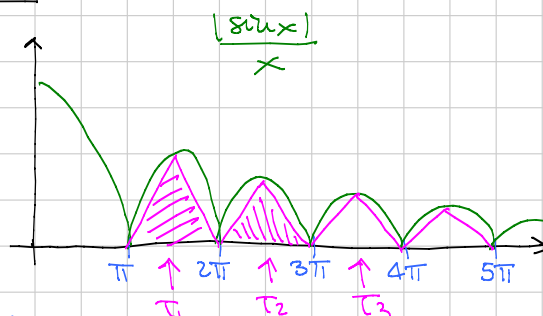
$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi} - \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} \right) \quad \text{Come si comporta questa serie?}$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi} - \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} = \frac{\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi - \frac{\pi}{2} - k\pi}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi} + \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi} + \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}} \sim \frac{\pi}{\sqrt{k}}$$

$\Rightarrow$ la serie diverge $\Rightarrow$ l'integrale diverge.

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$



$$\text{Area } (T_k) = \frac{1}{2} \text{ base} \cdot \text{altezza}$$

$$= \frac{1}{2} \pi \quad \text{valore della funzione nel p.to medio della base}$$

Base di T_k : $[k\pi, (k+1)\pi]$ P.to medio: $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$$\text{Altezza} = f\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\left|\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right|}{k\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Area}(T_k) = \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{2k+1}{2}} = \frac{1}{2k+1}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \text{Area}(T_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$$

La serie diverge $\Rightarrow$ l'integrale diverge

Nota bene $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ diverge, MA

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ converge}$$

Esempio

$$\int_3^{+\infty} \cos x^2 dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_3^A \underbrace{\frac{1}{2x}}_G \underbrace{2x \cos x^2}_{F} dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{\left[\frac{1}{2x} \sin x^2 \right]}_{GF} \bigg|_{x=3}^{x=A} - \int_3^A \underbrace{\left(-\frac{1}{2x^2} \right)}_g \underbrace{\sin x^2}_F dx \right\}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \boxed{\frac{\sin A^2}{2A}} - \frac{\sin 9}{6} + \frac{1}{2} \int_3^A \frac{\sin x^2}{x^2} dx \right\}$$

↓
0

$$= -\frac{\sin 9}{6} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_3^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^2} dx}_{\text{converge per i soliti motivi}} = \text{converge}$$

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx \text{ converge, MA } \int_0^{+\infty} |\cos x^2| dx \text{ diverge}$$

Oss. 1 Non c'è l'equivalente della condiz. nec. per gli integrali impropri

$\cos x^2$ non tende a zero per $x \rightarrow +\infty$, ma l'integrale converge.

Oss. 2 Andrebbe dimostrato che i triangoli stanno sotto

Nell'esempio $\frac{|\sin x|}{x}$, il max non è MA nel centro

(Basta vedere che nel centro la derivata non è $= 0$)

$\sin(\text{centro} + \delta) = \sin(\text{centro} - \delta)$
e il denom. è + grande a dx



MATEMATICA I

ORA 87

Titolo nota

07/12/2007

CURVE, LUNGHEZZA, INTEGRALI CURVILINEI

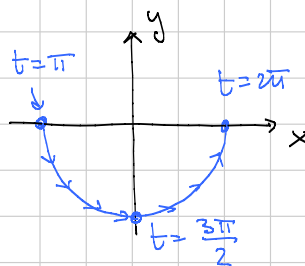
Def. Una CURVA è una funzione $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ *curva piana*
 $\rightarrow \mathbb{R}^3$ *curva nello spazio*

Brutalmente: una curva è la parametrizzazione di un cammino

Esempio 1 $[a, b] = [0, 1]$ $\gamma(t) = (t, t)$
elemento di $\mathbb{R}^2$

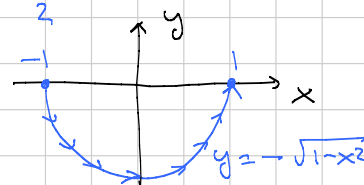


Esempio 2 $[a, b] = [\pi, 2\pi]$ $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$



Esempio 3 $[a, b] = [-1, 1]$

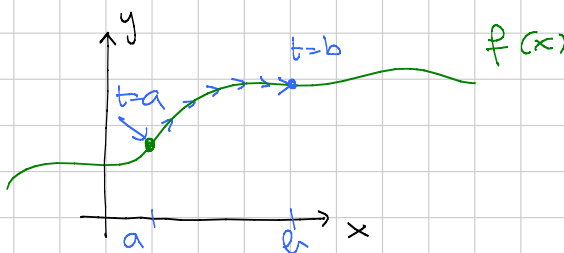
$$\gamma(t) = (t, \underbrace{-\sqrt{1-t^2}}_{f(t)})$$



Più in generale se ho una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, posso considerare la curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = (t, f(t))$$

Percorre il tratto di grafico corrispondente all'intervallo $[a, b]$

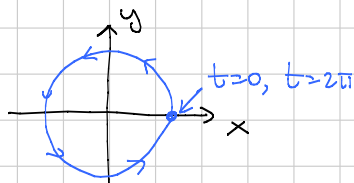


Oss. Una curva non è il disegno che percorre, ma il modo di percorrerlo.

Negli esempi 2 e 3 il disegno è lo stesso (SOSTEGNO della curva), ma viene percorso in 2 modi diversi.

— o — o —

Esempio 4 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$



Esempio 5 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 4\pi]$

Stessa circonferenza, ma gira 2 volte

LONGHEZZA DI UNA CURVA

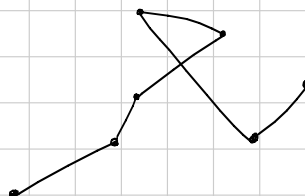
= quello che segna il contakilometri

Come si definisce. Caso banale: segmento tra 2 p.ti

lunghezza = distanza tra i 2 p.ti

Caso semibanale: spezzata

lunghezza = somma lunghezze dei segmenti



Caso generale: $\gamma(t)$ qualsiasi

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

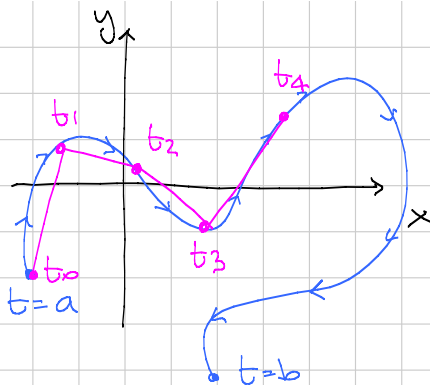
$$t \in [a, b]$$

$x(t)$ e $y(t)$ sono le 2 componenti della curva



Scego un po' di tempi
 $a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3$
 e "fotografo" la posizione
 a questi istanti.

Approssimo quella che
 vorrei essere la lunghezza della curva con la spezzata che
 passa per i p.ti campionati



Per definizione

LUNGHEZZA CURVA = sup delle lunghezze delle
 spezzate così ottenute.

Teorema Se 2 curve percorrono lo stesso disegno percorrendo
 ogni tratto una ed una sola volta, allora hanno
 la stessa lunghezza.

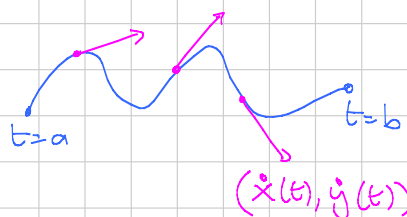
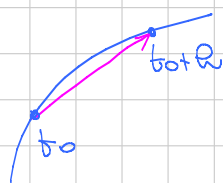
Come si calcola? Se abbiamo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, con
 $t \in [a, b]$ e le funzioni $x(t)$ e $y(t)$
 decenti (ad es. deriv. con deriv. continua),
 allora

$$\text{Lunghezza}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} dt \quad \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

Esempio 1 $\gamma(t) = (\underbrace{\cos t}_{x(t)}, \underbrace{\sin t}_{y(t)})$ $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\sin t \\ \dot{y}(t) &= \cos t \end{aligned} \quad \text{Lunghezza}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

Che cos'è $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$? È un vettore che rappresenta la velocità



Facendo tendere Δt a zero il vettore "secante" tende al vettore velocità

Ammessi che $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ sia il vettore velocità,

$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ rappresenta la sua norma.

VELOCITY: vettore $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$

SPEED: numero (norma della velocity)

Formula scritta: lunghezza = integrale della SPEED rispetto al tempo.

Nell'esempio prec. $(\cos t, \sin t)$ percorre la circ. con velocità costante,

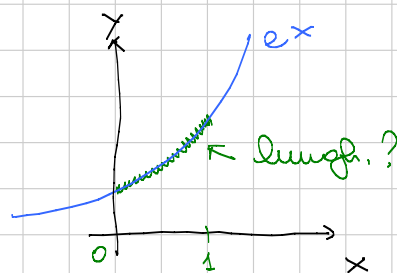
Esempio 2

Scrivo la parametrizz.

$$\gamma(t) = (t, e^t) \quad t \in [0, 1]$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ x(t) & y(t) \end{matrix}$$

$$\dot{x}(t) = 1 \quad \dot{y}(t) = e^t$$



$$\text{lunghezza}(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2t}} dt =$$

Pongo $y = e^{2t}$

$$dy = 2e^{2t} dt$$

Quando $t=0$, $y=1$
Quando $t=1$, $y=e^2$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+e^{2t}} \cdot \frac{2e^{2t}}{2e^{2t}} dt = \int_1^{e^2} \sqrt{1+y} \frac{dy}{2y} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{e^2} \frac{\sqrt{1+y}}{y} dy$$

Pongo $\sqrt{1+y} = z$
 $1+y = z^2$ $y = z^2 - 1$

$$dy = 2z dz$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} \frac{z}{z^2-1} \cdot 2z dz$$

Quando $y=1$, $z=\sqrt{2}$
" $y=e^2$, $z=\sqrt{e^2+1}$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} \frac{z^2-1+1}{z^2-1} dz = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} \left(1 + \frac{1}{z^2-1}\right) dz$$

= viene ...

MATEMATICA I

ORA 88

Titolo nota

07/12/2007

Osservazione sulla lunghezza di una curvaSe la curva è un tratto di grafico $\gamma(t) = (t, f(t)) \quad t \in [a, b]$ $\dot{x}(t) = 1, \quad \dot{y}(t) = \dot{f}(t)$, quindi

$$\text{Lunghezza} = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{f}^2} \, dt$$

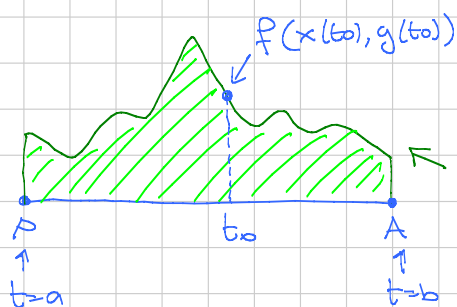
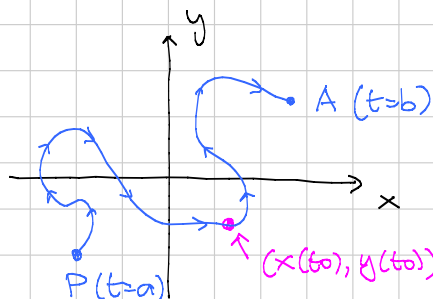
INTEGRALI CURVILINEI

Notazioni

Ingredienti: $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [a, b]$ CURVA $f(x, y)$ = funzione di 2 variabili definita almeno dove passa la curva

$$\int_{\gamma} f(x, y) \, ds$$

↑
integrale
sulla curva

Significato geometrico Curva = percorso della tappa $f(x, y)$ = altezza sul livello
del mare del p.to
 (x, y) ← altezza a cui si viene a trovare
chi percorre la curva γ 

$\int_{\gamma} f(x,y) ds = \text{area sotto il grafico. (con segno)}$

↓ Supponendo la CURVA PERCORSA
a SPEED costante

Formula per il calcolo

$$\int_{\gamma} f(x,y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} dt$$

N.B. Se la funzione è costante, viene un multiplo della lunghezza della curva

BARICENTRO DI UNA CURVA

Data una curva γ , il suo baricentro è il p.to $G = (x_G, y_G)$ dove

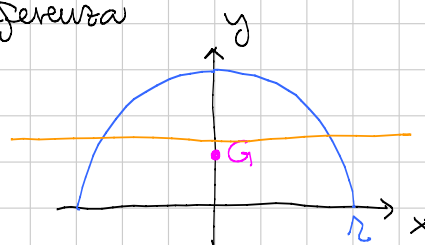
$$x_G = \frac{1}{\text{length}(\gamma)} \int_{\gamma} x ds, \quad y_G = \frac{1}{\text{length}(\gamma)} \int_{\gamma} y ds$$

Esempio Baricentro di una semicirconferenza

$$\text{length} = \pi r \quad x_G = 0$$

$$\int_{\gamma} y ds = \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$= \int_0^{\pi} r \sin t \sqrt{\underbrace{r^2 \sin^2 t}_{\dot{x}^2} + \underbrace{r^2 \cos^2 t}_{\dot{y}^2}} dt$$



Parametrizzazione

$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $x(t)$ $y(t)$

$$= \int_0^{\pi} r^2 \sin t \, dt = 2r^2$$

$$y_G = \frac{1}{\text{lunghezza}} \int_0^{\pi} y \, ds = \frac{1}{\pi r} \cdot 2r^2 = \boxed{\frac{2}{\pi} r}$$

SOPRA LA
METÀ

$$\frac{2}{3} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

AREA DI UNA SUPERFICIE?

Come si definisce? Non ve lo dico!!!

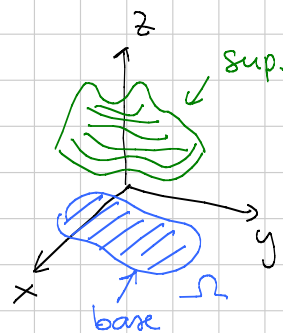
Come si calcola? Primo caso: la superficie è il grafico di una funzione di 2 variabili

$$z = f(x, y)$$

In questo caso

$$\text{Area}(\text{sup}) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy$$

$\nwarrow$ base



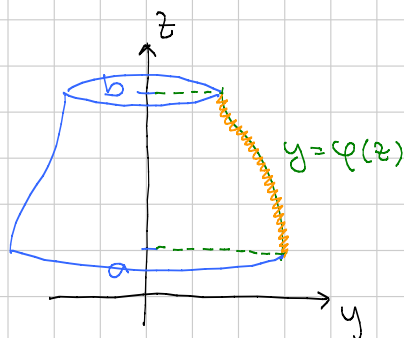
Secondo caso: superfici di ROTAZIONE

Guldinus 1°:

$$\text{Volume}(S) = \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G$$

Figura
che ruota

coord y
baricentro
di F



GULDINO 2

$$\text{Sup. laterale (S)} = \text{lunghezza (curva)} \cdot 2\pi y_G$$

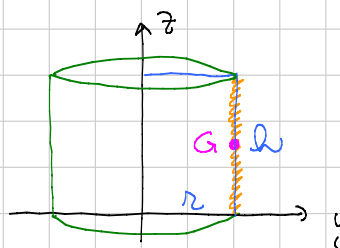
↑
coord y del baricentro
della CURVA che ruotando
descrive la superficie.

Esempio 1 Cilindro

$$\text{Sup. lat. cilindro} =$$

$$\text{lunghezza} \cdot 2\pi y_G =$$

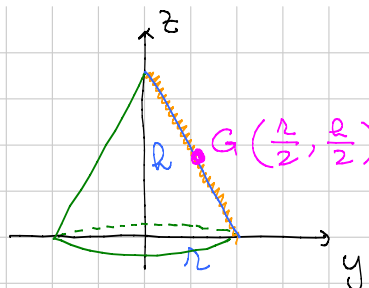
$$= R \cdot 2\pi R = \boxed{2\pi R^2}$$

Esempio 2 Cono

$$\text{Sup. laterale cono} =$$

$$\text{lunghezza} \cdot 2\pi y_G = \underbrace{\sqrt{R^2 + h^2}}_{\text{apotema}} \cdot 2\pi \cdot \underbrace{\frac{h}{2}}_{y_G}$$

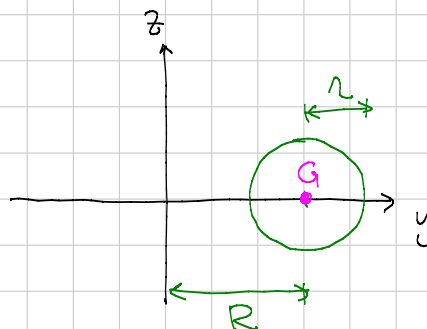
$$= \pi R \sqrt{R^2 + h^2}$$

Esempio 3 Toro

$$\text{Area Sup (Toro)} = \text{lunghezza} \cdot 2\pi y_G$$

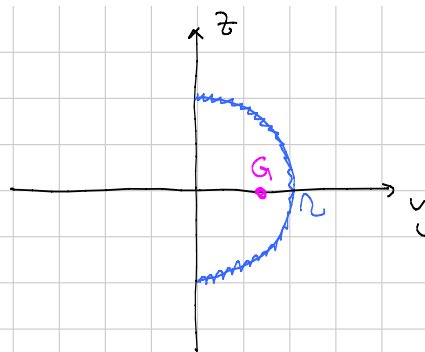
$$= 2\pi R \cdot 2\pi R$$

$$= 4\pi^2 R^2$$



Esempio 4 Sfera

$$\begin{aligned}
 \text{Sup}(Sfera) &= \text{lunghezza} \cdot 2\pi y_G \\
 &= \cancel{\pi} r \cdot 2\pi \frac{2}{\cancel{\pi}} r \\
 &= \boxed{4\pi r^2}
 \end{aligned}$$

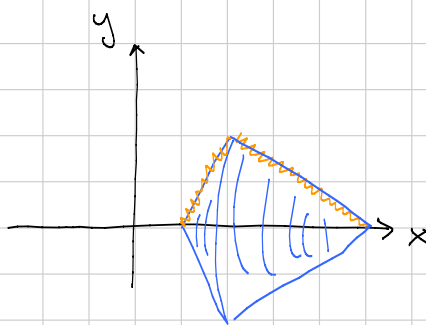


Dal calcolo precedente:

$$y_G = \frac{2}{\pi} r$$

Esempio 5

Area Sup = somma aree
delle 2 sup.



MATEMATICA I

Titolo nota

ORA 89

11/12/2007

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Un'eq. diff. è un'equazione in cui l'incognita è una funzione

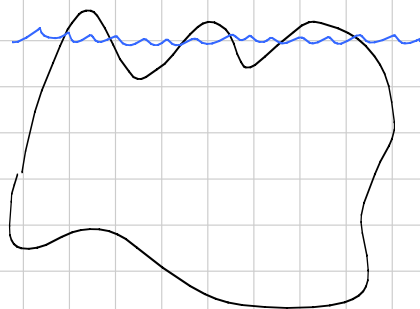
$y(x)$, $y(t)$, $u(t)$

Questa funzione deve soddisfare una relazione che lega u ad un po' di sue derivate.

Esempi $u'(t) = u(t) \rightarrow$ cerco una funzione u che sia uguale alla sua derivata

$$u''(t) + [u'(t)]^2 = \arctan[u(t)]$$

Per quali t deve valere la relazione? BELLA DOMANDA!!!



$$u''(t) = t^2 u(t)$$

Notazione rapida Non si mettono la t che sono l'argomento della u

$$u' = u$$

$$u'' + [u']^2 = \arctan u$$

$$u'' = t^2 u$$

AUTONOME: la t compare solo come variabile da cui dipende la u

NON AUTONOMA: la t compare anche fuori dalla u .

In generale un'eq. diff. si presenta nella forma

$$\Phi(t, u, u', \dots, u^{(n)}) = 0$$

Si dice ORDINE di un'eq. diff. il MASSIMO ordine di derivazione che compare nell'eq. stessa

$$u' = u \quad \rightarrow 1^{\circ} \text{ ordine} \quad \text{Forma normale}$$

$$u'' + [u']^2 = \arctan u \quad \rightarrow 2^{\circ} \text{ ordine} \quad \text{Si porta facilmente in forma normale}$$

$$u'' = t^2 u \quad \rightarrow 2^{\circ} \text{ ordine} \quad \text{Forma normale}$$

Un'eq. diff. si dice IN FORMA NORMALE se "la derivata di ordine max è ricavata rispetto al resto"

$$u^{(n)} = F(t, u, u', \dots, u^{(n-1)})$$

Esempi $(u')^2 = \sin u$

AUTONOME
1° ORDINE

Non si può portare in FORMA NORMALE

$$(u')^3 = \sin u$$

$$u' = \sqrt[3]{\sin u} \quad \text{FORMA NORMALE}$$

EQUAZIONI DEL PRIMO ORDINE A VARIABILI SEPARABILI

1° ISOA

$$u' = f(u) g(t)$$

Eq. diff. 1° ordine in forma normale in cui il secondo membro è prodotto di una funzione della sola t per una funzione della sola u .

Esempi $u' = \underbrace{t}_{g(t)} \cdot \underbrace{\cos u}_{f(u)}$

$$u' + t = u \cdot t$$

$$u' = u \cdot t - t = \underbrace{t}_{g(t)} \cdot \underbrace{(u-1)}_{f(u)}$$

$$u' = u^2 \quad \rightarrow \quad u' = \underbrace{u^2}_{f(u)} \cdot \underbrace{1}_{g(t)}$$

Osservazione IMPORTANTE

Tutte le eq. diff. del 1° ORDINE
AUTONOME in forma normale
sono del tipo

$$u' = f(u)$$

dunque sono a variabili separabili (con $g(t) \equiv 1$)

EQUAZIONI LINEARI

Un'eq. differenziale si dice LINEARE se è della forma
"combinazione lineare di u e delle sue derivate";

$$a_n(t) u^{(n)} + a_{n-1}(t) u^{(n-1)} + \dots + a_1(t) u' + a_0(t) u = f(t)$$

$a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_1(t), a_0(t)$ si dicono COEFFICIENTI

$f(t)$ si dice TERMINE NOTO (secondo membro)

Esempi

$$u'' + t u' + u = \cos t \quad \leftarrow \text{termine noto}$$

2° ordine lineare. I coeff. sono $a_2(t) = 1, a_1(t) = t, a_0(t) = 1$

$$u'' + \log(1 + \cos^2 3t) u' + \frac{\sin t}{e} \cdot u = \sin t$$

Lineare

$$u'' + u^2 = 0 \quad \text{Non è lineare perché c'è } u^2.$$

$$u' + \cos t \cdot u = 0 \quad \text{Lineare}$$

$$u' + \cos u \cdot t = 0 \quad \text{NON lineare}$$

$$u' + \cos(tu) = 0 \quad \text{NON LINEARE}$$

Un'eq. lineare si dice

→ OMOGENEA $\text{se } f(t) = 0$

→ NON OMOGENEA $\text{se } f(t) \neq 0$

→ A COEFFICIENTI COSTANTI $\text{se } a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t), a_n(t)$
sono dei NUMERI

Esempi $u'' + 3u' + tu - t^2 = 0$ 2° ordine, lineare, a
coeff. NON costanti,
NON omogenea (il termine
moto è t^2)

D1: un'eq. diff. lineare a coeff. costanti è AUTONOMA?
NO! Potrebbe esserci $f(t)$ $u'' + 3u' + 5u = t^3$

D2: un'eq. diff. lineare autonoma è a coeff. costanti? SI

D3: un'eq. diff. lineare autonoma è OMOGENEA?

NO!!! $u'' + 3u' + 5u = 27$ $\leftarrow$ termine noto

2° ISOLA Eq. diff. del n° ordine lineari con coeff. di $u' = 1$

$$u' + a(t)u = b(t)$$

Oss. a patto di poter dividere
per il coeff. di u' si arriva
sempre in questa forma

3° ISOLA Eq. diff. di ordine qualunque lineari a coeff. costanti

$$a_n u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = f(t)$$

Gli a_i sono NUMERI, $f(t)$ c'è se l'eq. è NON OMOGENEA

Primi esempi di soluzione

$u' = u \quad \leadsto \quad u(t) = e^t$ è UNA SOLUZIONE
(controllo $u'(t) = e^t = u(t)$ vera $\forall t \in \mathbb{R}$)

$u(t) = e^t + 7$ NON è una soluzione:

$$u'(t) = e^t \neq u(t)$$

$\leadsto u(t) = 7e^t$ è UNA soluzione: $u'(t) = 7e^t = u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

In generale $u(t) = ce^t$ è una soluzione

$\leadsto$ l'eq. ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro

$u' = -u^2 \quad u(t) = \frac{1}{t} \quad \text{è UNA SOLUZIONE}$

$$u'(t) = -\frac{1}{t^2} = -[u(t)]^2 \quad \boxed{\forall t \neq 0}$$

In generale $u(t) = \frac{1}{t+c}$ è UNA soluzione

$$u'(t) = -\frac{1}{(t+c)^2} = -[u(t)]^2 \quad \forall t \neq -c$$

Ancora una volta infinite solus. dipendenti da un parametro
[N.B. anche $u(t) \equiv 0$ è una solus.]

$u'' = -u \quad u(t) = \sin t \quad \text{è UNA SOLUZIONE}$
 $u''(t) = -\sin t = -u(t)$

$u(t) = e^{-t}$ non è una sol. perché $u'(t) = -e^{-t}$ e
 $u''(t) = e^{-t} = u(t)$ e
non $-u(t)$

$u(t) = \cos t$ è un'altra soluzione

In generale anche $u(t) = c \sin t$ e $u(t) = c \cdot \cos t$ sono solus.,
ma ancora meglio

$$u(t) = a \sin t + b \cos t$$

è una soluzione qualunque siano i valori dei parametri a e b

(infatti $u''(t) = -a \sin t - b \cos t = -u(t)$)

FATTO GENERALE

Un'eq. diff. di ordine n ha infinite soluzioni dipendenti da n parametri

PROBLEMA DI CAUCHY

→ Equazione differenziale + Condizioni iniziali

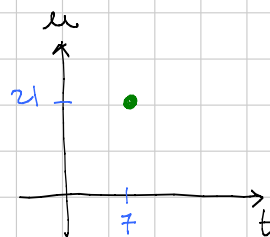
Le condizioni iniziali sono tante quante è l'ordine dell'eq.

Se l'eq. è di ordine n , le condizioni iniziali prescrivono il valore di u e di tutte le sue derivate fino alla $(n-1)$ -esima per uno stesso valore t_0 di t .

Esempi vari

$$\begin{cases} u' = u \cdot \sin t \\ u(7) = 2 \end{cases} \quad \leftarrow \text{CONDIZIONE INIZIALE}$$

$\uparrow$ t_0 $\uparrow$ VALORE prescritto



$$\begin{cases} u' = u \\ u(7) = 21 \end{cases}$$

Dall'analisi precedente le soluzioni dell'eq. sono del tipo

$$u(t) = ce^t$$

Cerco c in modo che $u(7) = 21$

$$u(7) = ce^7 = 21 \Rightarrow c = \frac{21}{e^7}$$

→ La soluzione del pb. di Cauchy è $u(t) = \frac{21}{e^7} e^t$

$u'' = u \cdot \sin t$ Quali condizioni iniziali posso mettere?

$$u(7) = 21$$

$$u'(7) = 27$$

OK $t=7$

$$u(7) = 21$$

$$u'(7) = 21$$

NON VA BENE

$$u(7) = 21$$

$$u''(7) = 21$$

Non va bene. la condiz. deve essere su u e u'

$$u(7) = 21$$

$$u(3) = 12$$

TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ

Sia dato un pb. di Cauchy per un'eq. diff. in FORMA NORMALE

$$u^{(n)} = F(t, u, u', \dots, u^{(n-1)})$$

Allora

ESISTENZA

Se F è continua esiste almeno una SOLUZIONE

UNICITÀ

Se F è decente (diciamo con deriv. part. continue), allora la soluzione è UNICA.

Brutalmente: l'eq. diff. da sola ha infinite soluz. dipendenti da n parametri.

Imponendo le n condiz. iniziali si ottengono n equazioni che permettono di determinare i parametri.

Esempio "brutto"

$$\begin{cases} u' = 3 u^{2/3} \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad = 3 \sqrt[3]{u^2}$$

Una soluzione è $u(t) \equiv 0$

" " è $u(t) = t^3$

Due soluzioni con stessa
condiz. iniziale
 $\Rightarrow$ NON UNICITÀ

$$u'(t) = 3t^2 = 3(t^3)^{2/3} = 3u^{2/3}$$

$[u^{2/3}$ non è derivabile in $u=0]$

In realtà il problema di Cauchy in questo caso ha infinite soluzioni.

MATEMATICA I

ORA 90

(-10 !!)

Titolo nota

12/12/2007

EQUAZIONI DIFF. A VARIABILI SEPARABILI

$$u' = f(u) g(t)$$

① Separare

② Integrare

③ Ricavare

④ Determinare c

⑤ Controllare

⑥ Studiare la soluzione

Determinare solus.
generale dell'eq. diff.
dipendente da un
parametro c

Se abbiamo un problema di Cauchy
(cioè una condizione iniziale)

$$u(t_0) = u_0$$

t_0, u_0 dati

Esempio 1 $\begin{cases} u' = u^2 \cdot e^t & \leftarrow \text{eq. diff. variabili sep.} \\ u(0) = 1 & \leftarrow \text{cond. iniz.} \end{cases}$

① Separare $u' = u^2 \cdot e^t \quad \frac{du}{u^2} = u^2 \cdot e^t$

Tutte le u a sx, tutte le t a dx !!

$$\frac{du}{u^2} = e^t dt$$

② Integrare (a sx rispetto a u, a dx rispetto a t)

$$\int \frac{du}{u^2} = \int e^t dt$$

$$-\frac{1}{u} = e^t + c$$

parametro libero
che ci si aspetta

che sia +c o -c
non cambia

③ Ricavare (u in funzione di t)

$$\frac{1}{u} = -e^t + c$$

$$u = \frac{1}{c - e^t}$$

⇒ la solus. generale dell' eq. differenziale è

$$u(t) = \frac{1}{c - e^t}$$

Ora entra in gioco la condizione iniziale $u(0) = 1$

④ Determinare c (sfruttando la condiz. iniziale)

$$u(0) = 1$$

$$u(0) = \frac{1}{c - e^0} = \frac{1}{c - 1} = 1$$

↑
sostituisco
nella solus.
generale

$$\rightarrow c - 1 = 1 \rightarrow \boxed{c = 2}$$

⇒ La soluzione del problema di Cauchy è

$$u(t) = \frac{1}{2 - e^t}$$

⑤ Controllare (Caldaamente consigliata!!)

[5.1] Controllo la condiz. iniziale: $u(0) = \frac{1}{2 - e^0} = \frac{1}{2 - 1} = 1$ Ok!

[5.2] Controllo eq. diff.

$$u'(t) = -\frac{-e^t}{(2 - e^t)^2} = \frac{e^t}{(2 - e^t)^2} = e^t \cdot [u(t)]^2 \quad \text{Ok!}$$

⑥ Studiare la soluzione ottenuta

→ INTERVALLO MASSIMALE DI ESISTENZA

→ TEMPO DI VITA

→ DESTINO DELLA SOLUZIONE

→ ESISTENZA GLOBALE
→ BLOW-UP
→ BREAK-DOWN

NEL PASSATO E
NEL FUTURO

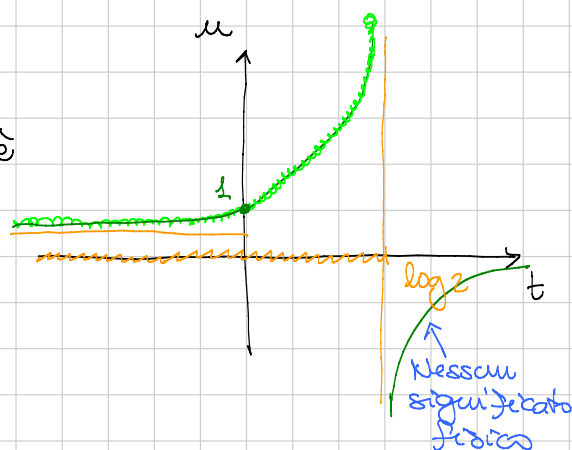
INTERVALLO MAX DI ESISTENZA: pezzo dell'insieme di definizione della soluzione che contiene il tempo iniziale

Nell'esempio: $u(t) = \frac{1}{2-e^t}$. $u(t)$ è definita quando $2-e^t \neq 0$, cioè $e^t \neq 2$, cioè $t \neq \log 2$

Tempo iniziale: $t=0$

$\Rightarrow$ interv. massimale di esistenza è

$(-\infty, \log 2)$



TEMPO DI VITA (LIFE SPAN)

È il sup dell'int. max. di esistenza. Nell'esempio $T = \log 2$

Si ha esistenza globale (nel futuro) se $T = +\infty$

Se $T < +\infty$ (come nell'esempio) si dice che la soluzione "muore al tempo T ". In questo caso si ha BLOW-UP (esplosione) se

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = \pm \infty$$

Nell'esempio si ha che $\lim_{t \rightarrow \log 2^-} \frac{1}{2-e^t} = +\infty \Rightarrow \text{blow-up}$

Si ha BREAK-DOWN (rottura) se non c'è blow-up ma

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u'(t) = \pm \infty \quad (\text{esplosione della derivata})$$

Esempio 2 $\begin{cases} u' = -\frac{1}{7u} \\ u(0) = 2 \end{cases}$ $\leftarrow$ anche se manca la t è a variabili separabili

① Separare $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{7u} \quad u du = -\frac{1}{7} dt$

② Integrare $\frac{u^2}{2} = -\frac{1}{7} t + C$

③ Ricavare $u^2 = -\frac{2}{7} t + C \leadsto u = \pm \sqrt{-\frac{2}{7} t + C}$
 $\uparrow$
 Non si ricava in modo unico

④ Determinare C $u(0) = 2$ $\leftarrow$ Scelgo la sol. generale con $+\sqrt{\quad}$ perché altrimenti $u(0)$ non può essere > 0

$$u(t) = \sqrt{C - \frac{2}{7}t} \quad u(0) = 2$$

$$\sqrt{C} = 2 \rightarrow C = 4$$

Soluzione del problema di Cauchy:

$$u(t) = \sqrt{4 - \frac{2}{7}t}$$

⑤ Controllare (lasciato per esercizio!)

⑥ Studiare $u(t)$ definita quando $4 - \frac{2}{7}t \geq 0$, cioè $\frac{2}{7}t \leq 4$, cioè $t \leq 14$

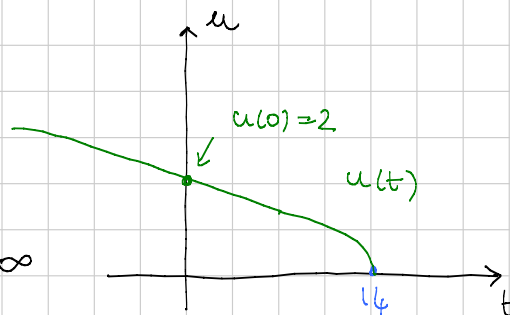
Intervallo max di esistenza: $(-\infty, 14]$

Tempo di vita: $T = 14$

$$\lim_{t \rightarrow 14^-} u(t) = \lim_{t \rightarrow 14^-} \sqrt{4 - \frac{2}{7}t} = 0$$

Non c'è blow-up.

$$\lim_{t \rightarrow 14^-} u'(t) = \lim_{t \rightarrow 14^-} \frac{-\frac{2}{7}}{2\sqrt{4 - \frac{2}{7}t}} = -\infty$$



⇒ BREAK-DOWN

Esempio 3 Se fosse stato $\begin{cases} u' = -\frac{1}{7}u \\ u(0) = -3 \end{cases}$

①, ②, ③ Come prima. Nella fase ④ uso solus. generale con seguito-

$$u(t) = -\sqrt{c - \frac{2}{7}t} \quad u(0) = -3 \quad -\sqrt{c - \frac{2}{7}0} = -3$$

$$\Rightarrow c = 9$$

⇒ Sol. generale

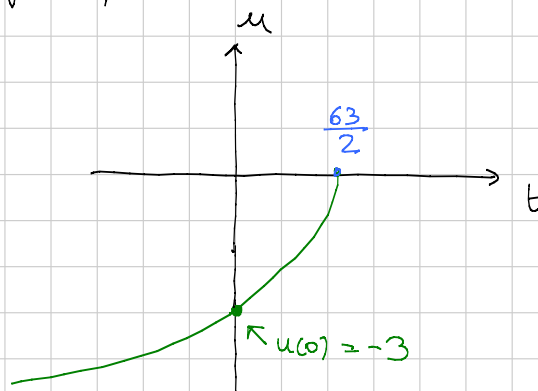
$$u(t) = \boxed{-}\sqrt{9 - \frac{2}{7}t}$$

La soluzione ha BREAK-DOWN

$$\text{per } T = \frac{63}{2}$$

$$9 - \frac{2}{7}T = 0$$

$$\frac{2}{7}T = 9 \Rightarrow T = \frac{63}{2}$$



MATEMATICA I

ORA 91

Titolo nota

12/12/2007

Perché funziona la procedura per eq. diff. a var. separabili

$$\begin{cases} u' = u^2 \cdot e^t \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

Sappiamo per il teo. generale che la soluzione esiste. Divido per $u(t)$

$$u'(t) = u^2(t) \cdot e^t$$

$$\frac{u'(t)}{u^2(t)} = e^t$$

Integro a destra e sinistra rispetto alla variabile t (integro con estremi 0 e t)

$$\int_0^t \frac{u'(t)}{u^2(t)} dt = \int_0^t e^t dt$$

così non va bene

$$\int_0^t \frac{u'(s)}{u^2(s)} ds = \int_0^t e^s ds$$

così va meglio

$$\int_0^t e^s ds = [e^s]_{s=0}^{s=t} = e^t - 1$$

$$\int_0^t \frac{u'(s)}{u^2(s)} ds$$

Cambio variabile ponendo $y = u(s)$
 $dy = u'(s) ds$

Quando $s=0$, ho che $y = u(0) = 7$ (cond. iniz.)

Quando $s=t$, ho che $y = u(t)$

$$\int_0^t \frac{u'(s)}{u^2(s)} ds = \int_7^{u(t)} \frac{dy}{y^2} = \left[-\frac{1}{y} \right]_{y=7}^{y=u(t)} = \frac{1}{7} - \frac{1}{u(t)}$$

Uguagliando i 2 integrali ottengo

costante che dipende dal dato iniziale

$$\frac{1}{7} - \frac{1}{u(t)} = e^t - 1, \text{ cioè } -\frac{1}{u(t)} = e^t - 1 - \frac{1}{7}$$

Esempio 1 $\begin{cases} u' = u^2 \cdot e^t \\ u(0) = 0 \end{cases}$

①, ②, ③ come prima portano a $u(t) = \frac{1}{c - e^t}$

④ Determinare c $u(0) = 0 \leadsto \frac{1}{c-1} = 0 \leadsto c = ?$

La procedura non funziona

N.B. La soluzione DEVE esistere (ed essere unica) per il t_0 -generale

In questo caso la soluzione è la funzione costante

$u(t) \equiv 0$

Int. max. di esistenza: $\mathbb{R}$ $T = +\infty$

$\Rightarrow$ esistenza globale

Esempio 2 $\begin{cases} u' = \sin u \\ u(0) = \pi \end{cases}$

$\Rightarrow$ La soluzione è la costante $u(t) \equiv \pi$ (esist. globale)

Verifica: $u'(t) = 0$ $\sin u(t) = \sin \pi = 0$

In generale per l'eq. $u' = f(u) \cdot g(t)$ la soluzione è costante quando il dato iniziale

$u(t_0) = u_0$

soddisfa $f(u_0) = 0$. In questo caso $u(t) \equiv u_0$.

Esempio 3 $\begin{cases} u' = \log u \\ u(0) = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} u' = \log u \\ u(0) = 2 \end{cases}$

$u'(t) = 0$
 $\log u(t) = \log 2 \neq 0$

SOL. COSTANTE $u(t) \equiv 1$

$u(t) \equiv 2$ NON è soluzione

Esempio 4 Se $u' = \log u$ e $u(0) = 7$, quanto vale $u'(0)$?

$$u'(0) = \log u(0) = \log 7$$

Se $u(7) = 22$, quanto vale $u'(7)$?

$$u'(7) = \log u(7) = \log 22.$$

Esempio 5 $\begin{cases} u' = u^3 \cos t \\ u(0) = -2 \end{cases}$

① Separare: $\frac{du}{dt} = u^3 \cos t \quad \frac{du}{u^3} = \cos t \cdot dt$

② Integrare: $\int \frac{du}{u^3} = \int \cos t \, dt$
 $-\frac{1}{2} \frac{1}{u^2} = \sin t + C$

③ Ricavare $-\frac{1}{u^2} = 2 \sin t + \boxed{C} \quad \frac{1}{u^2} = \boxed{C} - 2 \sin t$
 può restare sempre la stessa

$$u^2 = \frac{1}{C - 2 \sin t}$$

$$u(t) = \pm \sqrt{\frac{1}{C - 2 \sin t}}$$

SOLUZIONE
GENERALE

④ Determino C Scelgo sol. gen. con segno -

$$u(0) = -2 \quad + \sqrt{\frac{1}{C - 2 \sin 0}} = +2 \quad \frac{1}{\sqrt{C}} = 2$$

$$\sqrt{C} = \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{4}$$

Solus. problema di Cauchy:

$$u(t) = -\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4} - 2 \sin t}} = -\sqrt{\frac{4}{1 - 8 \sin t}}$$

⑤ Controllare (esercizio!)

⑥ Studiare. Perché $u(t)$ abbia senso deve essere

$$1 - 8 \sin t > 0, \text{ quindi } 8 \sin t < 1, \sin t < \frac{1}{8}$$

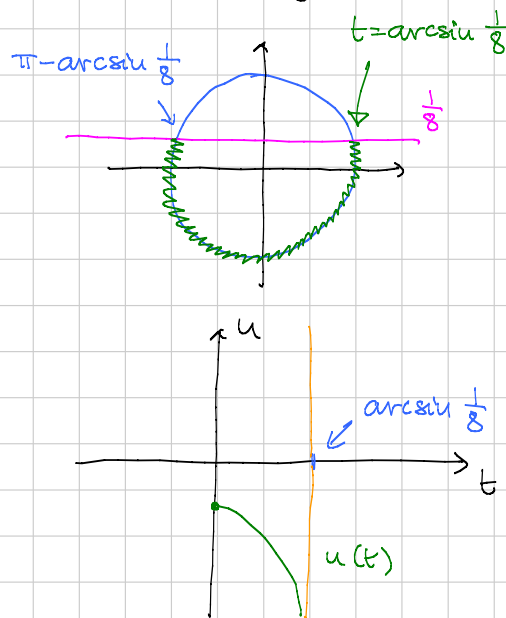
Tempo di vita

$$T = \arcsin \frac{1}{8}$$

Intervallo massimale di esistenza:

$$\left(-\pi - \arcsin \frac{1}{8}, \arcsin \frac{1}{8} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = -\infty \Rightarrow \text{blow up.}$$



Variante dell'esercizio

$$\begin{cases} u' = u^3 \cos t \\ u(0) = +\alpha > 0 \end{cases}$$

Domanda: esistono dei valori di α per cui la soluzione ha esistenza globale nel futuro?

①, ②, ③ come prima $u(t) = \pm \sqrt{\frac{1}{c - 2 \sin t}}$

④ Determino c in funzione del parametro α

$$u(0) = \alpha \quad \sqrt{\frac{1}{c - 2 \sin 0}} = \alpha \quad ; \quad \frac{1}{c} = \alpha^2 \Rightarrow c = \frac{1}{\alpha^2}$$

Soluzione generale (in funzione di α):

$$u(t) = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\alpha^2} - 2 \sin t}} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{1 - 2\alpha^2 \sin t}} = \alpha \sqrt{\frac{1}{1 - 2\alpha^2 \sin t}}$$

Esistono valori di α per cui $u(t)$ è definita per ogni $t \geq 0$.
Deve succedere che

$$1 - 2\alpha^2 \sin t \stackrel{(>)}{\neq} 0 \quad \forall t \geq 0, \text{ cioè}$$

$$2\alpha^2 \sin t \stackrel{(<)}{\neq} 1, \text{ cioè } \sin t \neq \boxed{\frac{1}{2\alpha^2}} \rightarrow \text{Deve essere } > 1 \text{ (non potendo essere } < -1)$$

$$\frac{1}{2\alpha^2} > 1, \text{ cioè } \alpha^2 < \frac{1}{2}, \text{ cioè } \alpha < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{stiamo considerando solo gli } \alpha > 0)$$

— 0 — 0 —

Cosa succede se $u(0) = 0$? La soluzione è la costante
 $u(t) \equiv 0$

MATEMATICA I

ORA 92

Titolo nota

12/12/2007

Esercizio $\begin{cases} u' = u \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

① Separare: $u' = u$, $\frac{du}{dt} = u$, $\frac{du}{u} = dt$

② Integrare: $\int \frac{du}{u} = \int dt \rightarrow \log |u| = t + c$

③ Ricavare: $|u| = e^{t+c} \rightarrow u(t) = \boxed{\pm} e^{t+c}$

↑ possibilità di scegliere il segno

Oppure

$u(t) = \pm e^t \cdot \boxed{e^c}$
↓ costante > 0

$\rightarrow u(t) = \boxed{c} \cdot e^t$
↓ costante qualunque che ingloba il $\pm$

Scrivendo $u(t) = c \cdot e^t$ ammetto anche il caso $c=0$, che corrisponde alla soluzione $u(t) \equiv 0$ che comunque va considerata.

④ Determinare c in funzione di α $u(0) = \alpha$

$u(0) = c \cdot e^0 = c = \alpha$

Soluz. problema di Cauchy: $\boxed{u(t) = \alpha e^t}$

⑤... ⑥ Qualunque sia $\alpha \in \mathbb{R}$, c'è esistenza globale nel passato e nel futuro.
— 0 — 0 —

Esempio 2 $\begin{cases} u' = t^2 u \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

① $\frac{du}{dt} = t^2 u$ $\frac{du}{u} = t^2 dt$

② $\int \frac{du}{u} = \int t^2 dt$

$\log |u| = \frac{t^3}{3} + c$

③ $|u| = e^{t^{3/3} + c} \rightarrow u(t) = \pm e^{t^{3/3} + c} = \boxed{\pm e^{t^{3/3}} \cdot e^c}$
 Nuova costante di segno qualunque

Solus. generale:

$$u(t) = c e^{t^{3/3}}$$

④ Determino c $u(0) = c = \alpha$

Sol. pb. Cauchy:

$$\boxed{u(t) = \alpha e^{t^{3/3}}}$$

Esistenza globale per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esempio 3 $\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

① $\frac{du}{dt} = u^2 \quad \frac{du}{u^2} = dt$

② $\int \frac{du}{u^2} = \int dt ; -\frac{1}{u} = t + c$

③ $\boxed{u(t) = -\frac{1}{t+c}}$

Soluzione generale
(si perde $u(t) \equiv 0$)

④ Determino c $u(0) = -\frac{1}{c} = \alpha \Rightarrow c = -\frac{1}{\alpha}$

Sol. pb. Cauchy:

$$u(t) = -\frac{1}{t - \frac{1}{\alpha}} = -\frac{1}{\frac{\alpha t - 1}{\alpha}} = \boxed{\frac{\alpha}{1 - \alpha t}}$$

⑥ Per quali α c'è esistenza globale per $t \geq 0$?

$u(t)$ ha problemi quando $1 - \alpha t = 0$, cioè per $t = \frac{1}{\alpha}$.

Quindi:

→ se $\alpha > 0$ ho problemi per $t = \frac{1}{\alpha} > 0$ (BLOW-UP)

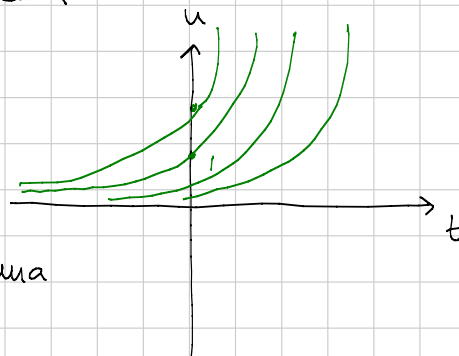
→ se $\alpha < 0$ ho problemi per $t = \frac{1}{\alpha} < 0$ (esistenza globale per $t \geq 0$)

Disegno $u(t)$ per un po' di valori di α

$$\alpha = 1 \Rightarrow u(t) = \frac{1}{1-t}$$

$$\alpha = 2 \Rightarrow u(t) = \frac{2}{1-2t}$$

Qualunque sia $\alpha > 0$ ho un problema per un qualche $t > 0$

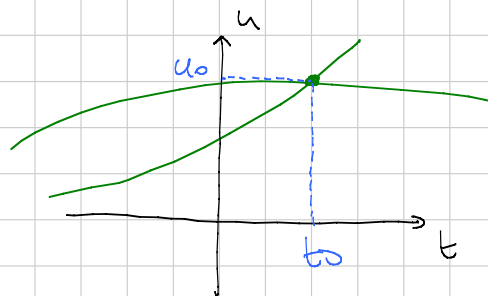


Domanda: possono 2 soluzioni con α diverso incontrarsi?

NO! Vorrebbe dire che il problema di Cauchy con condizione iniziale

$$u(t_0) = u_0$$

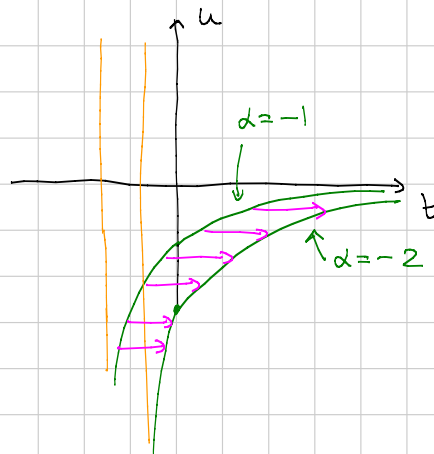
ha almeno 2 soluzioni, cosa che è vietata dal teorema di unicità



$$\alpha = -1$$

$$u(t) = \frac{-1}{1+t}$$

$$\alpha = -2 \rightarrow u(t) = \frac{-2}{1+2t}$$



osservazione generale

Se l'equazione è autonoma

$u' = f(u)$, allora tutte le traslate di una soluzione sono a loro volta soluzioni

(Nell'esempio di sopra la soluzione con $\alpha = -2$ si ottiene traslando quella con $\alpha = -1$ verso dx di $1/2$)

Perché è vero? Sia $u(t)$ una soluzione. Allora
 $u'(t) = f(u(t))$ per ogni t insieme di def. di u

Considero $v(t) = u(t+a)$ dove a indica di quanto traslo

$$\begin{aligned} v'(t) &= u'(t+a) \\ f(v(t)) &= f(u(t+a)) \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad v' = f(v), \text{ cioè } v \text{ è ancora una soluzione.}$$

HO USATO CHE L'EQ. È AUTONOMA.

Esercizio ... $\begin{cases} u' = e^{t+u} \\ u(0) = \alpha \end{cases}$ ① $u' = e^{t+u} = e^t \cdot e^u$

$$\frac{du}{dt} = e^t \cdot e^u$$

$$\frac{du}{e^u} = e^t dt$$

$$e^{-u} du = e^t dt$$

② $\int e^{-u} du = \int e^t dt \quad -e^{-u} = e^t + c$

③ Ricavare: $e^{-u} = -e^t + c \rightarrow -u = \log(c - e^t)$
 $\rightarrow u(t) = -\log(c - e^t) = \log\left(\frac{1}{c - e^t}\right)$

④ Determinare c : $u(0) = \alpha$

$$\log\left(\frac{1}{c-1}\right) = \alpha \rightarrow \frac{1}{c-1} = e^\alpha$$

$$\rightarrow c-1 = e^{-\alpha} \rightarrow c = 1 + e^{-\alpha}$$

Sol. generale: $u(t) = \log\left(\frac{1}{1 + e^{-\alpha} - e^t}\right)$

Domanda:
 per quali α
 c'è esist. gl.
 per $t \geq 0$?

MATEMATICA I

ORA 93

(-7)

Titolo nota

13/12/2007

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI ORDINE n coeff. costanti

$$a_n u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = f(t)$$

CASO OMOGENEO : $f(t) \equiv 0$

Teorema L'insieme delle soluzioni di un'eq. diff. lineare omogenea (anche a coeff. non costanti).

è uno SPAZIO VETTORIALE di DIM. n

Cosa vuol dire ? * La somma di 2 soluzioni è ancora una sol.
* Se prendo una solus. e la moltiplico per un numero ottengo ancora una solus.

Dim. Siano u e v 2 soluzioni

$$a_n(t) u^{(n)} + a_{n-1}(t) u^{(n-1)} + \dots + a_1(t) u' + a_0(t) u = 0$$

$$a_n(t) v^{(n)} + a_{n-1}(t) v^{(n-1)} + \dots + a_1(t) v' + a_0(t) v = 0$$

Chiamo $w = u + v$. Sommando le eq. ottengo

$$a_n(t) \underbrace{[u^{(n)} + v^{(n)}]}_{w^{(n)}} + a_{n-1}(t) \underbrace{[u^{(n-1)} + v^{(n-1)}]}_{w^{(n-1)}} + \dots + a_0(t) \underbrace{[u + v]}_w = 0$$

$\Rightarrow w$ risolve la stessa equazione

Se ora chiamo $z = \lambda u$, dove λ è un numero

z è soluzione

$$a_n(t) \underbrace{\lambda u^{(n)}}_{z^{(n)}} + a_{n-1}(t) \underbrace{\lambda u^{(n-1)}}_{z^{(n-1)}} + \dots + a_1(t) \underbrace{\lambda u'}_{z'} + a_0(t) \underbrace{\lambda u}_z = 0$$

In uno spazio di dim n ogni elemento si scrive come combinazione lineare degli elementi di una BASE.

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_n u_n(t)$$

solus. generale
dipendente da
 n parametri

dove $c_1, \dots, c_n$ sono numeri arbitrari e $u_1(t), \dots, u_n(t)$ sono gli elementi della base

Operativamente: se conosco una base conosco la solus. generale.

Perché la dimensione è n ? Perché quando ho un problema di Cauchy la soluzione è univocamente determinata dalle $[n]$ condizioni iniziali. Posso scegliere le condiz. lin. indep. con tutte le derivate $= 0$ tranne una che vale 1.

Come determinare la BASE? Se l'eq. è a coeff. costanti, c'è una procedura per farlo.

Caso particolare $n=2$ $au'' + bu' + cu = 0$

Polinomio associato all'equazione (pol. caratteristico)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Trovo le radici del polinomio

→ Caso 1: 2 radici reali distinte ($\Delta > 0$): λ, μ

Una base è $e^{\lambda t}, e^{\mu t}$

Quindi la solus. generale è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}$$

$$u(t) = a e^{\lambda t} + b e^{\mu t}$$

→ Caso 2 : 2 radici reali coincidenti ($\Delta=0$)
(cioè una radice λ di molteplicità 2)

Una base è $e^{\lambda t}$, $t e^{\lambda t}$

Quindi la soluz. generale è

$$u(t) = a e^{\lambda t} + b t e^{\lambda t}$$

Oss. $e^{\lambda t}$ e $t e^{\lambda t}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI
(per essere linearmente dipendenti il coeff. di molteplicità deve essere un numero)

→ Caso 3 2 radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ ($\Delta < 0$)

Una base è $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$, $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$

Sol. gen. : $u(t) = a e^{\alpha t} \cos(\beta t) + b e^{\alpha t} \sin(\beta t)$

"Dim" : basta sostituire nell'equazione e vedere che gli elementi della base sono soluzioni !!!

Esempio 1 $u'' + 5u' + 6u = 0$ Eq.

Polinomio $x^2 + 5x + 6 = 0$ $(x+3)(x+2) = 0$

Radici : $x = -3$ $x = -2$ reali distinte

Sol. gen. : $u(t) = a e^{-3t} + b e^{-2t}$

Esempio 2 $u'' - 4u' + 4u = 0$

Polinomio $x^2 - 4x + 4 = 0$ $(x-2)^2 = 0$

$x = 2$ è radice di molteplicità 2

Sol. gen. : $u(t) = a e^{2t} + b t e^{2t}$

Esempio 3 $u'' + 4u' + 13u = 0$

Polinomio: $x^2 + 4x + 13 = 0$

Radici: $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-13} = -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm 3i$
 $= \alpha \pm i\beta$
 con $\alpha = -2$ e $\beta = 3$

Base: $e^{-2t} \cos(3t), e^{-2t} \sin(3t)$

Solus. generale: $u(t) = a e^{-2t} \cos(3t) + b e^{-2t} \sin(3t)$
 $= e^{-2t} (a \cos(3t) + b \sin(3t))$

Esempio 4 $u'' - 4u = 0 \rightsquigarrow x^2 - 4 = 0 \quad x = \pm 2$

Solus. generale: $u(t) = a e^{2t} + b e^{-2t}$

Esempio 5 $u'' + 7u' = 0$

$x^2 + 7x = 0 \quad x(x+7) = 0 \quad x = \begin{matrix} 0 \\ -7 \end{matrix}$

Base: $e^{0t} = 1 \quad e^{-7t}$

Solus. generale: $u(t) = a + b e^{-7t}$
 $\downarrow$ 1° el. della base è 1

Esempio 6 $u'' + 7u = 0 \quad x^2 + 7 = 0$

$x^2 = -7 \quad x = \pm \sqrt{7} i \quad (\alpha \pm i\beta \text{ con } \alpha = 0, \beta = \sqrt{7})$

Base: $\underbrace{e^{0t}}_{=1} \cos(\sqrt{7}t), \underbrace{e^{0t}}_{=1} \sin(\sqrt{7}t)$

Sol. gen.: $u(t) = a \cos(\sqrt{7}t) + b \sin(\sqrt{7}t)$

Perché funzionano queste cose? $au'' + bu' + cu = 0$

È ragionevole cercare una soluzione del tipo $u(t) = e^{\lambda t}$

Sostituisco nell'equazione: $u'(t) = \lambda e^{\lambda t}$ $u''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$au'' + bu' + cu = a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} \\ = e^{\lambda t} (a\lambda^2 + b\lambda + c)$$

→ se λ è una radice del polinomio ho trovato una sol.
(se il polinomio ha 2 radici, ho trovato 2 soluz. lin. indip.
dunque una base)

Supponiamo $\lambda = \alpha + i\beta$ $u(t) = e^{(\alpha + i\beta)t} =$

$$= e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$

MATEMATICA I

ORA 94

Titolo nota

13/12/2007

Come determinare una base dell'insieme delle solus. per un'eq. diff. di ordine n lineare omogenea a coeff. costanti

Analoga al caso $n=2$: Eq. $\leadsto$ Polinomio di grado n

$\leadsto n$ radici (se contate con molteplicità)

* λ radice reale di mult. 1 produce $e^{\lambda t}$

* λ radice reale di mult. k produce k elementi della base:

$$e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t} \quad \leftarrow k \text{ elementi}$$

* $\alpha \pm i\beta$ radici complesse coniugate di mult. 1 $\leadsto$ 2 el. della base

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

$$e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

* $\alpha \pm i\beta$ coppia di radici compl. coniugate di mult. k :
producono $2k$ elementi della base

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

$$e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

$$t e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

$$t e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$t^{k-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

$$t^{k-1} e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Esempio 1 $u' - u'' = 0 \leadsto x^5 - x^3 = 0$

$$x^3(x^2 - 1) = 0 \leadsto \text{radici } x = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{MULT 3} \\ \text{MULT 1} \end{matrix}$$

$$x=1 \leadsto e^t$$

$$x=0 \leadsto e^{0t}, t e^{0t}, t^2 e^{0t}$$

$$x=-1 \leadsto e^{-t}$$

$$\text{cioè } 1, t, t^2$$

Solus. generale:

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 + c_4 t + c_5 t^2$$

Esempio 2 $u^{IV} + 2u'' + u = 0$

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \quad (x^2 + 1)^2 = 0$$

Radici: $x = \pm i$ di molteplicità $\boxed{2}$ ($\alpha \pm i\beta$ con $\alpha=0$ e $\beta=1$)

Base: $e^{it} \sin t$, $e^{it} \cos t$, $t e^{it} \sin t$, $t e^{it} \cos t$

Solus. generale:

$$u(t) = a \sin t + b \cos t + c t \sin t + d t \cos t$$

EQUAZIONI NON OMOGENEE

$$a_n u^{(n)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = f(t)$$

Teoria generale. La soluzione generale di un'eq. diff.

NON OMOGENEA (anche a coeff. non costanti) si scrive nella forma

$$u(t) = \underbrace{c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t)}_{\text{SOLUZIONE GENERALE DELL'EQ. OMOGENEA}} + \underbrace{\bar{u}(t)}_{\text{SOLUZIONE QUALUNQUE DELL'EQ. NON OMOGENEA}}$$

SOLUZIONE GENERALE
DELL'EQ. OMOGENEA

SOLUZIONE QUALUNQUE
DELL'EQ. NON OMOGENEA

Operativamente: L'eq. non omogenea ha (ovviamente) infinite soluzioni. Se riesco a trovarne una qualsiasi (in qualunque modo) la formula mi fornisce tutte le altre.

Dim. Sia $\bar{u}$ una soluzione

$$a_n(t) \bar{u}^{(n)} + a_{n-1}(t) \bar{u}^{(n-1)} + \dots + a_1(t) \bar{u}' + a_0(t) \bar{u} = f(t)$$

Sia u un'altra soluzione

$$a_n(t) u^{(n)} + a_{n-1}(t) u^{(n-1)} + \dots + a_1(t) u' + a_0(t) u = f(t)$$

Chiamo $z = u - \bar{u}$ e sottraggo le equazioni

$$a_n(t) \underbrace{[u^{(n)} - \bar{u}^{(n)}]}_{z^{(n)}} + \dots + a_1(t) \underbrace{[u' - \bar{u}']}_{z'} + a_0(t) \underbrace{[u - \bar{u}]}_z = 0$$

$\Rightarrow z$ è una soluzione dell'eq. OMOGENEA

$\Rightarrow u = \underbrace{z}_{\substack{\downarrow \\ \text{sol. omog.}}} + \underbrace{\bar{u}}_{\text{sol. da cui sono partito.}} \quad \square$

Operativamente: per risolvere un'eq. lineare non omogenea bisogna fare 2 cose

- ① trovare la solus. generale dell'eq. OMOGENEA (problema già affrontato)
- ② trovare una soluzione qualunque (in qualunque modo) dell'eq. non omogenea

Per il punto ② ci sono 2 metodi

↗ Provare a INDOVINARE

↘ METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI (DI LAGRANGE)
(funzione "sempre" a patto di saper fare delle primitive)

COME INDOVINARE LA SOLUZIONE ?

Esempio 1 Risolvere $u'' - 5u' + 6u = e^t$

① Risolvo l'eq. omogenea $u'' - 5u' + 6u = 0$

$$\leadsto x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (x-2)(x-3) = 0$$

$\leadsto$ radici $x=2, x=3 \leadsto$ base: e^{2t}, e^{3t}

② Cerco di indovinare una sol. dell'eq. NON omogenea.

Cerco la soluzione del tipo $u(t) = \lambda e^t$.

Calcolo $u'(t) = \lambda e^t$, $u''(t) = \lambda e^t$. Sostituisco nell'eq.

$$\lambda e^t - 5\lambda e^t + 6\lambda e^t = e^t \quad 2\lambda e^t = e^t \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$u'' - 5u' + 6u = e^t$$

Quindi $u(t) = \frac{1}{2} e^t$ è sol. della NON OMOG.

$\Rightarrow$ Soluz. gen. eq. NON OMOG:

$$u(t) = \underbrace{ae^{2t} + be^{3t}}_{\substack{\text{SOL. GEN.} \\ \text{EQ. OMOGENEA}}} + \underbrace{\frac{1}{2} e^t}_{\text{SOL. INDOVINATA}}$$

Esempio 2 $u'' - 5u' + 6u = e^{-2t}$

Omogenea come sopra

Cerco una soluz. dell'eq. non omog. del tipo $u(t) = \lambda e^{-2t}$

Calcolo $u'(t) = -2\lambda e^{-2t}$, $u''(t) = 4\lambda e^{-2t}$ e sostituisco

$$4\lambda e^{-2t} + 10\lambda e^{-2t} + 6\lambda e^{-2t} = e^{-2t} \quad 20\lambda e^{-2t} = e^{-2t} \rightarrow \lambda = \frac{1}{20}$$

$$u'' - 5u' + 6u = e^{-2t}$$

Sol. generale NON OMOGENEA:

$$u(t) = ae^{2t} + be^{3t} + \frac{1}{20}e^{-2t}$$

Esempio 3 $u'' - 5u' + 6u = e^{3t}$

Cerco una sol. dell'eq. non omog. del tipo $u(t) = \lambda e^{3t}$

Calcolo $u'(t) = 3\lambda e^{3t}$, $u''(t) = 9\lambda e^{3t}$ e sostituisco:

$$9\lambda e^{3t} - 15\lambda e^{3t} + 6\lambda e^{3t} = e^{3t} \quad \leadsto \quad 0 = e^{3t}$$

$$u'' - 5u' + 6u = e^{3t}$$

NOTA BENE: e^{3t} è sol. dell'eq. omogenea, quindi è ovvio che sostituito a sx dia 0!!!

Cosa si prova? $u(t) = \lambda t e^{3t}$

$$u'(t) = \lambda e^{3t} + 3\lambda t e^{3t}, \quad u''(t) = 3\lambda e^{3t} + 3\lambda e^{3t} + 9\lambda t e^{3t}$$

Sostituisco

DEVE SUCCEEDERE!!!

$$\underbrace{6\lambda e^{3t} + 9\lambda t e^{3t}}_{u''} - \underbrace{5\lambda e^{3t} - 15\lambda t e^{3t}}_{-5u'} + \underbrace{6\lambda t e^{3t}}_{+6u} = e^{3t}$$

Resta $\lambda e^{3t} = e^{3t} \quad \leadsto \quad \lambda = 1$

Conclusione: sol. gen. eq. NON OMOGENEA:

$$u(t) = ae^{3t} + be^{2t} + \boxed{te^{3t}}$$

Sol. PARTICOLARE

MATEMATICA I

ORA 95

Titolo nota

14/12/2007

Eq. diff. Lineari NON OMOGENEE

Metodi per "indovinare" una sol. dell'eq. non omog.

Se il secondo membro è del tipo $e^{\alpha t}$, provo con

$u(t) = \lambda e^{\alpha t}$ e cerco λ in modo che sia soluzione.

Questo NON funziona solo nei casi in cui $e^{\alpha t}$ è già sol. dell'eq. omogenea (cioè α radice del pd. caratteristico).

In questi casi il tentativo è $u(t) = \lambda t e^{\alpha t}$.

Funziona --- e se proprio $u(t) = \lambda t^2 e^{\alpha t}$.

Altri 2 casi: $\rightarrow f(t) = \text{polinomio}$

$\rightarrow f(t) = \text{seni e coseni}$

$$u'' + 3u' - 4u = t^2 + 3$$

① Eq. omogenea: $u'' + 3u' - 4u = 0 \leadsto x^2 + 3x - 4 = 0$

$\rightarrow (x+4)(x-1) = 0 \leadsto \text{radici: } x=1 \text{ e } x=-4$

Sol. gen. eq. omogenea: $u(t) = a e^t + b e^{-4t}$

② Ricerca di UNA soluzione dell'eq. NON omogenea.

La cerco del tipo $u(t) = a t^2 + b t + c$ polinomio dello stesso grado con tutti i termini

$u' = 2at + b$, $u'' = 2a$ Sostituisco

$$2a + 6at + 3b - 4at^2 - 4bt - 4c = t^2 + 3$$

$$u'' + 3u' - 4u = t^2 + 3$$

$$\begin{cases} -4a = 1 & \text{coeff. } t^2 \\ 6a - 4b = 0 & \text{coeff. } t \\ 2a + 3b - 4c = 3 & \text{termine noto} \end{cases}$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$$b = \frac{6}{4}a = \frac{6}{4}\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{8}$$

$$c = -\frac{37}{32} \quad \Leftarrow$$

$$4c = 2a + 3b - 3$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{9}{8} - 3$$

$$= \frac{-4 - 9 - 24}{8} = -\frac{37}{8}$$

Soluzione generale dell'eq.
NON omogenea

$$u(t) = \underbrace{ae^t + be^{-4t}}_{\text{Sol. GEN. EQ. OMOGENEA}} + \underbrace{-\frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{8}t - \frac{37}{32}}_{\text{SOLUZIONE TROVATA DELL'EQ. NON OMOGENEA}}$$

In generale se il secondo membro è un polinomio di grado k si cerca una soluzione che sia un pol. di grado k (sempre con tutti i termini, dunque $k+1$ parametri).

Funziona "sempre" TRANNE quando ci sono dei polinomi tra le soluzioni dell'eq. omogenea (tipo $1, t, t^2, \dots$, cosa che accade quando $x=0$ è soluzione dell'eq. polinomiale associata all'omogenea). In quel caso "si aggiungono le t^n ".

Esempio $u^{IV} + u'' = t^3$

① Eq. omogenea: $u^{IV} + u'' = 0 \Rightarrow x^4 + x^2 = 0, x^2(x^2 + 1) = 0$

$\Rightarrow$ radici: $x = 0$ (MULT. 2)

$\downarrow$
 e^{0t}, te^{0t}
 $\boxed{1}, \boxed{t}$

$x = \pm i$ $\alpha \pm i\beta$
 $\downarrow$
 $\boxed{\cos t}, \boxed{\sin t}$

Solus. gen. eq. omogenea.

$$u(t) = C_1 + C_2 t + C_3 \cos t + C_4 \sin t$$

② Passo all'eq. NON omogenea. Cerco una sol. del tipo

$$u(t) = (at^3 + bt^2 + ct + d) \underbrace{t^2}_{\substack{\uparrow \text{aggiungo } t^2 \text{ perché ci} \\ \text{sono 2 polinomi nella base}}}$$

$$u = at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2, \quad u' = 5at^4 + 4bt^3 + 3ct^2 + 2dt$$

$$u'' = 20at^3 + 12bt^2 + 6ct + 2d, \quad u''' = 60at^2 + 24bt + 6c$$

$$u^{IV} = 120at + 24b. \quad \text{Sostituisco nell'eq.}$$

$$\underbrace{120at + 24b}_{u^{IV}} + \underbrace{20at^3 + 12bt^2 + 6ct + 2d}_{u''} = t^3$$

$$20a = 1$$

$$12b = 0$$

$$120a + 6c = 0$$

$$24b + 2d = 0$$

coeff t^3

" t^2

" t

term. noto

$$a = 1/20$$

$$b = 0$$

$$c = -1$$

$$d = 0$$

Soluzione particolare: $\bar{u}(t) = \frac{1}{20} t^5 - t^3$

Solus. gen. eq. NON omogenea

$$u(t) = \underbrace{C_1 + C_2 t + C_3 \cos t + C_4 \sin t}_{\text{SOL. GEN. EQ. OMOGENEA}} + \underbrace{\frac{1}{20} t^5 - t^3}_{\bar{u}(t)}$$

Oss. Se uno prova a cercare la solus. della non omog. del tipo

$$\bar{u}(t) = at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2 + et + f$$

non riesce a determinare i coeff e ed f . In realtà sono come i coeff. C_2 e C_1 (quindi liberi)

Esempio $u'' + 3u' - 4u = \sin(2t)$

Omoogenea come prima. Per la NON omoogenea provo con

$$u(t) = a \sin(2t) + b \cos(2t) \rightarrow \text{cerco } a \text{ e } b$$

$$u' = +2a \cos(2t) - 2b \sin(2t)$$

$$u'' = -4a \sin(2t) - 4b \cos(2t). \text{ Sostituisco nell'equazione}$$

$$\underbrace{-4a \sin(2t)}_{u''} + \underbrace{6a \cos(2t)}_{3u'} - \underbrace{4b \cos(2t)}_{-4u} - 6b \sin(2t) - 4a \sin(2t) - 4b \cos(2t) = \sin(2t)$$

$$\begin{cases} -4a - 6b - 4a = 1 & \text{coeff. di } \sin(2t) \\ -4b + 6a - 4b = 0 & \text{coeff. di } \cos(2t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8a - 6b = 1 \\ 6a - 8b = 0 \end{cases} \quad b = \frac{6}{8}a = \frac{3}{4}a \quad \begin{aligned} -8a - 6 \cdot \frac{3}{4}a &= 1 \\ -8a - \frac{9}{2}a &= 1 \end{aligned} \quad \frac{-25}{2}a = 1$$

$$a = -\frac{2}{25} \quad b = \frac{3}{4}a = -\frac{3}{50}$$

Soluzione particolare

$$\bar{u}(t) = -\frac{2}{25} \sin(2t) - \frac{3}{50} \cos(2t) \leftarrow \text{CONTROLLARE !!!}$$

Soluzione generale eq. NON omoogenea:

$$u(t) = \underbrace{a e^t + b e^{-4t}}_{\text{SOL. OMOG.}} - \frac{2}{25} \sin(2t) - \frac{3}{50} \cos(2t)$$

In generale se il secondo membro è del tipo $C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$

allora il tentativo da fare è: $\bar{u}(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$
($\sin$ e $\cos$ vanno sempre usati insieme, anche se al II membro c'è solo uno dei 2)

Questo non funziona se $\sin(\alpha t)$ e $\cos(\alpha t)$ sono già sol. dell' eq. omog.

In tal caso il tentativo giusto è

$$\bar{u}(t) = t (a \cos(\alpha t) + b \sin(\alpha t))$$

↓ e potenze + alte se serve.
— o — o —

Nel caso di secondi membri del tipo

$$p(t) e^{\alpha t} \quad \text{oppure} \quad p(t) \sin(\alpha t) \quad (p(t) \text{ polinomio})$$

il tentativo da fare è

$$\bar{u}(t) = q(t) e^{\alpha t} \quad \text{oppure} \quad \bar{u}(t) = q_1(t) \sin(\alpha t) + q_2(t) \cos(\alpha t)$$

dove i polinomi in gioco ($q(t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$) hanno lo stesso grado di quello al II membro (sempre completi con tutti i termini)

Oss. Se al II membro c'è un po' di tutto ?

$$u'' + 3u' - 4u = e^{2t} + e^{3t} + \cos(4t) + t^3$$

ci sono 2 strade:

* o si fa il tentativo che unisce i singoli tentativi

$$\bar{u}(t) = a e^{2t} + b e^{3t} + c \cos(4t) + d \sin(4t) + e t^2 + f t + g$$

* in alternativa si risolve separatamente considerando un pezzo per volta del II membro, e poi si sommano le solus. ottenute

(Domanda: perché si può fare pezzo per pezzo e poi sommare? Si usa che l'eq. è lineare)

MATEMATICA I

ORA 96

Titolo nota

14/12/2007

EQUAZIONI DIFF. LINEARI DEL 1° ORDINE

$$u' + a(t)u = b(t)$$

Oss. Tutto quanto abbiamo detto sulle equazioni lineari in generale continua a valere. In particolare se l'eq. è omogenea

$$u' + a(t)u = 0$$

La soluzione è del tipo $u(t) = C_1 u_1(t)$
 in questo caso la base ha un solo elemento

Questa equazione è ANCHE a variabili sep. $u' = -a(t) \cdot u$
 quindi la solus. si sa determinare

Per l'eq. non omog. la solus. generale sarà del tipo

$$u(t) = \underbrace{C_1 u_1(t)}_{\substack{\text{SOL. GEN.} \\ \text{OMOG.}}} + \underbrace{\bar{u}(t)}_{\substack{\text{SOL. QUALUNQUE} \\ \text{EQ. NON OMOG.}}}$$

Quindi si potrebbe:

- ① risolvere l'omogenea vedendola come eq. a variabili separabili
- ② cercare una sol. qualunque della non omog.
 - per tentativi
 - mediante variazione delle costanti

e concludere usando formula generale.

METODO ALTERNATIVO (FATTORE INTEGRANTE)

$$u' + a(t)u = b(t)$$

Considero una primitiva $A(t)$ di $a(t)$ ($A'(t) = a(t)$)

Moltiplico a dx e sx per $e^{A(t)}$ ← **FATTORE INTEGRANTE**

$$u' e^{A(t)} + a(t) e^{A(t)} u = e^{A(t)} b(t)$$

$$\left[u e^{A(t)} \right]' = e^{A(t)} b(t)$$

$$\Rightarrow u e^{A(t)} = \int e^{A(t)} b(t) dt + c \quad \text{parametro libero}$$

Ricavo u :

$$u(t) = e^{-A(t)} \int e^{A(t)} b(t) dt + c e^{-A(t)}$$

Esempio 1

$$u' + \underbrace{\sin t}_{a(t)} \cdot u = \underbrace{\sin t}_{b(t)}$$

$A(t) = -\cos t$ FATTORE INTEGRANTE: $e^{A(t)} = e^{-\cos t}$

Moltiplico per il fattore integrante:

$$u' e^{-\cos t} + \sin t \cdot e^{-\cos t} u = \sin t \cdot e^{-\cos t}$$

$$\left[u e^{-\cos t} \right]' = \sin t \cdot e^{-\cos t}$$

$$u e^{-\cos t} = \int \sin t \cdot e^{-\cos t} dt + c = e^{-\cos t} + c$$

Ricavo u (moltiplicando per $e^{\cos t}$)

$$u(t) = 1 + c e^{+\cos t}$$

In alternativa avrei potuto risolvere l'eq. omog.

$$u' + \sin t \cdot u = 0 \quad u' = -u \cdot \sin t$$

① Separare: $\frac{du}{dt} = -u \cdot \sin t \Rightarrow \frac{du}{u} = -\sin t \, dt$

② Integrare: $\int \frac{du}{u} = \int -\sin t \, dt \quad \log|u| = \cos t + c$

③ Ricavare: $|u(t)| = e^{\cos t + c}$

$$u(t) = \pm e^{\cos t + c} = \boxed{\pm e^{\cos t} \cdot e^c} = \boxed{c e^{\cos t}}$$

Nuova costante c

Per la non omogenea si vede a occhio la soluz. $\bar{u}(t) \equiv 1$,
Dalla teo. generale la soluz. della non omog. (generale) sarà

$$u(t) = \underbrace{c e^{\cos t}}_{\text{sol. GEN. OMOG.}} + \underbrace{1}_{\bar{u}(t)}$$

Terza strada: $u' + \sin t \cdot u = \sin t \rightsquigarrow u' = (1-u) \sin t$

$\rightsquigarrow$ immediatamente a variabili separabili.

Esempio 2 $u' + \frac{u}{t} = e^{2t}$ Non è a variabili separabili

$a(t) = \frac{1}{t}$, $b(t) = e^{2t}$

$A(t) = \log t \leftarrow$ Suppongo di stare risolvendo per $t > 0$

Fattore integrante: $e^{A(t)} = e^{\log t} = t$

Moltiplico a dx e sx per il fattore integrante:

$$t u' + u = t e^{2t}$$

$$[tu]' = t e^{2t}$$

$$\begin{aligned}
 t u &= \int \underset{G \neq}{t} e^{2t} dt + c = t \underset{G}{\frac{e^{2t}}{2}} - \int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\frac{e^{2t}}{2}} dt + c \\
 &= \frac{1}{2} t e^{2t} - \frac{1}{4} e^{2t} + c
 \end{aligned}$$

Ricavo $u(t)$ dividendo per t

$$u(t) = \frac{1}{2} e^{2t} - \frac{1}{4t} e^{2t} + \frac{c}{t}$$

SOL. GEN.

EQ. NON OMOGENEA

Oss. La soluz. dell'eq. omogenea è $\frac{c}{t}$ (il pezzo con la c)

Oss. Supponiamo di avere una condizione iniziale $u(1)=\alpha$. Questo permette di determinare c .
Cosa possiamo dire dell'int. max. di esistenza, tempo di vita, ...

Questo non dipende dal valore di c !!! (dunque di α).
L'int. max di esistenza è sempre $(0, +\infty)$.

TEOREMA GENERALE

Per un'eq. diff. LINEARE (anche a coeff. non costanti, anche di ordine n , anche non omogenea)
La soluzione del pb. di Cauchy esiste sempre finché può, cioè l'intervallo massimale di esistenza della soluzione coincide con l'intervallo max di esistenza dei coeff. (e non dipende dal dato iniziale)

Esempi $u' + \frac{u}{t} = e^{3t} \quad u(1) = 27$

Il coeff. $b(t) = e^{3t}$ non ha mai problemi

" " $a(t) = \frac{1}{t}$ ha problemi in $t=0 \Rightarrow$ int. max di esistenza $= (0, +\infty)$

Se i coeff. non hanno problemi, non li ha nemmeno la soluz.

$$u' + \frac{u}{t^2} = \cos t \quad u(-3) = 2 \quad \text{NON CONTA NULLA}$$

Interv. max. di esistenza: $(-\infty, 0)$ perché il tempo iniziale è $t = -3$

$$u'' + \frac{u}{t^2} = \frac{1}{\log t} \quad u\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \quad u(2) = 8$$

Interv. max. di esistenza: $(0, 1)$ $(1, +\infty)$

Esempio $u'' + 2u' + u = 0 \quad u(0) = 1 \quad u'(0) = 2$

$$\leadsto x^2 + 2x + 1 = 0 \quad (x+1)^2 = 0 \leadsto \text{radice } x = -1 \text{ di mult. 2}$$

$$\leadsto \text{base: } e^{-t}, t e^{-t}$$

$\leadsto$ solus. generale

$$u(t) = a e^{-t} + b t e^{-t}$$

Determino a e b :

$$u(0) = 1 \leadsto a = 1$$

$$u'(t) = -a e^{-t} + b e^{-t} - b t e^{-t}$$

$$\text{Impongo } u'(0) = 2 \leadsto -a + b = 2 \leadsto b = 3$$

Sol. pb. di Cauchy

$$u(t) = e^{-t} + 3t e^{-t}$$

Int. max. esistenza: $\mathbb{R}$ (come era prevedibile dal fatto che i coeff. non hanno problemi!)

MATEMATICA I

ORA 97

Titolo nota

18/12/2007

Eq. Diff. lineari non omogenee:

METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI

Serve per trovare UNA soluzione di un'eq. non omog.

Esempio $u'' + 3u' - 4u = e^{2t}$

Risolvo eq. omogenea $u'' + 3u' - 4u = 0$

$$\leadsto x^2 + 3x - 4 = 0 \leadsto (x+4)(x-1) = 0 \leadsto x = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$$

Solus. gen. eq. omogenea

$$u(t) = a e^t + b e^{-4t}$$

Cerco una soluzione dell'eq. non omog. della forma

$$u(t) = a(t) e^t + b(t) e^{-4t}$$
 Quelle che prima erano costanti, ora variano

dove $a(t)$ e $b(t)$ sono 2 funzioni da determinare.Obiettivo: scrivere un sistema nelle incognite $a'(t)$ e $b'(t)$.Derivo u e sostituisco nell'equazione

$$u'(t) = \underline{a'(t) e^t} + a(t) e^t + \underline{b'(t) e^{-4t}} - 4b(t) e^{-4t}$$

Impongo che

$$\boxed{a'(t) e^t + b'(t) e^{-4t} = 0}$$
 1^a equazione

$$u''(t) = a'(t) e^t + a(t) e^t - 4b'(t) e^{-4t} + 16b(t) e^{-4t}$$

Sostituisco u'' , u' e u nell'eq. non omog.:

$$\begin{aligned}
 & \cancel{a' e^t} + \cancel{a e^t} - 4 \cancel{b' e^{-4t}} + 16 \cancel{b e^{-4t}} && u'' \\
 & + 3 \cancel{a e^t} - 12 \cancel{b e^{-4t}} && + 3u' \\
 & - 4 \cancel{a e^t} - 4 \cancel{b e^{-4t}} && - 4u \\
 & && = e^{2t}
 \end{aligned}$$

I termini con $a(t)$ e $b(t)$ DEVONO andare via.
Restano solo i termini in $a'(t)$ e $b'(t)$

$$a'(t)e^t - 4b'(t)e^{-4t} = e^{2t} \quad \text{2ª equazione}$$

Sistema $\begin{cases} a'(t)e^t + b'(t)e^{-4t} = 0 \\ a'(t)e^t - 4b'(t)e^{-4t} = e^{2t} \end{cases}$ SISTEMA LINEARE
in $a'(t)$ e $b'(t)$

$$1^a \text{ eq.} - 2^a \text{ eq.} : 5b'(t)e^{-4t} = -e^{2t}$$

$$\Rightarrow b'(t) = -\frac{1}{5}e^{6t}$$

Dalla 1ª eq. ricavo

$$e^t a'(t) = -b'(t)e^{-4t} \Rightarrow a'(t) = -b'(t)e^{-5t} = \frac{1}{5}e^t$$

$$\text{Quindi: } a'(t) = \frac{1}{5}e^t, \quad b'(t) = -\frac{1}{5}e^{6t}$$

$$\Rightarrow a(t) = \frac{1}{5}e^t, \quad b(t) = -\frac{1}{30}e^{6t}$$

$$\frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{30}e^{2t} = \frac{1}{6}e^{2t}$$

Conclusione:

$$u(t) = a(t)e^t + b(t)e^{-4t} = \frac{1}{5}e^t \cdot e^t - \frac{1}{30}e^{6t} \cdot e^{-4t} = \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{30}e^{2t} = \frac{1}{6}e^{2t}$$

Soluzione generale eq. non omogenea:

$$u(t) = \underbrace{ae^t + be^{-4t}}_{\text{SOL. GEN. EQ. OMOG.}} + \underbrace{\frac{1}{6}e^{2t}}_{\text{SOLUZ. EQ. NON OMOG. APPENA TROVATA}}$$

Il metodo funziona per equazioni di ordine qualunque (anche non a coeff. costanti, però in questo caso non è detto che si trovi una base delle soluz. dell'eq. omogenea.)

Oss. In particolare funziona per equazioni di ordine 1.

Esempio $u' + \frac{1}{t}u = \sin t$

(rientra in quelle $u' + a(t)u = b(t)$)

① Risolvo l'omogenea

↑ si potrebbe fare con il fattore integrante.

$$u' + \frac{1}{t}u = 0$$

Questa si può vedere come eq. a variabili separabili

$$u' = -\frac{1}{t}u$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{t}u$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dt}{t}$$

$$\log |u| = -\log |t| + c$$

$$|u| = e^{-\log |t| + c} = ce^{-\log |t|}$$

$$= ce^{\log \frac{1}{|t|}} = c \frac{1}{|t|}$$

Solut. generale equazione omogenea:

$$u(t) = \frac{c}{|t|}$$

Passando all'eq. non omogenea, cerco una soluzione mediante variazione delle costanti, cioè del tipo

$$u(t) = \frac{c(t)}{|t|} \leftarrow \text{faccio variare la costante}$$

Supponendo per semplicità $t > 0$

$$u(t) = \frac{c(t)}{t}, \quad u'(t) = \frac{c'(t)}{t} - c(t) \frac{1}{t^2}$$

Sostituisco nell'equazione

$$u' + \frac{u}{t} = \sin t$$

$$\frac{c'(t)}{t} - \cancel{c(t) \cdot \frac{1}{t^2}} + \cancel{\frac{c(t)}{t^2}} = \sin t$$

1 termini con la sola $c(t)$
DEVONO andare via

Resta un'equazione in c' : $c'(t) = t \sin t$

$$\leadsto c(t) = -t \cos t + \sin t$$

$$\leadsto u(t) = \frac{c(t)}{t} = \boxed{-\cos t + \frac{\sin t}{t}}$$

Conclusione: soluz. gen. eq. non omogenea

$$u(t) = \underbrace{\frac{c}{t}}_{\substack{\text{SOL.} \\ \text{GEN.} \\ \text{EQ.} \\ \text{OMOG.}}} - \cos t + \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{\substack{\text{SOL.} \\ \text{APPENA} \\ \text{TROVATA}}}$$

Esercizio: controllare che venga uguale con il fattore integrante,

MATEMATICA I

ORA 98

Titolo nota

18/12/2007

Come calcolare la somma delle serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Teorema 1 La serie converge per $|x| < R$, non converge per $|x| > R$, per $|x| = R$ boh.

Teorema 2 Se esiste $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, allora $R = \frac{1}{L}$

Teorema 3 Se la serie è la serie di Taylor di una certa funzione $f(x)$, allora la serie
DOVE CONVERGE (all'interno del raggio di convergenza + eventualmente agli estremi)
converge a $f(x)$

Esempio 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

$$= \frac{1}{1-x} \quad \text{Per } |x| < 1$$

Esempio 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ ($R = +\infty$)

Esempio 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$= -\log(1-x) \quad \text{Per } x \in [-1, 1)$$

$R=1$ per $x=-1$ converge, per $x=1$ NO

Teorema 4 Sia $f(x) = \sum c_n x^n$ (definita per $|x| < R$)

Allora $f(x)$ è derivabile e la sua derivata si calcola derivando termine a termine

$$f'(x) = \sum c_n n x^{n-1}$$

Il raggio di convergenza della serie delle derivate è lo stesso della serie di partenza

Teorema di scambio: la derivata della serie è la serie delle derivate

Esempio 1

$$\begin{aligned} \sum_{n=8}^{\infty} x^n &= x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 - x - x^2 - \dots - x^7 \\ &= \frac{1}{1-x} - 1 - x - \dots - x^7 \end{aligned}$$

2° modo: $x^8 + x^9 + x^{10} + \dots = x^8 (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = x^8 \cdot \frac{1}{1-x}$

In generale: $\sum_{n=k}^{\infty} x^n = x^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x^k}{1-x}$

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = f(x)$ $R=1$ NOTA BENE: $f(0)=0$

$\overset{\text{Teo. 4}}{\downarrow}$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

$\leadsto f'(x) = \frac{1}{1-x} \leadsto f$ si può calcolare facendo la primitiva

$f(x) = -\log(1-x) + C$ ← Devo scegliere C controllando un valore di $f(x)$

↓ Dovendo essere $f(0)=0$, sarà per forza $C=0$.

Esempio 3

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots$$

Se pongo $x^2 = y$ ottengo $1 + y + y^2 + y^3 + \dots = \frac{1}{1-y}$

Quindi la somma di quella iniziale è $\frac{1}{1-x^2}$

Esempio 4

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

Pongo $y = x^2$ e ottengo $1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + \dots$

Pongo $z = -y$ $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \dots$

La serie in z ha come somma $\frac{1}{1-z}$

$\Rightarrow$ la serie in y ha come somma $\frac{1}{1+y}$

$\Rightarrow$ la serie in x ha come somma $\frac{1}{1+x^2}$

Esempio 5

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = f(x)$$

Si verifica (fatto a suo tempo) che $R=1$

$$\overset{\text{Teo. 4}}{f'(x) \downarrow} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots = \frac{1}{1+x^2}$$

Quindi $f(x) = \arctan x + c$

Mettenendo $x=0$ si calcola che $c=0$,

$$\text{Esempio 6} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \dots$$

$$= x (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots)$$

$$\overset{\text{Teo. 4}}{\rightarrow} = x (x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)'$$

Uso formula calcolata
all'inizio

$$\rightarrow = x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = x \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

VALE PER I VALORI DI x per cui la serie converge ($|x| < 1$)

Esempio 7

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + 25x^5 + \dots$$

$$= x (1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + 25x^4 + \dots)$$

Teo. 4

$$\rightarrow = x (x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots)'$$

Esempio
precedente

$$\rightarrow = x \left[\frac{x}{(1-x)^2} \right]'$$

e non resta che fare la derivata...

Esempio 8

$$\frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{5} + \frac{x^4}{6} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

$$= \frac{1}{x^2} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{x^2} \left[\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \right) - x - \frac{x^2}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{x^2} \left[-\log(1-x) - x - \frac{x^2}{2} \right]$$

Formula per la somma (valida per gli x
per cui la serie converge)Esempio 9

$$\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) - 1 - x \right)$$

$$= \frac{1}{x} (e^x - 1 - x)$$

Se ci erano solo potenze dispari $\rightarrow \sinh x$

"NON Esempio 10"

$$\left(x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{25} + \dots \right)' = \text{Teo. 4}$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots$$

$$= \frac{1}{x} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{x} (-\log(1-x))$$

Facendo la primitiva trovo la somma iniziale,

Purtroppo la primitiva non viene in termini di funzioni elementari...

MATEMATICA I

ORA 99

Titolo nota

19/12/2007

SISTEMI DI EQ. DIFFERENZIALI

$$\begin{cases} u' = 4u - v \\ v' = 2u + v \end{cases} \quad \text{Incognite } u(t), v(t)$$

Sistema lineare e omogeneo a coeff. costanti

Derivo la 1ª equazione; $u'' = 4u' - v' = 4u' - 2u - v = 4u' - 2u + u' - 4u$

$\uparrow$ uso v' della 2ª eq. $\uparrow$ ricavo v dalla 1ª eq.

In conclusione $u'' = 5u' - 6u \rightarrow u'' - 5u' + 6u = 0$

Sistema di 2 equazioni del 1º ordine $\leadsto$ equazione singola di ordine 2.

$$u'' - 5u' + 6u = 0 \leadsto x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (x-3)(x-2) = 0$$

$$\leadsto x = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \leadsto u(t) = ae^{2t} + be^{3t}$$

Una volta nota u , ricavo v usando la I equazione

$$v(t) = 4u(t) - u'(t) = 4ae^{2t} + 4be^{3t} - 2ae^{2t} - 3be^{3t}$$

$$v(t) = 2ae^{2t} + be^{3t}$$

Condizioni iniziali saranno del tipo $u(0) = \text{qualcosa}$
 $v(0) = \text{qualcos'altro}$

Le condizioni iniziali permettono di ricavare a e b .

Oss. Le costanti libere sono 2: una fissata ^{a e b} nella u sono fissate nella v

$$\begin{aligned} u' &= 4u - v \\ v' &= 2u + v \end{aligned} \quad \rightarrow \text{Matrice associata}$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{sono } \lambda, \mu$$

$$\lambda \cdot \mu = \text{Det}(A) = 6$$

$$\lambda + \mu = \text{Traccia}(A) = \text{somma el. diagonale} = 5$$

$$\text{Quindi autovalori} = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Autovettori della matrice sono } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \text{ relativo all'autoval. } 2 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{ " " " } 3 \end{aligned}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio $u'' + \alpha u' + 4u = 0$

Per quali valori di α le soluzioni sono limitate per $t \geq 0$.

$$\boxed{\alpha=0} \quad u'' + 4u = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = -4 \quad \rightarrow \quad x = \pm 2i$$

$$\rightarrow u(t) = a \cos(2t) + b \sin(2t) \rightarrow \text{solus. periodiche} \rightarrow \text{limitate}$$

u descrive lo spostamento della pallina dalla posizione di riposo.

accelerazione.

$$u'' = -4u$$



Significato fisico di $\alpha u'$

$$u'' = -4u - \alpha u'$$

$$\alpha > 0$$

↑
Rappresenta l'attrito

reina contro
l'accelerazione



Matematicamente: $u'' + \alpha u' + 4u = 0 \leadsto x^2 + \alpha x + 4 = 0$

Questa equazione ha 2 soluzioni λ, μ con $\lambda \cdot \mu = 4$ e $\lambda + \mu = -\alpha$

- se le soluzioni sono reali: prod. > 0 , somma $< 0 \Rightarrow$
2 soluzioni negative

$$u(t) = a e^{\lambda t} + b e^{\mu t} \quad \text{tende a zero per } t \rightarrow +\infty$$

- se le soluzioni sono complesse coniugate $c \pm id$

Somma delle radici è $2c = -\alpha \Rightarrow c < 0$

$$u(t) = a e^{ct} \cos(dt) + b e^{ct} \sin(dt)$$

Quando $t \rightarrow +\infty$ $u(t) \rightarrow 0$

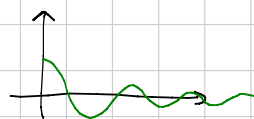
Domanda: differenza tra il caso di 2 radici reali e 2 radici complesse

Matematicamente: $\Delta = \alpha^2 - 16$ $\nearrow \alpha > 4$ radici reali $(\alpha > 0)$
 $\searrow \alpha < 4$ radici complesse

Nel caso $\alpha > 4$ $u(t) \rightarrow 0$ in maniera monotona



" " $\alpha < 4$ $u(t) \rightarrow 0$ oscillando



Per $\alpha < 0$ il discorso cambia totalmente $\rightarrow$ soluzioni non limitate per $t \geq 0$.

Esercizio $u(t) = a e^{-3t} + b e^{-2t}$

È sempre vero che u monotona per $t \geq 0$?

$a > 0, b > 0 \leadsto u(t)$ monotona decrescente

$a < 0, b < 0 \leadsto u(t)$ crescente

$$u'(t) = -3a e^{-3t} - 2b e^{-2t} = 0$$

$$= e^{-3t} (-3a - 2b e^t) = -e^{-3t} (3a + 2b e^t) = 0$$

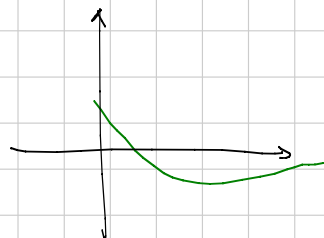
quando $3a + 2b e^t = 0$, cioè quando $e^t = -\frac{3a}{2b}$ se è > 0 ci sono soluzioni

$u'(t)$ si annulla da qualche parte $\Leftrightarrow \frac{3a}{2b} < 0$

$\Leftrightarrow a$ e b hanno segno diverso

Se voglio $u(t)$ monotona per $t \geq 0$, serve che $u'(t)$ si annulli per un valore neg. di t , quindi

$-\frac{3a}{2b} \leq 1 \leftarrow$ sotto questa condizione l'eventuale annullamento è per un $t \leq 0$



MATEMATICA I

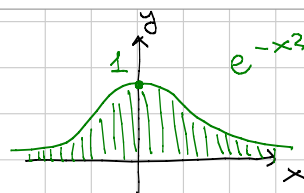
Titolo nota

ORA 100

19/12/2007

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

PARI
↓



$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \text{ converge, ad esempio perché}$$

$$e^{-x^2} \leq e^{-x} \quad \text{per } x \geq 1$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx \text{ converge (dimostrato con la definizione)}$$

↓

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \text{ converge}$$

Come calcolare il valore a cui converge

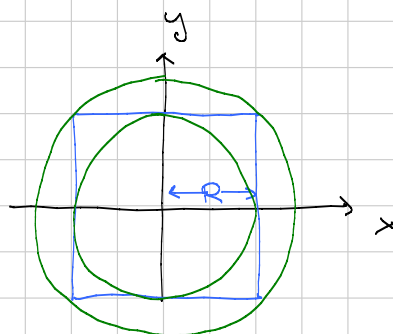
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_0^R e^{-x^2} dx}_{I(R)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \text{integrale iniziale da } \sqrt{\pi}$$

Passiamo in 2 variabili

cerchio interno $\rightarrow$ raggio R

cerchio esterno $\rightarrow$ raggio $R\sqrt{2}$

C_R
 $C_{R\sqrt{2}}$



Quadrato $\rightarrow Q_R$

$$\iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{C_{R\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

perché l'integrandola è positiva, quindi + è grande Q insieme,
+ è grande l'integrale

$$\begin{aligned}
 \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_{-R}^R dx \int_{-R}^R dy \underbrace{e^{-x^2}}_{\text{circled}} \cdot e^{-y^2} \\
 &= \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \underbrace{\int_{-R}^R e^{-y^2} dy}_{2I(R)} = 2I(R) \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \\
 &= 4[I(R)]^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^R dp \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{e^{-x^2-y^2}}_{\substack{\text{Cr in coord.} \\ \text{polari}}} \cdot p = \int_0^R p e^{-p^2} dp \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= 2\pi \int_0^R p e^{-p^2} dp = 2\pi \left[-\frac{e^{-p^2}}{2} \right]_{p=0}^{p=R} = \pi \left[-e^{-R^2} + 1 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_{C_{R\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \text{stessa cosa con } R\sqrt{2} \text{ al posto di } R \\
 &= \pi \left[-e^{-2R^2} + 1 \right]
 \end{aligned}$$

Torniamo alla disuguaglianza

$$\iint_{C_R} \dots \leq \iint_{Q_R} \dots \leq \iint_{C_{R\sqrt{2}}} \dots$$

$$\boxed{\pi [1 - e^{-R^2}]} \leq \boxed{4 [I(R)]^2} \leq \boxed{\pi [1 - e^{-2R^2}]}$$

$\downarrow R \rightarrow +\infty$ $\downarrow \text{carabinieri}$ $\downarrow$
 π π π

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} 4 [I(R)]^2 = \pi \Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} I(R) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Esercizio 2 Sia

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1 \}$$

Domanda: $\text{Vol}(A) = ?$

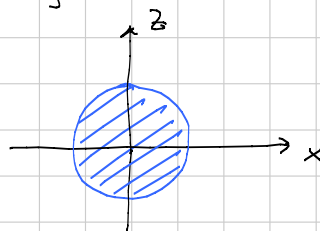
A è limitato? $x^2 + z^2 \leq 1 \Rightarrow \begin{matrix} x \in [-1, 1] \\ z \in [-1, 1] \end{matrix}$

$y^2 + z^2 \leq 1 \Rightarrow$ anche $y \in [-1, 1]$

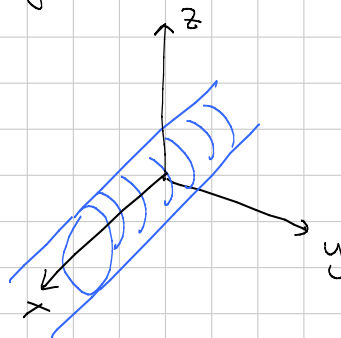
A è contenuto nel cubo $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$

Cosa rappresenta: $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1 \}$

Rappresenta il cilindro infinito con
asse coincidente con l'asse y e
raggio 1.



$\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1 \} =$ cilindro infinito con
asse lungo asse x



$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + z^2 \leq 1}_{\text{stare nel 1° cilindro}}, \underbrace{y^2 + z^2 \leq 1}_{\text{stare nel 2° cilindro}} \}$$

= intersezione dei 2 cilindri

= "Volta a croce"

Calcoliamo il volume

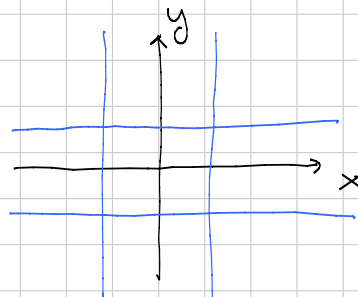
per sezioni asse z

$$\text{Vol}(A) = \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz \stackrel{\downarrow}{=} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} dz \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy$$

$$= \int_{-1}^1 dz \, \text{Area}(S_z)$$

Chi è S_z ? Guardiamo dall'alto

Supponiamo di tagliare con un piano ad altezza z dal piano base.

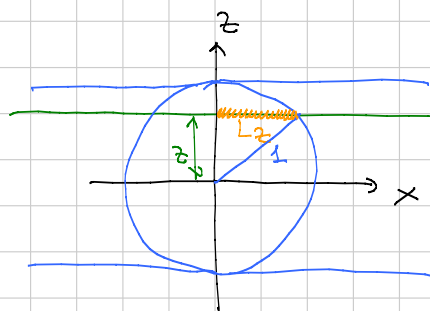
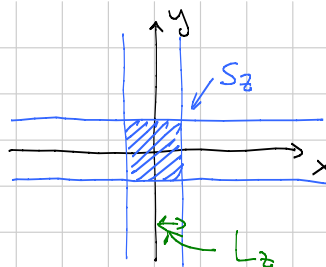


Ogni cilindro viene tagliato in una striscia infinita il cui spessore dipende da z

$\Rightarrow S_z$ è un quadrato di lato $2L_z$

Quanto vale L_z ?

Guardiamo di lato



piano ad altezza z

$$z^2 + (L_z)^2 = 1$$

$$\Rightarrow L_z = \sqrt{1 - z^2}$$

Controlli: per $z=0 \rightarrow L_z=1$
per $z=\pm 1 \rightarrow L_z=0$

Conclusione:

$$\begin{aligned}\text{Vol}(A) &= \int_{-1}^1 \text{area}(S_z) dz = \int_{-1}^1 4L_z^2 dz = 4 \int_{-1}^1 (1-z^2) dz \\ &= 4 \left[z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=-1}^{z=1} = 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{3}\end{aligned}$$

PROBLEMA HARD E se ci fosse anche il terzo cilindro?

$$x^2 + y^2 \leq 1$$