

**A.A. 2007/2008**  
**Analisi Matematica 1**

**Stampato integrale delle lezioni**  
**(Volume 1)**

Massimo Gobbino





# Indice

|                                                                                                                                    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Lezione 001.</b> Insiemi . . . . .                                                                                              | 6  |
| <b>Lezione 002.</b> Funzioni tra insiemi, iniettività, surgettività, immagine e controimmagine                                     | 10 |
| <b>Lezione 003.</b> Principio di induzione . . . . .                                                                               | 14 |
| <b>Lezione 004.</b> Funzioni reali: simmetrie, monotonia, iniettività, surgettività . . . . .                                      | 17 |
| <b>Lezione 005.</b> Presentazione funzioni elementari . . . . .                                                                    | 21 |
| <b>Lezione 006.</b> Fine presentazione funzioni elementari, assioma di continuità . . . . .                                        | 26 |
| <b>Lezione 007.</b> Estremo inferiore e superiore . . . . .                                                                        | 30 |
| <b>Lezione 008.</b> Limiti di successioni: definizioni . . . . .                                                                   | 34 |
| <b>Lezione 009.</b> Operazioni sui grafici. Interpretazione grafica di equazioni, disequazioni, immagine e controimmagine. . . . . | 38 |
| <b>Lezione 010.</b> Limiti di successioni: teoremi algebrici e di confronto . . . . .                                              | 43 |
| <b>Lezione 011.</b> Successioni monotone. Esempi di calcolo di limiti di successioni. . . . .                                      | 48 |
| <b>Lezione 012.</b> Limiti di successioni: rapporto, radice, rapporto $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ radice . . . . .                     | 52 |
| <b>Lezione 013.</b> Confronto tra ordini di infinito per successioni . . . . .                                                     | 56 |
| <b>Lezione 014.</b> Limiti di funzioni: definizioni . . . . .                                                                      | 60 |
| <b>Lezione 015.</b> Continuità, primi esempi di calcolo di limiti . . . . .                                                        | 64 |
| <b>Lezione 016.</b> Cambio di variabili nei limiti: esempi . . . . .                                                               | 68 |
| <b>Lezione 017.</b> Dimostrazione dei principali limiti notevoli . . . . .                                                         | 72 |
| <b>Lezione 018.</b> Criterio funzioni $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ successioni. Esempi di calcolo di limiti. . . . .                    | 76 |
| <b>Lezione 019.</b> Sottosuccessioni e non esistenza di limiti . . . . .                                                           | 80 |
| <b>Lezione 020.</b> Esercizi sui limiti . . . . .                                                                                  | 84 |
| <b>Lezione 021.</b> Linguaggio degli infinitesimi: o piccolo . . . . .                                                             | 88 |
| <b>Lezione 022.</b> "Sviluppini" e loro utilizzo nel calcolo dei limiti . . . . .                                                  | 93 |

|                                                                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Lezione 023.</b> Derivata e differenziale in una variabile . . . . .                                                                  | 98  |
| <b>Lezione 024.</b> Operazioni algebriche sulle derivate . . . . .                                                                       | 103 |
| <b>Lezione 025.</b> Derivate di funzioni inverse; esempi di calcolo di derivate . . . . .                                                | 108 |
| <b>Lezione 026.</b> Teorema di De L'Hopital e formula di Taylor . . . . .                                                                | 113 |
| <b>Lezione 027.</b> Sviluppi di Taylor di funzioni elementari e loro utilizzo nel calcolo di limiti                                      | 118 |
| <b>Lezione 028.</b> Funzioni iperboliche . . . . .                                                                                       | 122 |
| <b>Lezione 029.</b> Polinomi di Taylor di composizioni di funzioni . . . . .                                                             | 127 |
| <b>Lezione 030.</b> Polinomi di Taylor con centro in un punto diverso dall'origine . . . . .                                             | 132 |
| <b>Lezione 031.</b> Serie: definizione, condizione necessaria, serie telescopiche . . . . .                                              | 137 |
| <b>Lezione 032.</b> Criteri per serie a termini positivi: radice, rapporto, confronto, confronto<br>asintotico (casi standard) . . . . . | 142 |
| <b>Lezione 033.</b> Serie: dimostrazione criteri e casi limite del confronto asintotico . . . . .                                        | 147 |
| <b>Lezione 034.</b> Esercizi sulle serie . . . . .                                                                                       | 152 |
| <b>Lezione 035.</b> Serie a termini di segno qualunque: criterio di Leibniz e assoluta convergenza                                       | 156 |
| <b>Lezione 036.</b> Esercizi sulle serie (anche con parametri) . . . . .                                                                 | 161 |
| <b>Lezione 037.</b> Serie di potenze . . . . .                                                                                           | 165 |
| <b>Lezione 038.</b> Esercizi sulle serie di Taylor . . . . .                                                                             | 170 |
| <b>Lezione 039.</b> Teorema di esistenza degli zeri e conseguenze . . . . .                                                              | 174 |
| <b>Lezione 040.</b> Studio locale di funzioni . . . . .                                                                                  | 179 |
| <b>Lezione 041.</b> Massimi, minimi e teorema di Weierstrass . . . . .                                                                   | 184 |
| <b>Lezione 042.</b> Ricerca dei punti di max/min, teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange . . . . .                                           | 189 |
| <b>Lezione 043.</b> Monotonia e segno della derivata . . . . .                                                                           | 194 |
| <b>Lezione 044.</b> Teorema "Monotonia 3", asintoti orizzontali e verticali . . . . .                                                    | 199 |
| <b>Lezione 045.</b> Asintoti obliqui, convessità e concavità . . . . .                                                                   | 204 |
| <b>Lezione 046.</b> Successioni per ricorrenza: introduzione e primi esempi . . . . .                                                    | 209 |
| <b>Lezione 047.</b> Formula di Taylor con resto di Lagrange e applicazioni . . . . .                                                     | 214 |
| <b>Lezione 048.</b> Esercizi su studio di funzioni, inf, sup, max, min . . . . .                                                         | 219 |
| <b>Lezione 049.</b> Funzioni Lipschitziane . . . . .                                                                                     | 224 |

|                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Lezione 050.</b> Esercizi su studio di funzioni, inf, sup, max, min . . . . . | 229 |
| <b>Lezione 051.</b> Successioni per ricorrenza autonome monotone . . . . .       | 233 |
| <b>Lezione 052.</b> Successioni per ricorrenza autonome spiraleggianti . . . . . | 238 |
| <b>Lezione 053.</b> Successioni per ricorrenza non autonome . . . . .            | 243 |
| <b>Lezione 054.</b> Successioni per ricorrenza: ulteriori esercizi . . . . .     | 248 |

# MATEMATICA I

ORA 1

Titolo nota

02/10/2007

MASSIMO GOBBINO

Matematica I = ex Analisi I e II

PROGRAMMA IN 4 PARTI:

- ① PRELIMINARI
- ② LIMITI (e questioni collegate)
- ③ STUDIO DI FUNZIONI     "
- ④ CALCOLO INTEGRALE     "

## INSIEMI

Cos'è un insieme? Non ve lo dico !!!

Come si presenta un insieme?

1 - PER ELENCO      $A = \{1, 2, 7, a, f, \clubsuit, \heartsuit\}$

N.B. Elementi ripetuti contano una sola volta

$B = \{1, 2, f\}$

$C = \{1, 2, f, 2\}$

$B = C$

2 - PER PROPRIETÀ

$D = \{x : x \text{ è iscritto a TLC 1° anno a PISA}\}$   
↑  
tale che

Primi simboli

$a \in A$        $a$  appartiene ad  $A$   
                   ↓                    ↓  
                   ELEMENTO      INSIEME      (anche  $A \ni a$ )

$a \notin A$       ( $A \not\ni a$ )  
                   ↑  
                   NON APPARTIENE

$\emptyset$  INSIEME VUOTO      Qualunque sia  $a$ ,  $a \notin \emptyset$

$|A|$  = NUMERO DI ELEMENTI DI  $A$   
      = CARDINALITÀ DI  $A$  (può essere un numero  
                                          oppure  $+\infty$ )

$|\emptyset| = 0$ . Se  $A, B, C$  sono quelli della pag. precedente

$$|A| = 7$$

$$|B| = 3$$

$$|C| = 3$$

$A \subseteq B$       "l'insieme  $A$  è contenuto nell'insieme  $B$ "  
                   "  $A$  è sottoinsieme di  $B$ "

Ogni elemento di  $A$  è anche elemento di  $B$

$$a \in A \Rightarrow a \in B$$

**[N.B.]** Può anche essere che sia  $A = B$

Se voglio escludere l'uguaglianza si usa il simbolo

$A \subsetneq B$        $A$  contenuto strettamente

**ACHTUNG !!** Non userò mai la notazione  $A \subset B$ .

Esempi ovvi       $\emptyset \subseteq A$  qualunque sia l'insieme  $A$

## OPERAZIONI TRA INSIEMI

## UNIONE

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\} \quad \text{per proprietà}$$

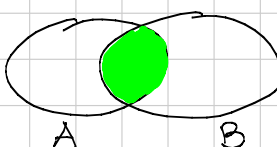


OR (le 2 condizioni devono essere verificate  
o 1, o l'altra,  
o entrambe)

VEL

## INTERSEZIONE

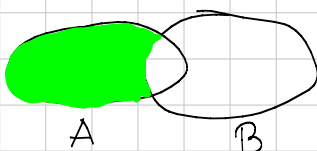
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} \quad \text{per proprietà}$$



AND (le 2 condizioni verificate ENTRAMBE)  
^

## DIFFERENZA

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\} \quad \text{per proprietà}$$



## PRODOTTO CARTESIANO

Siano A e B 2 insiemi. Allora

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Presentazione  
PER ELENCO

↑  
coppie ordinate → c'è un primo elemento in A  
costituite da un elemento e un secondo el. in B  
di A e un elemento di B

Esempio  $A = \{3, f\} \quad B = \{2, 5, d\}$

$$A \times B = \{(3, 2), (3, 5), (3, d), (f, 2), (f, 5), (f, d)\}$$

$$A \times A = \{(3, 3), (f, f), (3, f), (f, 3)\}$$

Questi sono distinti  
perché si tratta di coppie  
ORDINATE

## INSIEME DELLE PARTI

Dato un insieme  $A$ , l'insieme delle parti di  $A$  è  
l'insieme dei sottoinsiemi di  $A$

$$\mathcal{P}(A) = \{ B \subseteq A \}$$

Nota bene:  $3 \in A$  vera  
 $3 \subseteq A$  falsa  
 $\{3\} \subseteq A$  vera

Esempio:  $A = \{3, f\}$

$$\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, \{3\}, \{f\}, \{3, f\} \}$$

↑  
insieme che contiene solo 3 (SINGOLETTO)

Numero di elementi. Se  $|A| = R$  e  $|B| = k$   
( $R$  e  $k$  numeri finiti).

Quanto vale  $|A \times B| = R \cdot k$

ogni elemento di  $A$  lo posso accoppiare con tutti i  
 $k$  el. di  $B$ .

Se  $|A| = R$ , allora

$$\mathcal{P}(A) = 2^R$$

$R$  elementi

$$A = \{ \underbrace{*, *, *, \dots, *}_{R \text{ elementi}} \}$$

SI NO SI NO SI NO SI NO

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^R \text{ modi di scegliere SI o NO}$$

# MATEMATICA I

ORA 2

Titolo nota

02/10/2007

## FUNZIONI TRA INSIEMI

Che cos'è una funzione? Non ve lo dico.

Come si presenta una funzione.

$$f : A \rightarrow B$$

Ci sono 3 elementi:

① Un insieme di partenza (A)

② Un insieme di arrivo (B)

③ Una "legge" che ad ogni el. di A associa un unico el. di B

l'elemento associato  
ad  $a \in A$  si indica  
con  $f(a)$

## TERMINOLOGIA

INIETTIVA  
SURGETTIVA  
BIGETTIVA  
INVERTIBILE

Una funzione  $f : A \rightarrow B$  si dice INIETTIVA se  
elementi diversi di A vanno a finire in elementi diversi di B  
Più precisamente

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

Oppure equivalentemente

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

Due modi di  
dire la  
stessa cosa

Una funzione  $f : A \rightarrow B$  si dice SURGETTIVA se  
ogni elemento di B è raggiunto dalla funzione



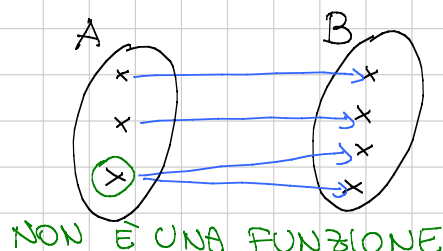
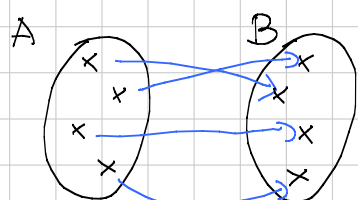
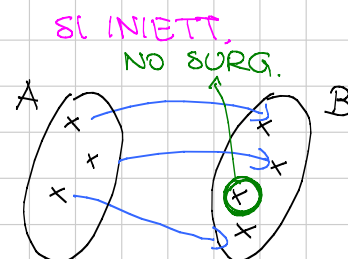
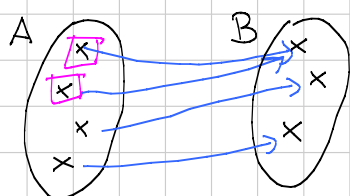
Più precisamente:

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad \text{t.c.} \quad b = f(a)$$

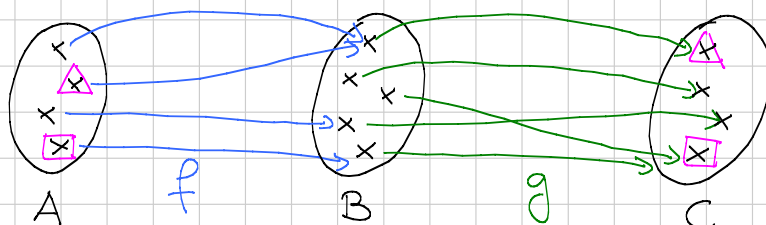
$\uparrow$  PER OGNI       $\uparrow$  ESISTE ALMENO UN       $\uparrow$  TALE CHE

$f$  si dice BIGETTIVA & è CONTEMPORANEAMENTE  
iniettiva e surgettiva.

Esempi



### COMPOSIZIONE DI 2 FUNZIONI



$f$  NO INIETTIVA, NO SURGETTIVA  
 $g$  NO INIETTIVA, SI SURGETTIVA

Data una funzione  $f: A \rightarrow B$  e una funzione  $g: B \rightarrow C$   
la COMPOSIZIONE è una funzione

$$g \circ f : A \rightarrow C$$

fare prima la  $f$   
e poi la  $g$

Per definire la composizione  
di 2 funzioni  $f$  e  $g$   
occorre che  
l'insieme di arrivo della prima  
sia l'insieme di partenza della  
seconda.

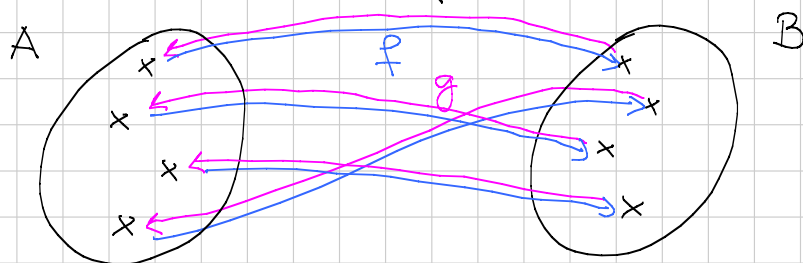
### FUNZIONE INVERSA

Una funzione  $f: A \rightarrow B$  si dice INVERTIBILE se esiste una funzione  $g: B \rightarrow A$  "che torna indietro" cioè tale che

$$g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$$

$$f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$$

Questa funzione  $g$  si dice INVERSA di  $f$  e spesso si indica con il simbolo  $f^{-1}$



**Teorema** Una funzione è INVERTIBILE se e solo se è BIGETTA

### GRAFICO DI UNA FUNZIONE

Data  $f: A \rightarrow B$ , il suo grafico è l'insieme

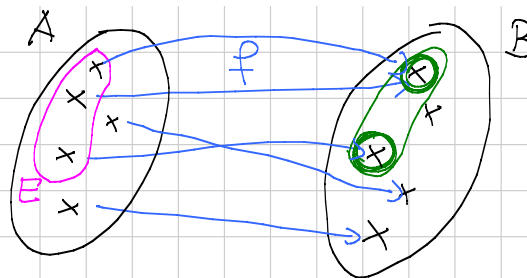
$$\text{Grafico}(f) = \{(a, b) \in A \times B : \underbrace{b = f(a)}\}$$

seconda coordinata =  
 $f$  (prima coordinata)

### IMMAGINE E CONTROIMMAGINE

Sia  $f: A \rightarrow B$ . Sia  $E \subseteq A$

Si definisce IMMAGINE di  $E$  il sottoinsieme di  $B$  costituito dai valori raggiunti a partire da  $E$



Più formalmente:

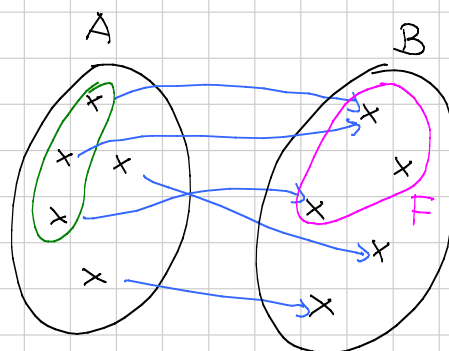
$$f(E) = \{ f(a) : a \in E \} \subseteq B$$

PER ELENCO

Dato un sottoinsieme  $F \subseteq B$ , si definisce CONTROIMMAGINE di  $F$  il sottoinsieme di  $A$  definito da

$$f^{-1}(F) = \{ a \in A : f(a) \in F \}$$

PER PROPRIETÀ



ACHTUNG !! Il simbolo  $f^{-1}$  si usa per indicare ALMENO 3 cose diverse !!

- ① La controimmagine
- ② La funzione inversa
- ③  $\frac{1}{f}$

ESERCIZIO HARD: quanti elementi ha

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))).$$

ORA 3

03/10/2007

$$\mathbb{N} = \text{insieme numeri naturali} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Esempi :  $P_m = m^2 - 7 > m$

$$P_m \approx \boxed{m+1 < n}$$

Obiettivo: capire per quali valori di  $n$  si ha che  $P_n$  è vera

Supponiamo che

Ci)  $P_0$  è vera (sostituendo  $n=0$  al parametro si ha una frase vera)

PASSO BASE  
(PRIMA TESSERA CADE)

(ii) se  $P_n$  è vera, allora  $P_{n+1}$  è vera (se la frase è vera per un certo valore di  $n$ , allora è vera per il successivo)

PASSO INDUTTIVO (MECCANISMO DI CADUTA)

Allora  $P_n$  è vera  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

$P_0$  è vera per il punto c)

se  $P_0$  è vera,  $P_1$  è vera (punto ii)  
con  $n=0$ )

se  $P_1$  è vera,  $P_2$  è vera ( $n=1$ )

se  $P_2$  é verdadeira,  $P_3$  é verdadeira, ...

Variante 1  Supponiamo che

(i)  $P_{37}$  è vera

(ii)  $P_m \text{ vera} \Rightarrow P_{m+1} \text{ vera} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Allora  $P_m$  è vera  $\forall m \geq 37$

Variante 2  Supponiamo che

(i)  $P_{37}$  è vera

(ii)  $P_m \text{ vera} \Rightarrow P_{m+1} \text{ vera} \quad \forall m \geq 40$

Allora possiamo dedurre SOLO che  $P_{37}$  è vera



Per poter dedurre qualcosa  
ci servirebbe dimostrare  
che  $P_{40}$  è vera.

Esempio 1   $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \geq 1$

Dimostriamolo per induzione

**PASSO BASE**

$n=1$

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

**VERA**

**PASSO INDUTTIVO**

Ipotesi:  $P_n$  vera, cioè  $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Tesi:  $P_{n+1}$  vera, cioè  $1 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Dim passo induttivo

$$1 + \dots + (n+1) = \underbrace{1 + \dots + n}_{\text{uso dell'ipotesi}} + (n+1) \quad (\text{Uso dell'ipotesi})$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

$$= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

**Esempio 2** Sia  $a \neq +1$ . Allora

$$1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad \forall n \geq 1$$

**PASSO BASE**  $[n=1]$   $1+a = \frac{a^2-1}{a-1} = \frac{(a+1)(\cancel{a-1})}{\cancel{a-1}}$  OK

**PASSO INDUTTIVO**

Ipotesi:  $P_n$  vera, cioè  $1+a+\dots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

Tesi:  $P_{n+1}$  vera, cioè  $1+a+\dots+a^{n+1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$

Dim. passo induttivo

$$\boxed{1+a+\dots+a^n+a^{n+1}} = \underbrace{\frac{a^{n+1}-1}{a-1}}_{\text{Uso ipotesi induttiva}} + a^{n+1} = \frac{\cancel{a^{n+1}}-1 + a^{n+2}-\cancel{a^{n+1}}}{a-1} = \boxed{\frac{a^{n+2}-1}{a-1}}$$

**Esempio 3**  $2^n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**PASSO BASE**  $[n=0]$   $2^0 \stackrel{?}{\geq} 0 \quad 1 \stackrel{?}{\geq} 0$  OK, vero

**PASSO INDUTTIVO** Ipotesi:  $2^n \geq n$   
Tesi:  $2^{n+1} \geq n+1$

Dim. passo induttivo

$$\boxed{2^{n+1}} \stackrel{\text{PM}}{=} 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n \geq \boxed{n+1}$$

↑  
USO IPOTESI      ↑  
SPERO

Se la speranza si realizza, posso concludere che  $2^{n+1} \geq n+1$ , cioè la tesi

La speranza si realizza?  $2n \geq n+1 \stackrel{?}{\rightarrow}$  vera per  $n \geq 1$

Quindi: il passo induttivo (meccanismo di calcolo) funziona solo per  $n \geq 1$ . Bisogna dim. che  $P_1$  è vera

$\boxed{0} \rightarrow \boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{4}$   $[n=1]$   $2^1 \stackrel{?}{\geq} 1$  OK, FINE.

## MATEMATICA

Titolo nota

ORA 4

03/10/2007

## FUNZIONI REALI

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

↑  
INSIEME  
NUMERI REALI

Il grafico è  
un sottoinsieme  
del piano  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice

**PARI** se  $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

**DISPARI** se  $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

**PERIODICA** se esiste un numero  $T > 0$  tale che

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

In tal caso, il + piccolo  $T > 0$  che va bene (se esiste) si dice PERIODO MINIMO.

PROPRIETÀ  
DI  
SIMMETRIA

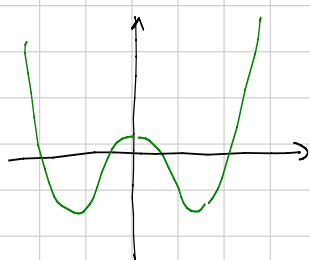
→ periodo

Come si traducono le propr. di simmetria sul grafico

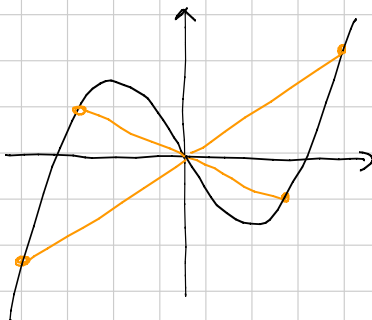
Funzione pari  $\Leftrightarrow$  grafico simm. risp. asse y

" dispari  $\Leftrightarrow$  " " " all'origine

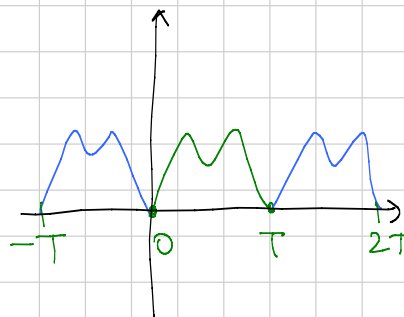
" periodica  $\Leftrightarrow$  "il modulo per  $x \in [0, T]$ " si ripete uguale a se stesso all'infinito



PARI



DISPARI



PERIODICA

Se  $f$  è dispari, di sicuro  $\rightarrow$  basta mettere  $x=0$  nella def.  
 $f(0) = 0$

**FUNZIONI MONOTONE**

Una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice

DEBOLMENTE CRESCENTE se  $y > x \Rightarrow f(y) \geq f(x)$

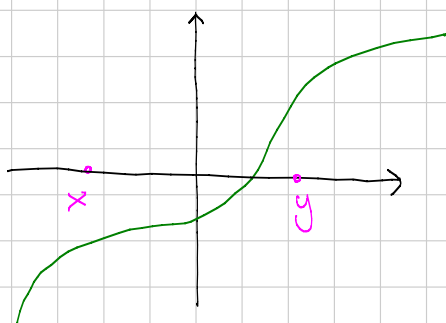
STRETTAMENTE CRESCENTE se  $y > x \Rightarrow f(y) > f(x)$

DEB. DECRESCENTE se  $y > x \Rightarrow f(y) \leq f(x)$

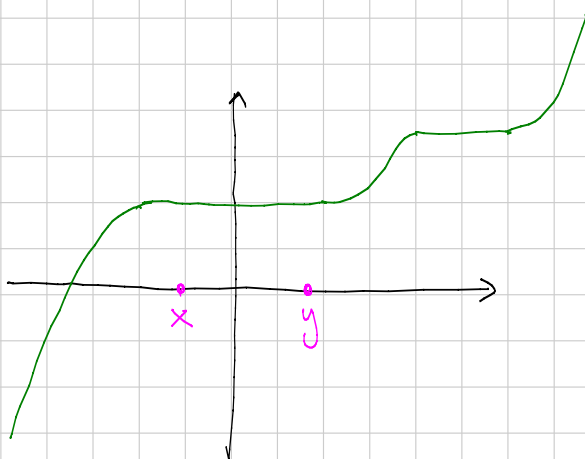
STRETT. DECRESCENTE se  $y > x \Rightarrow f(y) < f(x)$

**Oss.** Se una funzione è strettamente crescente, allora è anche debolmente crescente.  
IDEM per le decrescenti

Oss. Quando  $f$  non è definita su tutto  $\mathbb{R}$  si intende che  $x$  e  $y$  variano nell'insieme di definizione e non su tutto  $\mathbb{R}$ .

**Monotonia e grafico**

strett. crescente  
deb. crescente



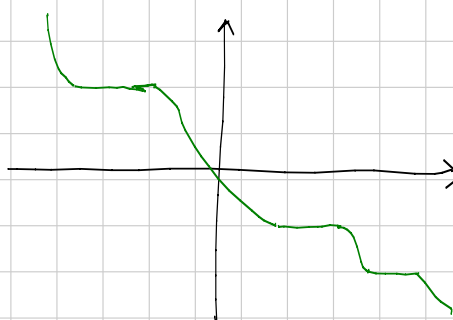
debol. crescente, ma non  
strett. crescente

$y > x$ , ma  $f(y) = f(x)$  e non  $>$

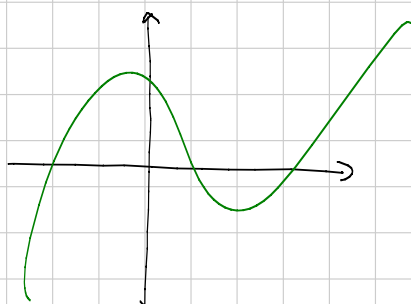




strett. e deb.  
decr.



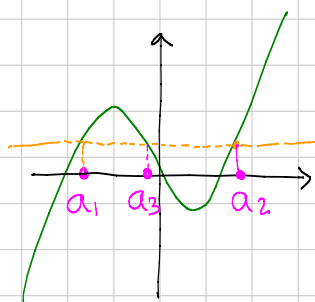
deb. decr., ma non  
strett. decr.



← Non è né deb. cresc.  
né deb. decresc.

Una funzione non è obbligata  
ad essere MONOTONA (uno dei  
4 casi di sopra)

Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Come si vedono nel grafico iniettività e surgettività?

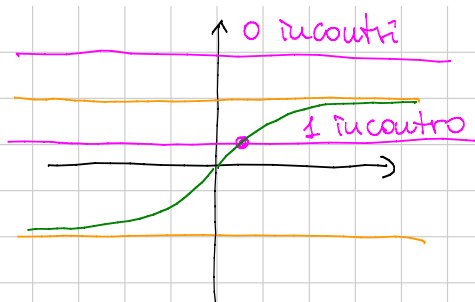


Non è iniettiva, perché esistono valori  
diversi  $a_1, a_2$  dell'insieme di partenza  
con  $f(a_1) = f(a_2)$

Nel grafico  $a_1, a_2, a_3$  sono 3 valori  
distinti in cui  $f$  assume lo stesso valore.

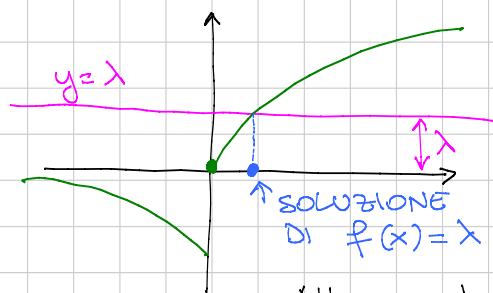
UNA FUNZIONE È INIETTIVA  $\Leftrightarrow$  OGNI RETTA PARALLELA  
ALL'ASSE  $x$  INCONTRA  
IL GRAFICO AL MASSIMO  
UNA VOLTA  
(cioè 0 o 1 VOLTE)

Conseguenza: se esiste una  $\parallel$   
all'asse  $x$  che incontra il  
grafico 2 o + volte, allora  
 $f$  non è iniettiva



È iniettiva.

Ci sono // asse  $x$  che incontrano il grafico 0 volte e // che lo incontrano 1 volta.



Non è monotona perché ha un tratto ↘ e un tratto ↗

Tuttavia è INIETTIVA

Altro modo di dire la stessa cosa

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è iniettiva se e solo se l'eq.  $f(x) = \lambda$  ha al MASSIMO una soluzione per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$

UNA FUNZIONE  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  È SURGETTIVA



IL GRAFICO INTERSECA OGNI PARALLELA ALL'ASSE  $x$  ALMENO UNA VOLTA

In termini di equazioni

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è surgettiva  $\Leftrightarrow$  l'equazione  $f(x) = \lambda$  ha ALMENO una soluzione per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$

In particolare:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è BIGETTIVA (dunque INVERTIBILE) se e solo se

• ogni // all'asse  $x$  interseca il grafico UNA e UNA SOLA volta

o equivalentemente

•  $f(x) = \lambda$  ha un'unica soluzione  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

NOTA BENE: in tal caso

$$x = f^{-1}(\lambda)$$

FUNZIONE INVERSA

## MATEMATICA I

ORA 5

Titolo nota

03/10/2007

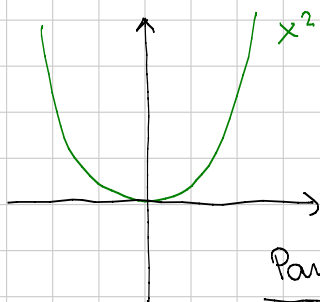
## PRESENTAZIONE FUNZIONI ELEMENTARI

(e relative  
INVERSE)

$$f(x) = x^2$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Funzione PARI  
non monotona  
NO INIETTIVA  
NO SURGETTIVA



"Trucchi contabili"

| Partenza              | Arrivo                | In. | Sur. |
|-----------------------|-----------------------|-----|------|
| $\mathbb{R}$          | $\mathbb{R}$          | NO  | NO   |
| $\mathbb{R}$          | $\mathbb{R}_{\geq 0}$ | NO  | SI   |
| $\mathbb{R}_{\geq 0}$ | $\mathbb{R}$          | SI  | NO   |
| $\mathbb{R}_{\geq 0}$ | $\mathbb{R}_{\geq 0}$ | SI  | SI   |

→ INVERTIBILE

$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  definita da  $f(x) = x^2$  è

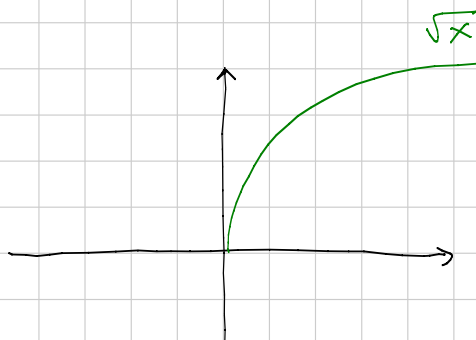
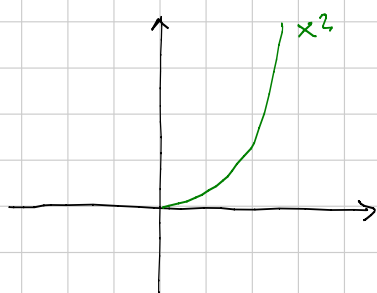
INIETTIVA e SURGETTIVA (e anche strett. crescente)

dunque INVERTIBILE. La sua funzione è una funzione

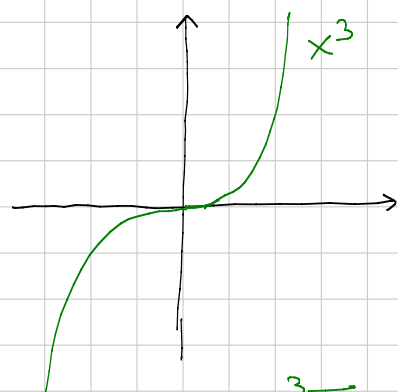
$$g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

$\sqrt{x}$  prende in INPUT numeri reali  $\geq 0$  e restituisce in OUTPUT numeri reali  $\geq 0$ .



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^3$$

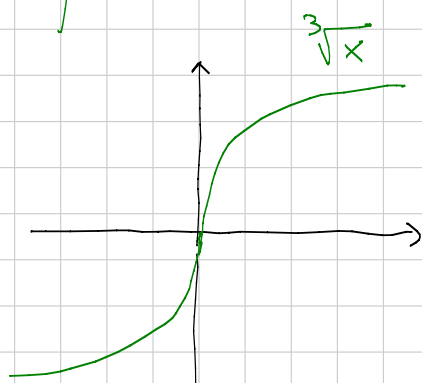


funzione DISPARI  
strett. crescente

INIETTIVA e SURGETTIVA,  
dunque INVERTIBILE.

La sua inversa è la funzione

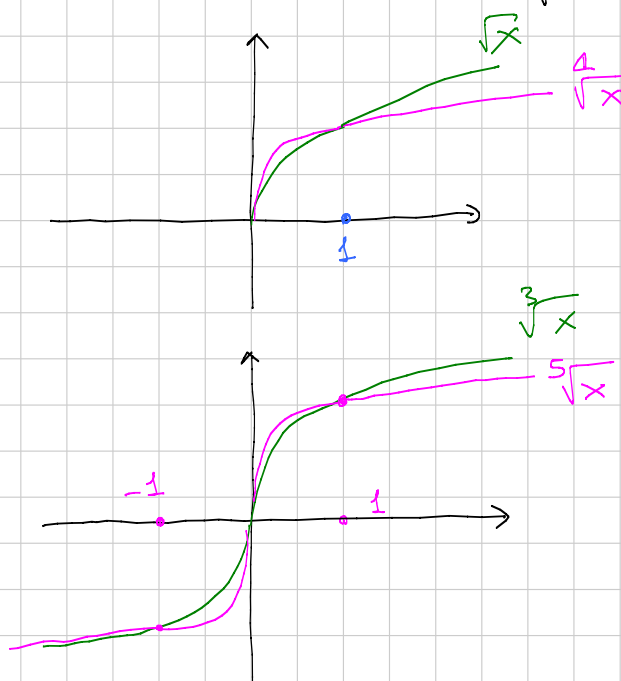
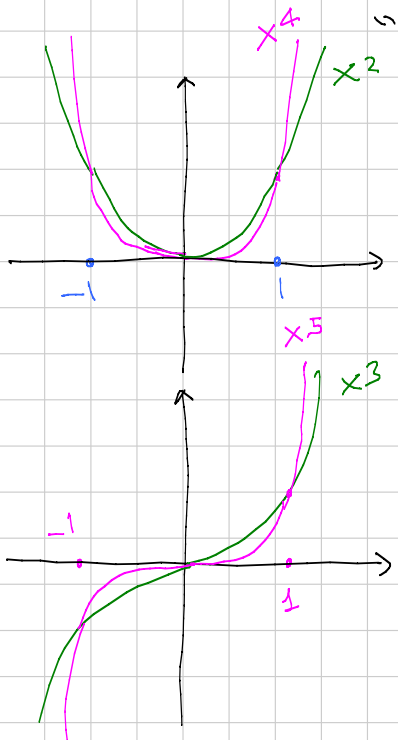
$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$$



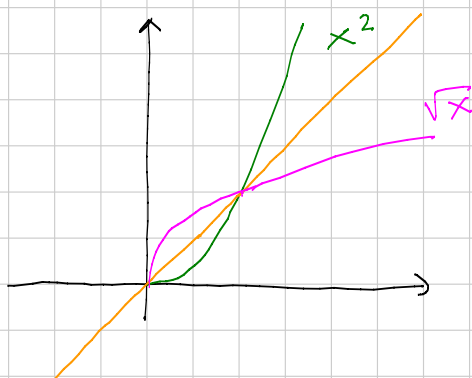
Oss.  $\sqrt[3]{x}$  accetta in INPUT  
qualsunque  $x \in \mathbb{R}$  (positivo  
o negativo) e  
restituisce un numero  
reale

N.B.  $\sqrt[3]{x}$  è DISPARI e  
strett. crescente

1ª Oss. Quanto detto per  $x^2$  e  $\sqrt{x}$  vale per tutte le altre  
potenze / radici di indice pari  
 $x^3$  e  $\sqrt[3]{x}$  ... dispari



**2<sup>a</sup> Oss.** Quale relazione c'è tra il grafico di  $f(x)$  e quello di  $f^{-1}(x)$



Sono l'uno il simmetrico dell'altro rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

Con un foglio di carta:

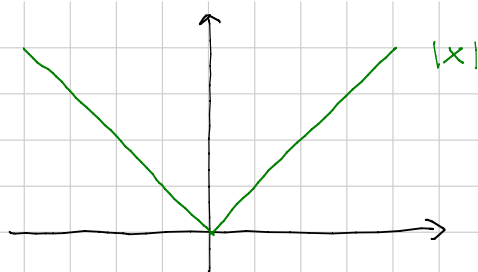
- \* disegnare  $f(x)$
- \* capovolgere il foglio
- \* ruotare di  $90^\circ$



in trasparenza si vede il grafico di  $f^{-1}(x)$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = |x|$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{per } x \geq 0 \\ -x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

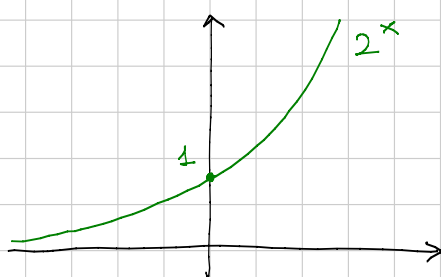


È una funzione PARI

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$$

NO INIETTIVA  
NO SURGETTIVA

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2^x$$



NOTA BENE:

$x$  all' esponente  $\leadsto$  esponenziale  
 $x$  solo alla base  $\leadsto$  potenza

Né pari, né dispari, strett. crescente

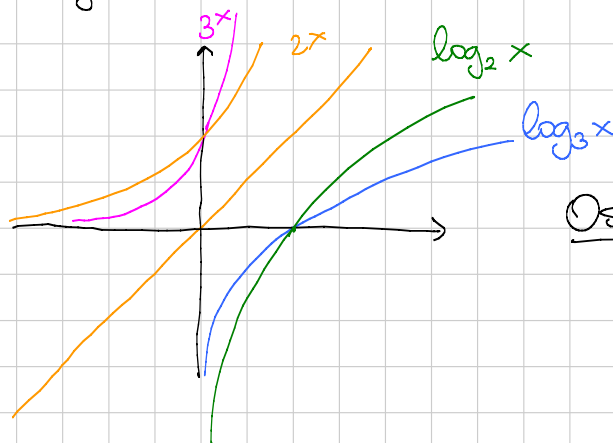
SI INIETTIVA  
NO SURGETTIVA

Trucco contabile  
L'inversa è

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  così è invertibile.

$$g: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \log_2 x$$

$\log_2 x$  accetta in INPUT solo valori  $x > 0$



$\log_2 x$  è strett. cresc.

Oss. Tutti i discorsi fatti  
per  $2^x$  e  $\log_2 x$  valgono  
per  
 $a^x$  e  $\log_a x$

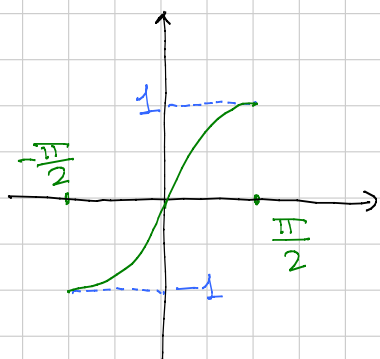
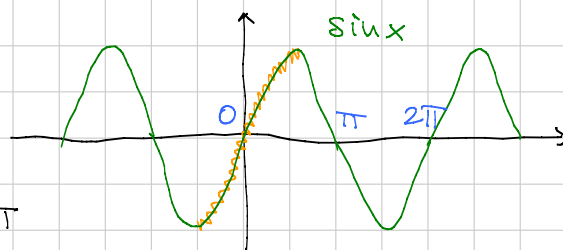
purché  $a > 1$

$$f(x) = \sin x \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

DISPARI  $\sin(-x) = -\sin x$

PERIODICA di periodo minimo  $2\pi$

NO INIETTIVA, NO SURGETTIVA



$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

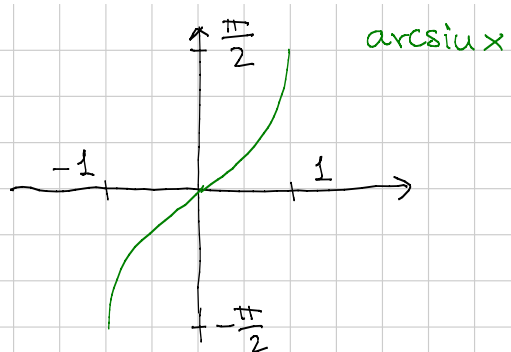
è INVERTIBILE e l'inversa è

$$g: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

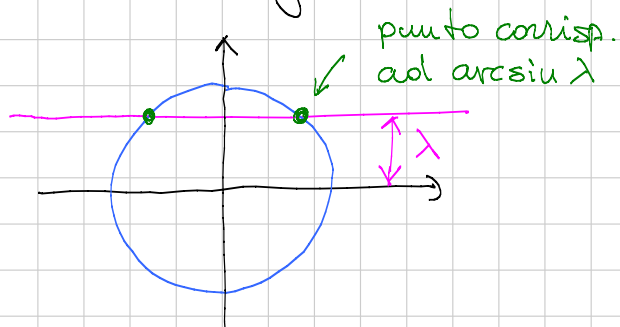
$$g(x) = \arcsin x$$

INPUT: valori compresi tra -1 e 1

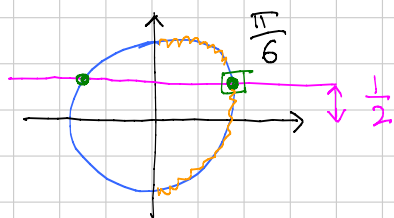
OUTPUT: " " tra  $-\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{\pi}{2}$



Interpretazione nella  
circ. trigonometrica



Esempio 1  $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$



$\arcsin \lambda =$  l'unico angolo  
tra  $-\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{\pi}{2}$  il  
cui seno è  $= \lambda$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

## MATEMATICA I

ORA 6

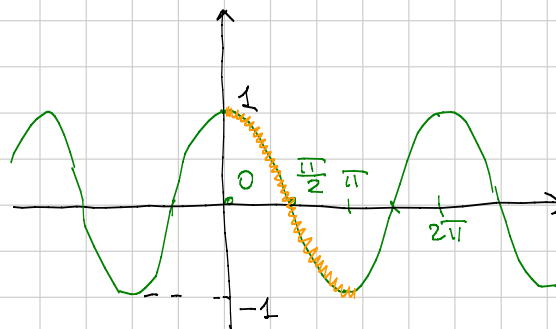
Titolo nota

04/10/2007

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \cos x$$

PARI  $\cos(-x) = \cos x$   
 PERIODICA di periodo  
 minimo  $2\pi$

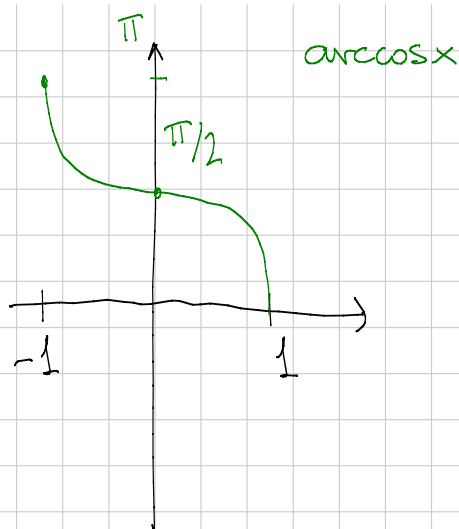
NO INIETTIVA  
 NO SURGETTIVA



Considero la restrizione  $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$   
 Questa è INIETTIVA, SURGETTIVA, strett. decrescente

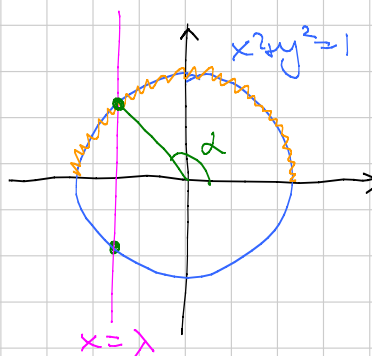
La sua inversa è una funzione  $g: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$   
 $g(x) = \arccos x$

$\uparrow$  INPUT                       $\uparrow$  OUTPUT



$\arccos \lambda$  è l'unico valore  
 $\alpha \in [0, \pi]$  t.c.  $\cos \alpha = \lambda$

Interpretazione nella circ.  
 trigonometrica



$\arccos x$  non è pari  
 non è dispari  
 è monotona strett. decrescente.



$$f(x) = \tan x \quad f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$A = \mathbb{R}$  meno i punti del tipo  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  con  $k$  intero

DISPARI  $\tan(-x) = -\tan x$

PERIODICA di periodo minimo  $\pi$

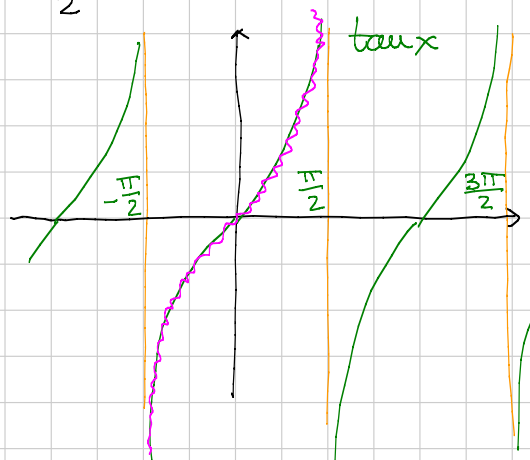
NO INIETTIVA  
SI SURGETTIVA

Considero la restrizione

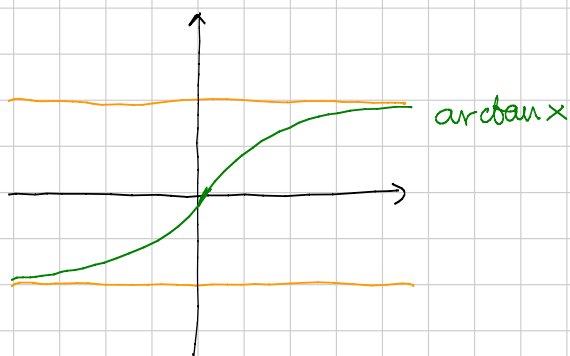
$$f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$$

iniettiva, surgettiva, strett. crescente, dunque invertibile.

La sua inversa è la funzione



$$g: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

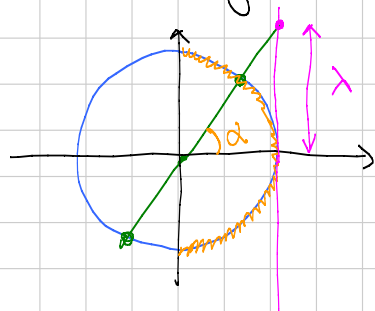


$$g(x) = \arctan x$$

$\arctan x$  è

DISPARI e  
strett. crescente

Sulla circ. trigonometrica



$$\alpha = \arctan x$$

reale  
qualsunque

INSIEMI NUMERICI  $\rightsquigarrow$  INF e SUP

Insiemi numerici:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} = \text{numeri naturali}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, \dots\} = \text{interi relativi}$$

$\mathbb{Z}$  dal tedesco ZAHLEN

$$\mathbb{Q} = \left\{ \text{frazioni } \frac{m}{n} \text{ in cui } m \in \mathbb{Z}, \underbrace{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}_{m \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \right\} = \text{numeri razionali}$$

$\uparrow$  quozienti

$$\mathbb{R} = \text{"tutti i numeri"} = \text{numeri reali (in corrispondenza con i punti di una retta)}$$

$$\mathbb{C} = \text{numeri complessi}$$

### Proprietà dei numeri reali

1. Algebriche : ci sono 2 operazioni (somma e prodotto) con le usuali proprietà
2. Ordinamento
3. Assioma di continuità

### Proprietà di ordinamento

Dati 2 numeri reali  $x, y$  allora si ha che  $x \leq y$  (VEL) oppure  $y \leq x$

$$(01) \quad x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(02) \quad \text{se } x \leq y \text{ e } y \leq x, \text{ allora } x = y$$

$$(03) \quad \text{se } x \leq y \text{ e } y \leq z, \text{ allora } x \leq z$$

RIFLESSIVA

ANTISIMMETRICA

TRANSITIVA

Proprietà che legano ordinamento e operazioni

(OS) se  $x \leq y$ , allora  $x+z \leq y+z \quad \forall z \in \mathbb{R}$

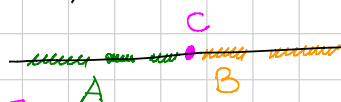
(OP) se  $x \leq y$ , allora  $xz \leq yz \quad \boxed{\forall z > 0}$

(OPbis) se  $x \leq y$ , allora  $xz \geq yz \quad \forall z < 0$   
 $\uparrow$   
 VERSO INVERTITO

Cosa distingue  $\mathbb{Q}$  da  $\mathbb{R}$ ? ASSIOMA DI CONTINUITÀ

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}$  e  $B \subseteq \mathbb{R}$  due sottoinsiemi non vuoti.  
 Supponiamo che "A stia a sinistra di B", cioè

$$a \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$



SEPARATORE

Allora esiste un numero reale  $\boxed{c \in \mathbb{R}}$  t.c.

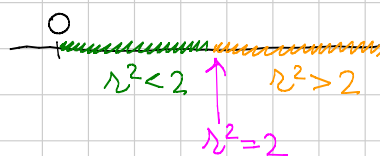
$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

Questa proprietà è vera in  $\mathbb{R}$ , ma non è vera in  $\mathbb{Q}$ .

Esempio

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}$$



Non c'è nessun numero razionale che fa da separatore.

Se ci fosse, il suo quadrato dovrebbe essere 2 e non ci sono razionali con quadrato = 2.

## MATEMATICA I

ORA 7

Titolo nota

04/10/2007

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  un sottoinsieme

Def. Si dice che un numero reale  $b \in \mathbb{R}$  è un  
MAGGIORANTE di  $A$  se

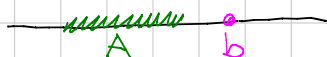
$$b \geq a \quad \forall a \in A$$

Si dice che  $b \in \mathbb{R}$  è un MINORANTE di  $A$  se

$$b \leq a \quad \forall a \in A$$

Oss. ① Dato  $A \subseteq \mathbb{R}$  (non vuoto) maggioranti e minoranti  
NON sono obbligati ad esistere (basta pensare  $A = \mathbb{Z}$ )

② Se un maggiorante esiste, sicuramente non è UNICO



(tutti i reali  $> b$  sono a loro volta maggioranti)

Def. Il sottoinsieme  $A \subseteq \mathbb{R}$  (non vuoto) si dice

SUPERIORMENTE LIMITATO se esiste un maggiorante  
INFERIORMENTE LIMITATO " " " minorante

LIMITATO se è CONTEMPORANEAMENTE super. e infer.  
limitato

Def. Sia sempre  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Dico che  $M \in \mathbb{R}$  è il MASSIMO di  $A$   
 $\uparrow$   $\uparrow$   
INSIEME NUMERO

e scrivo  $M = \max A$  se

(i)  $M \geq a \quad \forall a \in A$  (cioè  $M$  è un maggiorante)

(ii)  $M \in A$  (cioè  $M$  è un elemento di  $A$ )

Analogamente dico che  $m \in \mathbb{R}$  è il MINIMO di  $A$

e scrivo  $m = \min A$  se

(i)  $m \leq a \quad \forall a \in A$  (cioè  $m$  è un minorante)

(ii)  $m \in A$  ( $m$  sta in  $A$ ).

Oss. ① Massimo e minimo NON sono obbligati ad esistere

② Se esistono sono unici

Esempi. ①  $A = \mathbb{N}$ . SI inferiormente limitato  
(ad esempio  $-32$  è un minorante)  
NO superiormente limitato

$\sup = +\infty$   
 $\inf = 0$

NON ha max

HA MINIMO  $m = 0$

②  $A = \mathbb{Z}$  NON è limitato né super., né infer.  
NON esistono né max, né min.

$\sup = +\infty$   
 $\inf = -\infty$

③  $A = (0, 1]$   
↑ escluso    ↓ compreso

SI super. limit. ( $8$  è un maggior.)

SI infer. limit. ( $-24$  è un minor.)

SI LIMITATO

Max  $A = 1$  esiste

min  $A$  NON ESISTE

(in realtà  $0$  avrebbe tanta voglia di essere il minimo, ma non può perché non appartiene)

$\sup A = 1$   
 $\inf A = 0$

— 0 — 0 —

Definizione (estremo superiore e inferiore). Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$

① Dico che  $\sup A = +\infty$  (l'estremo superiore di  $A$  è  $+\infty$ )  
se  $A$  NON è limitato super., cioè non esistono maggioranti

② Dico che  $\inf A = -\infty$  (l'estremo inferiore di  $A$  è  $-\infty$ )  
se  $A$  NON è lim. infer., cioè non esistono minor.

③ Dico che  $\sup A = L \in \mathbb{R}$  (l'estremo superiore di  $A$  è il numero reale  $L$ ) se

(i)  $L \geq a \quad \forall a \in A$  ( $L$  è un maggiorante)

(ii)  $L$  è il più piccolo dei maggioranti

④ Dico che  $\inf A = l \in \mathbb{R}$  se

(i)  $l \leq a \quad \forall a \in A$  ( $l$  è un minorante)

(ii)  $l$  è il più grande dei minoranti

Oss. [1] Se esiste  $M = \max A$ , allora  $M$  è anche  $\sup A$

[2] Se  $\sup A = L \in \mathbb{R}$  e  $L \in A$ , allora  $L = \max A$  dunque  $\max A$  in questo caso esiste

[3]  $\inf A$  e  $\sup A$  SONO OBBLIGATI ad esistere (finiti o infiniti) e sono sempre UNICI

Il punto [3] è un teorema importante.

Dim. (per il  $\sup$ ) Ci sono 2 casi

1° caso: se  $A$  NON ha maggioranti, allora  $\sup A = +\infty$  per definizione e non c'è nulla da dimostrare

2° caso: supponiamo che esistano dei maggioranti di  $A$ .

Sia  $B$  l'insieme dei magg. di  $A$ .

Devo dimostrare che  $B$  ha il minimo (cosa non ovvia a priori)

Per definizione di maggiorante " $B$  sta a destra di  $A$ "

Per l'assioma di continuità esiste il "separatore", cioè un numero  $c \in \mathbb{R}$  tale che

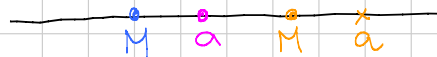
(i)  $a \leq c \quad \forall a \in A$  (cioè  $c$  è un maggiorante di  $A$ )  $c \in B$

(ii)  $c \leq b \quad \forall b \in B$  (cioè  $c$  è più piccolo di tutti i maggioranti)  
 $\leadsto c$  è il  $\sup$

Caratterizzazione di  $\sup$  (e  $\inf$ .)

Dire che  $\sup A = +\infty$  è equivalente alla seguente affermazione:

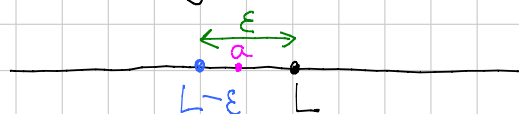
$$\forall M \in \mathbb{R} \text{ (anche enorme)} \\ \exists a \in A \text{ b.c. } a \geq M$$



Idem per l' $\inf$ .

Dire che  $\sup A = L$  è equivalente alle seguenti 2 affermazioni:

$$(i) a \leq L \quad \forall a \in A$$



$$(ii) \forall \epsilon > 0 \text{ (anche piccolissimo)} \\ \exists a \in A \text{ b.c. } a \geq L - \epsilon$$

## MATEMATICA I

Titolo nota

ORA 8

05/10/2007

## SUCCESSIONI e relativi limiti

Il termine DEFINITAMENTE. Sia  $P_n$  una proprietà con un parametro  $n \in \mathbb{N}$  (a seconda del valore di  $n$  può essere vera o falsa). Si dice che  $P_n$  è vera DEFINITIV. se è vera da un certo punto in poi, cioè se esiste un  $n_0 \in \mathbb{N}$  b.c.  $P_n$  è vera  $\forall n \geq n_0$ .

Definizione di successione  $\nearrow$  Burocratico  
 $\searrow$  Più elastico

Burocratico: una succ. è una funzione  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Di solito invece che  $a(0), a(1), a(2), \dots$  si usa la notazione  $a_0, a_1, a_2, \dots$ .

Esempi:  $a_n = 7n + 5$  (ad ogni valore di  $n$  associa un numero reale)  
 $b_n = \sqrt{12n^3 + 61}$   
 $c_n = \frac{1}{n}$  (non è definita per  $n=0$ , dunque burocraticamente non è una succ.)

Definizione più elastica: non è nec. che sia definita per tutti gli  $n \in \mathbb{N}$ . Basta che sia definita DEFINITIVAMENTE, cioè da un certo punto in poi (le eccezioni sono QUINDI un numero finito)

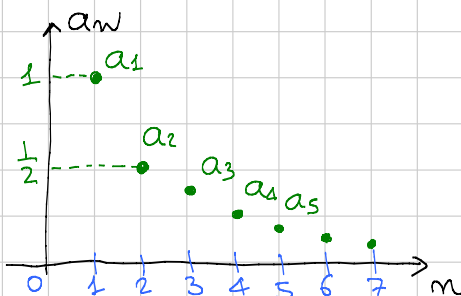
Esempi  $a_n = \frac{1}{n-8}$   $b_n = \sqrt{n-2007}$   $c_n = \log(2007-n)$   
 $\uparrow$  per  $n \geq 8$  OK  $\uparrow$  per  $n \geq 2007$  OK  $\uparrow$  NON è una successione



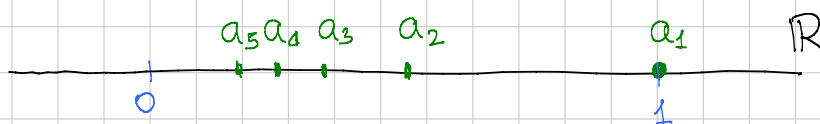
Come si può rappresentare una successione?

**1° modo**: nel piano cartesiano

$$a_n = \frac{1}{n}$$



**2° modo**: usando solo una retta



"Si può pensare ad una lampadina che si accende nel punto  $a_n$  al tempo  $t = n$ "

## LIMITI DI SUCCESSIONI

Limite = "Comportamento della successione per valori molto grandi di  $n$ "

Una successione può fare 4 cose

①  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$  ( $a_n$  tende al numero reale  $l$ )

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$$

②  $a_n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

$a_n$  tende a  $+\infty$   
 $a_n$  DIVERGE a  $+\infty$   
 il limite...

③  $a_n \rightarrow -\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$$

④  $a_n$  è INDETERMINATA,  $a_n$  NON ha limite

Come si definiscono?

Def. di ④ Nessuno dei precedenti

Def. di ② Si dice che  $a_n \rightarrow +\infty$  se

$\forall M \in \mathbb{R}$  (anche enorme)

$a_n \geq M$  DEFINITIVAMENTE

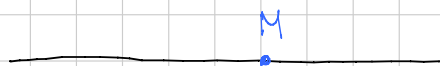
(se "spostiamo  $M$  a destra", la successione prima o poi starà al di sopra anche del nuovo  $M$ )



Def. di ③ Si dice che  $a_n \rightarrow -\infty$  se

$\forall M \in \mathbb{R}$  (anche enorm. negativo)

$a_n \leq M$  DEFINITIVAMENTE



Def. di ① Si dice che  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$  se

$\forall \varepsilon > 0$  (anche molto vicino a 0)

$l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$  DEFINITIVAMENTE

equivalente a  $|a_n - l| \leq \varepsilon$

distanza di  $a_n$  da  $l$



Varianti della def. ① Si dice che  $a_n \rightarrow l^+$  se

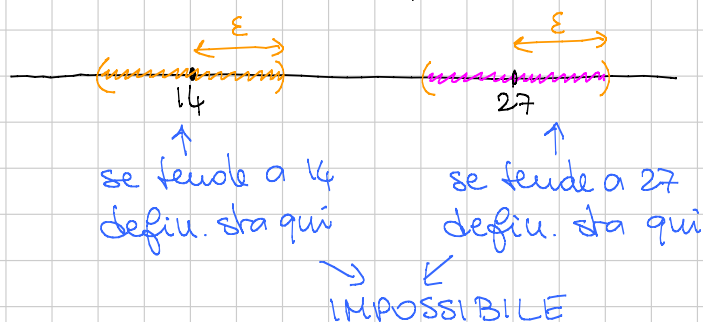
$\forall \varepsilon > 0$  si ha che  $l \overset{\text{STRETTA}}{<} a_n \leq l + \varepsilon$  definitivamente

Si dice che  $a_n \rightarrow l^-$  se

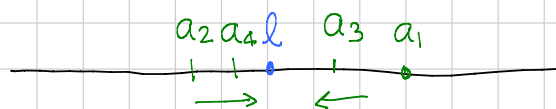
$\forall \varepsilon > 0$  si ha che  $l - \varepsilon \leq a_n \overset{\text{STRETTA}}{<} l$  definitivamente.

Osservazioni

- [1] Teorema di unicità del limite. Una succ. ha uno e uno solo dei comportamenti ①, ②, ③, ④. Se inoltre  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ , allora  $l$  è unico.  
Non può essere contemporaneamente  $a_n \rightarrow 14$ ,  $a_n \rightarrow 27$



- [2] Se  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$  è vera per forza una delle 2 seguenti?  
(i)  $a_n \rightarrow l^+$   
(ii)  $a_n \rightarrow l^-$
- NO!!



Esempio 1  $a_n = n^2$   $a_n \rightarrow +\infty$

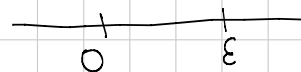
Devo dimostrare che  $\forall M \in \mathbb{R}$  si ha che  $a_n \geq M$  defiu.

$$a_n \geq M \quad ? \quad n^2 \geq M \quad \text{vera se } n \geq \sqrt{M}$$

$\uparrow$  BANALE se  $M < 0$        $\uparrow$  VERA DEFINITIV.

Esempio 2  $a_n = \frac{1}{n}$   $a_n \rightarrow 0$ , anzi  $a_n \rightarrow 0^+$

Devo dimostrare che  $\forall \varepsilon > 0$



$0 < a_n \leq \varepsilon$  defiu.

$\uparrow$  BANALE

$$a_n \leq \varepsilon \quad ? \quad \frac{1}{n} \leq \varepsilon \quad ? \quad n \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

$\uparrow$  VERA DEF

Esempio 3  $a_n = (-1)^n$   $1, -1, 1, -1, 1, -1$   
 $a_n$  NON HA LIMITE

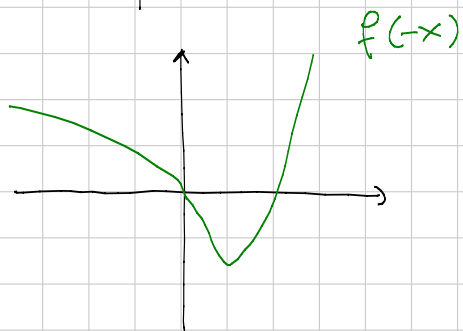
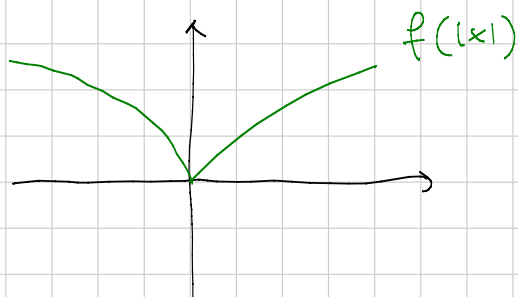
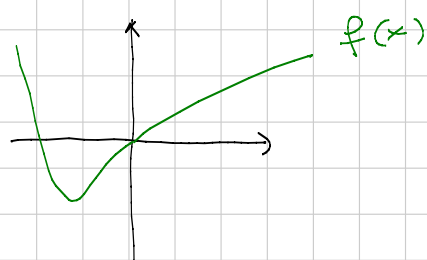
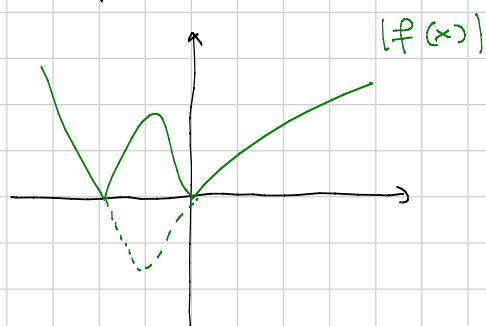
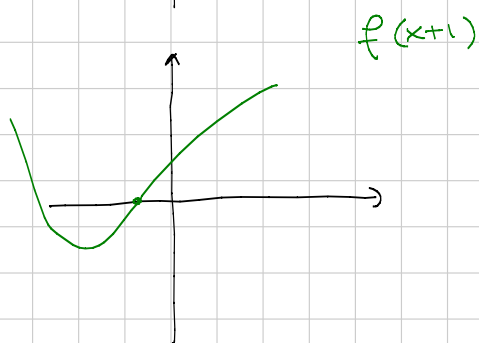
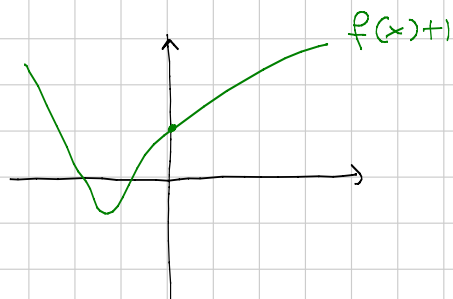
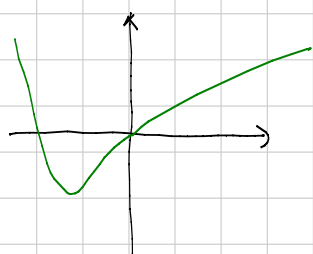
## MATEMATICA I

Titolo nota

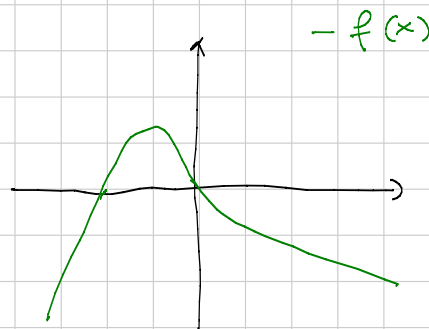
ORA 9

05/10/2007

## Operazioni sui grafici



$f(|x|)$  è una funzione PAR!  
 $f(|x|) = f(|-x|)$



$$f(x) \rightsquigarrow -f(x)$$

simmetria risp. asse  $x$ 

$$f(x) \rightsquigarrow f(-x)$$

" " "  $y$ 

$$f(x) \rightsquigarrow f(x) + a$$

traslazione in verticale

$$f(x) \rightsquigarrow f(x+a)$$

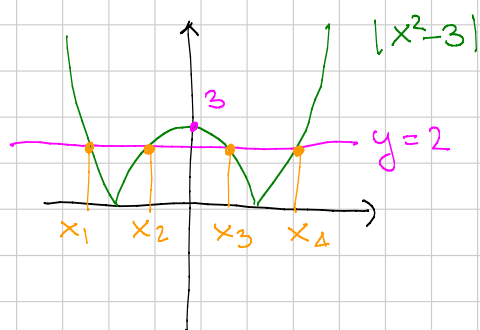
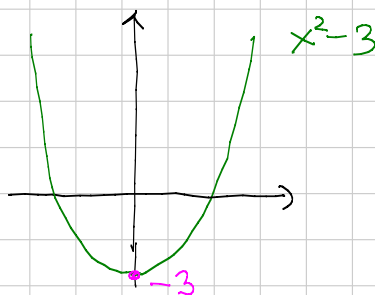
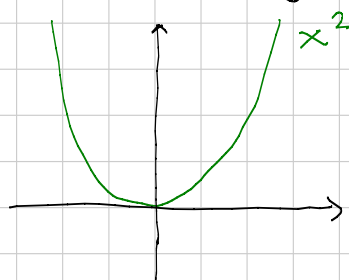
traslazione orizzontale

(a  $\leq$  se  $a > 0$ , a  $\geq$  se  $a < 0$ )

$$f(x) \rightsquigarrow |f(x)|$$

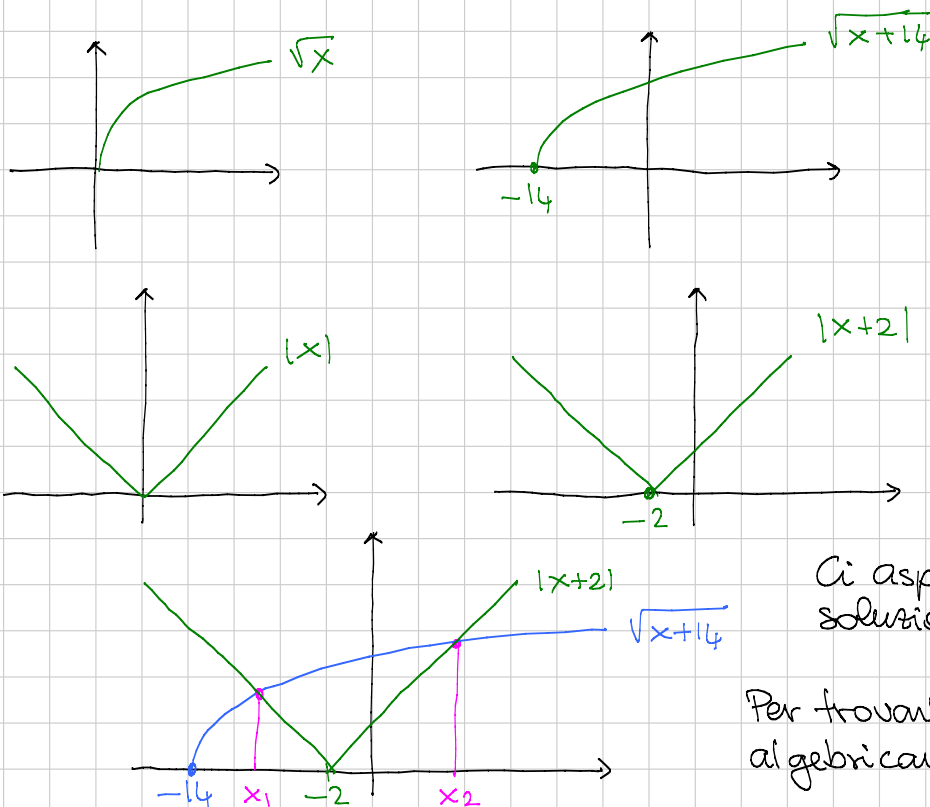
Quello che c'è nel I e II  
quadrante resta inalterato,  
il resto si ribalta

$$f(x) \rightsquigarrow f(|x|)$$

La parte con  $x > 0$  (I e IV quadr.)  
resta inalterata e  
si ribalta sugli  $x < 0$   
(diventa una funzione pari)**Esempio 1** Risolvere l'equazione  $|x^2 - 3| = 2$ Occorre disegnare il grafico di  $f(x) = |x^2 - 3|$ L'eq.  $|x^2 - 3| = 2$  ha 4 soluz.L'eq.  $|x^2 - 3| = \lambda$  ha

- 0 sol. se  $\lambda < 0$
- 2 sol. se  $\lambda = 0$
- 4 sol. se  $0 < \lambda < 3$
- 3 sol. se  $\lambda = 3$
- 2 sol. se  $\lambda > 3$

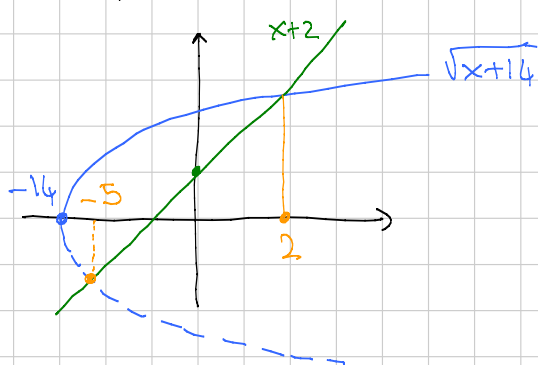
Esempio 2  $\sqrt{x+14} = |x+2|$



Ci aspettiamo 2 soluzioni

Per trovarle procedere algebricamente

Esempio 3  $\sqrt{x+14} = x+2$



Mi aspetto una soluzione, se faccio il quadrato

$$\begin{aligned} x+14 &= (x+2)^2 \\ x+14 &= x^2+4x+4 \\ x^2+3x-10 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \begin{cases} 2 \rightarrow \text{OK} \\ -5 \rightarrow \text{NO} \end{cases}$$

Trovare l'intersezione con la funzione tratteggiata equivale a risolvere

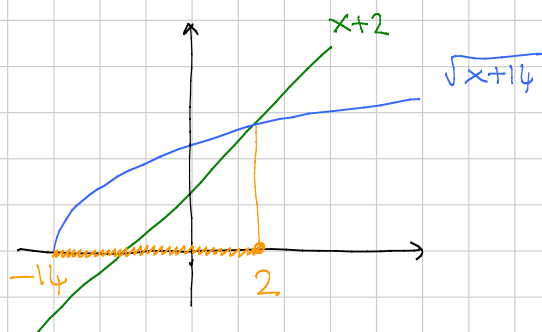
$$-\sqrt{x+14} = x+2$$

Una volta fatti i quadrati ottengo la stessa eq. di prima

Esempio 4

$$\sqrt{x+14} > x+2$$

"cercare i punti  $x$  per cui la radice sta sopra la retta"



Soluzione:  $[-14, 2)$

$$3^{x+4} = 3^{2x+5}$$

$$\leadsto x+4 = 2x+5$$

(SI)  $3^x$  è  
iniettiva

$$\log_3(x+4) = \log_3(2x+5) \leadsto x+4 = 2x+5$$

(NI)

$$\cos(x+4) = \cos(2x+5) \leadsto x+4 = 2x+5$$

(NO)  $\cos x$   
non è  
iniettiva

si può fare, ma  
occorre che  
 $x+4 > 0, 2x+5 > 0$

In generale

$$f(A) = f(B) \Rightarrow A = B$$

ma A e B devono  
stare nell'insieme  
di partenza di  $f$

SI se la funzione è iniettiva  
NO se non è iniettiva

Con le disuguaglianze:

$$f(A) > f(B) \Rightarrow A > B$$

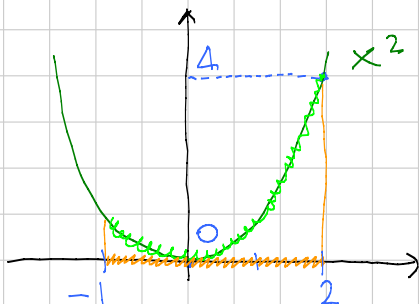
(SI) se  $f$  è strett. crescente (A e B devono stare  
nell'insieme di partenza)

(NO) altrimenti

Se  $f$  è strett. decrescente  $f(A) > f(B) \Rightarrow A < B$

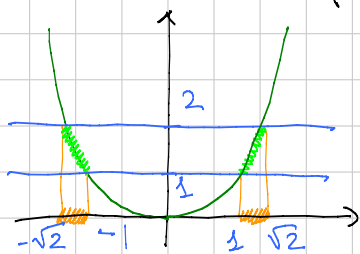
Esempio 1  $f(x) = x^2$ .

Determinare  $f([-1, 2]) =$  immagine di  $[-1, 2]$   
 $=$  insieme dei valori  
 assunti da  $f$  quando  $x$   
 varia in  $[-1, 2]$



I valori assunti sono  $[0, 4]$

Determinare  $f^{-1}([1, 2]) =$  controimmagine di  $[1, 2] =$   
 valori di  $x$  per cui  $f(x) \in [1, 2]$



$$= [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$$



## MATEMATICA I

ORA 10

Titolo nota

09/10/2007

Limiti di successioniGià visto: definizioni,  $n^2 \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  ( $\frac{1}{n} \rightarrow 0^+$ )

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty \quad \text{se } \alpha > 0$$

Esempi  $n^3 \rightarrow +\infty$   $\alpha=3$   
 $\sqrt[2007]{n} \rightarrow +\infty$   $\alpha = \frac{1}{2007}$

Bisogna dimostrare che  $\forall M \in \mathbb{R}$  si ha che  $n^\alpha \geq M$  defn.

$$n^\alpha \geq M$$

$$n \geq M^{\frac{1}{\alpha}} \leftarrow \text{CONDIZIONE VERA DEFINITIV.}$$

↑ il verso rimane perché  
 elevare ad un esponente  
 positivo è una funzione  
 stretta. crescente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0^+ \quad \text{se } \alpha < 0$$

Pongo  $\alpha = -\beta$  (se  $\alpha < 0$ , allora  $\beta > 0$ )Devo dim. che  $0 < n^\alpha < \varepsilon$  (comunque fisso  $\varepsilon > 0$ , questa deve essere vera definitiv.)

$$n^\alpha < \varepsilon ; \quad n^{-\beta} < \varepsilon ; \quad \frac{1}{n^\beta} < \varepsilon ; \quad 1 < n^\beta \cdot \varepsilon$$

$$n^\beta > \frac{1}{\varepsilon} \quad n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\beta} \leftarrow \text{CONDIZ. VERA DEFINITIVAMENTE}$$

Esempi  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$   $\alpha = -1$   $\frac{1}{n^8} \rightarrow 0$   $\alpha = -8$   $\frac{1}{\sqrt[8]{n}} \rightarrow 0$   $\alpha = -\frac{1}{8}$

Strumenti  $\rightarrow$  Teo. CONFRONTO  
 $\rightarrow$  Teo. ALGEBRICI

### Teo. di CONFRONTO (CONFRONTO a 2)

Siano  $a_n$  e  $b_n$  2 successioni tali che

$$a_n \leq b_n \text{ definitivamente}$$

Allora se  $a_n \rightarrow +\infty$ , anche  $b_n \rightarrow +\infty$   
 se  $b_n \rightarrow -\infty$ , anche  $a_n \rightarrow -\infty$

Idea se  $a_n \rightarrow +\infty$  vuol dire che, fissato  $M \in \mathbb{R}$ ,

$a_n \geq M$  definitivamente, dunque anche  $b_n \geq M$  definitivamente.

il che basta per concludere che  $b_n \rightarrow +\infty$

### Teo. dei CARABINIERI (o CONFRONTO a 3)

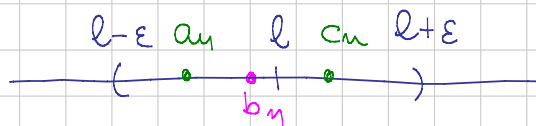
Siano  $a_n, b_n, c_n$  3 successioni tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \text{ definitivamente}$$

Supponiamo che  $\left. \begin{array}{l} a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \\ c_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$  stesso  $l$

Allora  $b_n \rightarrow l$  (stesso  $l$ )

Idea



Definitivamente  $a_n$  sta in  $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$  } per forza anche  
 "  $c_n$  " " }  $b_n$  sta in  $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$

TEO. ALGEBRICIRetta reale estesa

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

$$a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}} \quad (\text{è come dire } a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \text{ oppure } a_n \rightarrow +\infty \text{ oppure } a_n \rightarrow -\infty)$$

Le operazioni classiche (somma, prodotto, divisione, ...) si estendono **CON ALCUNE CAUTELE** alla retta estesa

$$16 + (+\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$-7 \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$12 - (+\infty) = -\infty$$

$$\frac{12}{+\infty} = 0^{(+)}$$

$$\frac{12}{-\infty} = 0^{(-)}$$

$$(+\infty) - (+\infty) = ?$$

$$\frac{0}{\pm\infty} = 0$$

$$0 \cdot (+\infty) = ?$$

Teoremi algebrici

Siano  $a_n$  e  $b_n$  2 successioni.  
Supponiamo che

$$a_n \rightarrow l_1 \in \bar{\mathbb{R}}$$

$$b_n \rightarrow l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$$

Allora

Somma

$$a_n + b_n \rightarrow l_1 + l_2 \quad \text{tranne nei casi } \boxed{+\infty - \infty}$$

Prodotto

$$a_n \cdot b_n \rightarrow l_1 \cdot l_2 \quad \text{tranne nei casi } \boxed{0 \cdot (\pm\infty)}$$

Quoziente

Supponendo  $b_n \neq 0$  definitivamente, possiamo scrivere  $\frac{a_n}{b_n}$ . Allora

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{l_1}{l_2}$$

$$\text{tranne (i) i casi } \boxed{\frac{0}{0}} \text{ e } \boxed{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}$$

(ii) i casi in cui  $l_2 = 0$  (qui è una questione di segno)

Esponeutiale Supponendo  $a_n > 0$  definitivamente, posso scrivere  $a_n^{b_n}$ . Allora

$$a_n^{b_n} \rightarrow l_1^{l_2} \quad \text{tranne nei casi } \boxed{0^0}, \boxed{1^{\pm\infty}}, \boxed{(\pm\infty)^0}$$

— 0 — 0 —

Cosa vuol dire che  $+\infty - \infty$  è una forma indeterminata?

Se io ho una successione  $a_n \rightarrow +\infty$  e una succ.  $b_n \rightarrow -\infty$  allora il comportamento di

$a_n + b_n$   
non è prevedibile sapendo unicamente i limiti di  $a_n$  e  $b_n$ ,  
 $a_n + b_n$  può avere 4 tipi di comportamento, a seconda di come sono fatte  $a_n$  e  $b_n$ .

Esempio 1  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{n^2}_{+\infty} - \underbrace{n}_{-\infty}$

FORMA INDETERMINATA

(con il teorema della somma non possiamo dire nulla)

$$n^2 - n = n(n-1) \rightarrow +\infty$$

$\downarrow \quad \downarrow$   
 $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

per il teo. del prodotto.

Esempio 2  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\sqrt{n}}_{+\infty} - \underbrace{n^2}_{-\infty}$

il teo della somma non permette di concludere

$$\sqrt{n} - n^2 = \sqrt{n} \left( 1 - \frac{n^2}{\sqrt{n}} \right) = \underbrace{\sqrt{n}}_{+\infty} \underbrace{\left( 1 - n^{3/2} \right)}_{(-\infty)} \rightarrow -\infty$$

Esempio 3

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 12 \sin n)$$

ho usato che  $\sin n \leq 1$

$$n^2 - 12 \sin n$$

$$\geq n^2 - 12$$

$\searrow$

$+\infty$

(per confronto a 2)

$\searrow$

$+\infty$  (per tabellina + teo. algebrici)

Esempio 4

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^4 - n^3 \cos(n^2 + 27))$$

$$n^4 - n^3 \cos(n^2 + 27)$$

$$\geq n^4 - n^3 = n^3(n-1)$$

$\searrow$   
 $+\infty$

per confronto  
a 2.

$\searrow$

$+\infty$  (teo alg)

## MATEMATICA I

ORA II

Titolo nota

09/10/2007

Esempio 1  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

Perché?

$$-1 \leq \sin n \leq 1$$

Ovvio

Divido per  $n$  (e consenso  
iversi perché  $n > 0$ )

$$\boxed{-\frac{1}{n}} \leq \boxed{\frac{\sin n}{n}} \leq \boxed{\frac{1}{n}}$$

(teo. algebrico)  $\rightarrow$  (tabellina)  $\rightarrow$  (CARABINIERI)

Esempio 2  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n^2 + \sin n^3)}{\sqrt{n}} = 0$  (stesso motivo)

$$-1 \leq \cos(\text{Mostro}) \leq 1 \quad \text{divido per } n \dots$$

$$\boxed{-\frac{1}{n}} \leq \boxed{\frac{\cos(\text{Mostro})}{n}} \leq \boxed{\frac{1}{n}}$$

$\rightarrow$   $\rightarrow$   $\rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$$

Per dimostrarlo, si può o usare la definizione (farlo per esercizio)  
oppure la disug.  $2^n \geq n$   
dimostrata per induzione a suo tempo

$$\boxed{2^n} \geq \boxed{n}$$

$\rightarrow$   $\rightarrow$   $\rightarrow$

$+\infty$  (congruito a 2)  $\rightarrow$   $+\infty$  (tabellina)

Più in generale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 \leq a < 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \end{cases}$$

DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLISia  $x > -1$ . Allora  $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Dim. per induzione. Passo base  $n=0$   $(1+x)^0 \geq 1$  ok.Passo induttivo Hp  $(1+x)^n \geq 1+nx$ Tesi  $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ 

uso Hp

Dim. passo induttivo  $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq$ 

$$\geq (1+x)(1+nx) = 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x + nx^2$$

trascurio  
 $nx^2 \geq 0$ 

$$\rightarrow \geq 1+(n+1)x \quad \text{TESI}$$

Nel passaggio

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$$

ho preso l'Hp  $(1+x)^n \geq 1+nx$  e ho moltiplicato a dx e sx per  $(1+x)$  consentendo i versi.Questo si può fare solo se  $1+x > 0$ , cioè  $x > -1$ .Dalla disug. segue che se  $a > 1$  posso scriverlo come

$$a^n = (1+(a-1))^n \geq 1+n(a-1)$$

comparato  
a 2.  
+∞disug. con  
 $x = a-1$ se  $a > 1$  questo  
tende a +∞

Esempio 3

$$\frac{n^3 + 2}{3n^3 + 4n^2 + 5} = \frac{\cancel{n^3} \left( 1 + \frac{2}{n^3} \right)}{\cancel{n^3} \left( 3 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^3} \right)} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Esempio 4

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + \cos(n^4)}{n^4 + \cos(n^3)}$$

$$\frac{n^3 + \cos(n^4)}{n^4 + \cos(n^3)} = \frac{\cancel{n^3} \left( 1 + \frac{\cos(n^4)}{n^3} \right)}{n^4 \left( 1 + \frac{\cos(n^3)}{n^4} \right)} \rightarrow \frac{1}{\infty \cdot 1} \rightarrow 0$$

$$\frac{\cos(n^4)}{n^3} \rightarrow 0 \text{ perché } -\frac{1}{n^3} \leq \frac{\cos(n^4)}{n^3} \leq \frac{1}{n^3} \text{ come in esempio prec.}$$

$$\frac{\cos(n^3)}{n^4} \rightarrow 0 \text{ stesso motivo}$$

Esempio 5

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{n} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n} - \sqrt[4]{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{4}}} = -\infty$$

$$\frac{n^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{4}}} = \frac{n^{\frac{1}{2}} \left( n^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} - 1 \right)}{n^{\frac{1}{3}} \left( 1 - n^{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}} \right)} = \frac{n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} \left( n^{-\frac{1}{6}} - 1 \right)}{1 - n^{-\frac{1}{12}}}$$

$\downarrow +\infty$        $\downarrow -1$

Esempio 6  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$  ( $= +\infty - \infty$ )

$$\sqrt{n^2 + n} - n = \frac{\overset{A}{\sqrt{n^2 + n}} - \overset{B}{n}}{\overset{A}{\sqrt{n^2 + n}} + \overset{B}{n}} = \frac{\overset{A^2 - B^2}{n^2 + n - n^2}}{\sqrt{n^2 + n} + n}$$



$$= \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n}{n \left( \frac{\sqrt{n^2+n}}{n} + 1 \right)} = \frac{\cancel{n} \cdot 1}{\cancel{n} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)} \rightarrow \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

## SUCCESSIONI MONOTONE

|                    |                            |               |                |                    |
|--------------------|----------------------------|---------------|----------------|--------------------|
| $a_{n+1} \geq a_n$ | $\forall n \in \mathbb{N}$ | deb. cresc.   | $a_m \geq a_n$ | $\forall m \geq n$ |
| $a_{n+1} > a_n$    | $\forall n \in \mathbb{N}$ | strett. "     | $a_m > a_n$    | $\forall m \geq n$ |
| $a_{n+1} \leq a_n$ | $\forall n \in \mathbb{N}$ | deb. decr.    |                |                    |
| $a_{n+1} < a_n$    | $\forall n \in \mathbb{N}$ | strett. decr. |                |                    |

**TEOREMA** Sia  $a_n$  debolm. cresc. Allora ci sono solo 2 possibilità

- ①  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
  - ②  $a_n \rightarrow +\infty$
- In entrambe i casi il limite è l'estremo superiore della successione.

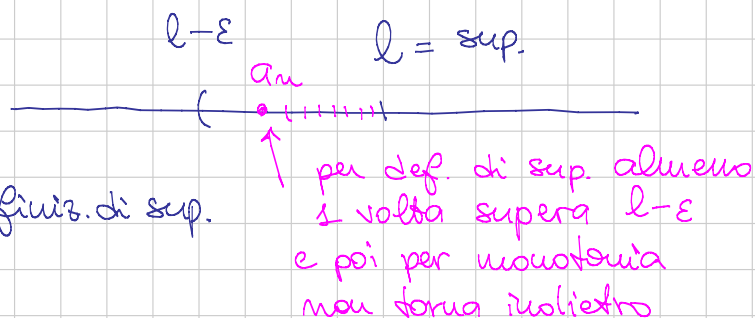
**Dim caso ②**  $\sup$  della succ.  $= +\infty$

Questo vuol dire che  $\forall M \in \mathbb{R}$  esiste un elemento della successione  $\geq M$ , cioè  $\exists n$  b.c.  $a_n \geq M$

Essendo  $a_n$  monotona, una volta che ha passato  $M$  non torua indietro, dunque

$a_n \geq M$  definitivamente e questo serve per avere  $\lim a_n = +\infty$ .

**Disegno caso ①**



$a_n \leq l$  sempre per definiz. di sup.

## MATEMATICA I

ORA 12

Titolo nota

09/10/2007

CRITERI  $\begin{matrix} \nearrow \text{RAPPORTO} \\ \nearrow \text{RADICE} \\ \searrow \text{RAPPORTO} \rightarrow \text{RADICE} \end{matrix}$

CONFRONTI DI ORDINE DI INFINITO

## CRITERIO DELLA RADICE

Sia  $a_n$  una successione,  
con  $a_n \geq 0$  definitivamente.

Supponiamo che

$$\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Allora:

- se  $l > 1$  si ha che  $a_n \rightarrow +\infty$
- se  $0 \leq l < 1$  si ha che  $a_n \rightarrow 0$
- se  $l = 1$ , allora BOH (non si può dedurre nulla)

## CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia  $a_n$  una succ. con  
 $a_n > 0$  definitivamente.

Supponiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Allora stessa conclusione del criterio precedente.

Utilizzo operativo di radice e/o rapporto:  
abbiamo una succ.  $a_n$  di cui dobbiamo calcolare il limite.  
Proviamo allora a calcolare uno dei seguenti 2 limiti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Se uno almeno di questi 2 limiti esiste ed è  $\neq 1$ ,  
allora possiamo dedurre il limite di  $a_n$ .

**CRITERIO RAPPORTO  $\rightarrow$  RADICE**

Sia  $a_n$  una succ. con  $a_n > 0$  definitivamente.

Supponiamo che  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Allora  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$  (stesso  $l$ )

Esempio 1  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$

$a_n = \frac{n^2}{2^n}$  Provo ad usare il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} \rightarrow \frac{1}{2} = l$$

$l < 1$  DUNQUE  $a_n \rightarrow 0$

Più in generale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{\beta^n} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{per ogni } \alpha > 0 \\ \text{per ogni } \beta > 1 \end{array}$$

ESPOENZIALE  
BATTE  
LE POTENZE

**FATTORIALE**

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

FATTORIALE  
DI  $n$

(prodotto di tutti gli  
interi da 1 fino ad  $n$ )  
(per convenzione  $0! = 1$ )

$$\begin{array}{llll} 0! = 1 & 1! = 1, & 2! = 1 \cdot 2 = 2, & 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \\ 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, & 5! = 120, & 6! = 720, & 7! = 5040 \end{array}$$

Formula ricorsiva

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

$$(n+1)! = (n+1) \cdot \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$$

$$\boxed{n!} \geq \boxed{n} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ +\infty \end{array}$$

Esempio 2  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{200^n}$   $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$

Criterio del rapporto  $a_n = \frac{n!}{200^n}$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{(n+1)!}{200^{n+1}}}{\frac{n!}{200^n}} = \frac{(n+1)!}{200^{n+1}} \cdot \frac{200^n}{n!} \\ &= \frac{(n+1)\cancel{n!}}{200 \cdot \cancel{200^n}} \cdot \frac{\cancel{200^n}}{\cancel{n!}} = \frac{n+1}{200} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Quindi  $l = +\infty > 1$ , e pertanto  $a_n \rightarrow +\infty$

In generale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty \text{ per ogni } a > 0$$

ESPOENZ.  
PERDE  
DAL  
FATTORIALE

### IL NUMERO $e$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182\dots$$

Dai teoremi algebrici è una forma del tipo  $1^{+\infty}$ , dunque indeterminata.

SI PUÒ DIMOSTRARE che la successione  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  è STRETT. CRESCENTE e  $a_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Da questi 2 fatti segue che  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ .  
Tale limite si indica con la lettera  $e$ .

— o — o —

### Esempio 3

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$$

$$a_n = \frac{n^n}{n!} \quad \text{Criterio del rapporto}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\ &= \frac{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n} \\ &= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e = 2,7... \quad \boxed{> 1} \\ &\quad \text{Quindi } a_n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Esempio 4  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{n^n} \cdot n^n}{\cancel{n^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^n = +\infty$

Esempio 5  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(1,01)^{n^2}} = 0$

$$a_n = \frac{n^n}{(1,01)^{n^2}} \quad \text{Applico criterio della radice}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{(1,01)^{n^2}}} = \frac{n}{(1,01)^n} \rightarrow 0 \quad (\text{esponenziale contro potenza})$$

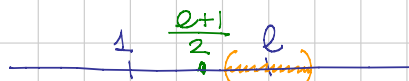
$$\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l < 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

## MATEMATICA I

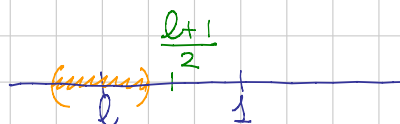
ORA 13

Titolo nota

09/10/2007

Dim. criterio della radice**1° caso** Ipotesi:  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l > 1$  Tesi:  $a_n \rightarrow +\infty$ Se  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$ , allora $\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{l+1}{2}$  definitivamente. Elevando alla  $n$ :

$a_n \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$   
 $\downarrow$   
 $+\infty$  perché esponenziale  
 con base  $> 1$   
 per confronto a 2

**2° caso** Ipotesi:  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l < 1$  Tesi:  $a_n \rightarrow 0$ Se  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$ , allora  
definitivamente $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}$  elevando alla potenza  $n$ :

per ipotesi

$0 \leq a_n \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$   
 $\downarrow$   
 $0$   $0$   $0$  (esponenziale con base  $< 1$ )

CARABINIERI

Nota bene Se  $a_n \leq b_n$  definitivamente e  $b_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ .  
 Cosa posso dire di  $a_n$ ? Può

- ①  $a_n \rightarrow -\infty$     ②  $a_n \rightarrow l_1$  con  $l_1 \leq l$     ③ non avere limite

Altro trucco notevole

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2} = 1$$

Analogamente

$$\sqrt[n]{a} \rightarrow 1 \text{ per ogni } a > 0$$

Dim ABUSIVA

$$\sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}} \rightarrow 2^0 = 1$$

Dim VERA

Disuguaglianza di BERNOULLI

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{pongo } x = \frac{1}{n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1+1=2 \quad \text{Faccio la radice n-esima}$$

$$1 + \frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{2} \geq 1$$

segue dal fatto che  $\sqrt[n]{2} \geq \sqrt[n]{1} = 1$ Esempio 1

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}$$

Abusivo

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} \rightarrow \infty^0 \quad \text{FORMA INDETERMINATA}$$

Rapporto  $\rightarrow$  Radice (se  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l$ , allora  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$  stesso)Uso il criterio con  $a_n =$  "ciò che sta sotto la radice n-esima"  $= n$ 

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1 \quad \text{Quindi}$$

$$\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1 \quad \text{che è come dire } \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$$

$$\text{Esempio 2} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2+5}$$

Chiamo  $a_n = n^2+5$  e uso rapporto  $\rightarrow$  radice

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 + 5}{n^2 + 5} = \frac{n^2 + 2n + 6}{n^2 + 5} = \frac{\cancel{n^2} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2}\right)}{\cancel{n^2} \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)} \rightarrow 1$$

stesso limite

Quindi  $\sqrt[n]{n^2 + 5} = \sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$

In alternativa

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n^2 + 5} &= \sqrt[n]{n^2 \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)} = \sqrt[n]{n^2} \sqrt[n]{1 + \frac{5}{n^2}} \\ &= \left[\sqrt[n]{n}\right]^2 \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ &\quad 1^2 \quad \cdot \quad 1^0 = 1 \end{aligned}$$

In generale

$$\sqrt[n]{\text{polinomio}} \rightarrow 1$$

Esempio 3

$$\sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$$

Potrei  $a_n = n!$  e uso Rapporto  $\rightarrow$  Radice

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = n+1 \rightarrow +\infty$$

Se  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow +\infty$ , anche  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow +\infty$ , dunque  $\sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$

Esempio 4  $\sqrt[n]{2^n + 3^n + n^4}$

Stabilito che  $3^n$  sembra il termine + forte, allora lo raccogliamo



$$\begin{aligned}
 \sqrt[n]{2^n + 3^n + n^4} &= \sqrt[n]{3^n \left( \frac{2^n}{3^n} + 1 + \frac{n^4}{3^n} \right)} \\
 &= \sqrt[n]{3^n} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 + \frac{n^4}{3^n}} \\
 &= 3 \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 + \frac{n^4}{3^n} \right]^{\frac{1}{n}} \\
 &\quad \begin{array}{l} \text{esponenziale} \\ \text{con base } < 1 \end{array} \downarrow 0 \quad \quad \quad \downarrow 0 \quad \begin{array}{l} \text{potenza contro} \\ \text{esponenziale} \end{array} \\
 &\rightarrow 3 \cdot [1]^0 = 3
 \end{aligned}$$

Esempio 5

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e} \quad \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

Applico rapporto  $\rightarrow$  radice con  
 $a_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\begin{aligned}
 \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \\
 &= \frac{\cancel{(n+1)} \cancel{n!}}{\cancel{(n+1)} (n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} \\
 &= \frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e}
 \end{aligned}$$

Poiché  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{1}{e}$ , anche  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \frac{1}{e}$

Radice  $\rightarrow$  Rapporto? Supponiamo  $a_n > 0$  e supponiamo

$\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Cosa può fare  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ? Non può tendere ad un limite diverso da  $l$ . Quindi

- ① tende a  $l$       ② non ha limite

## MATEMATICA I

ORA 14

Titolo nota

10/10/2007

## Limiti di Funzioni - Definizioni

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

↑ molte cose funzionano anche se l'insieme di partenza è un sottoinsieme  $A \subseteq \mathbb{R}$

Sia  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$   $\begin{matrix} x_0 \nearrow \in \mathbb{R} \\ \rightarrow +\infty \\ \rightarrow -\infty \end{matrix}$   $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Se  $x_0 \in \mathbb{R}$  avremo  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$   $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$   
 ↑ ↑  
 limite da destra limite da sinistra

1° caso  $x_0 = +\infty$  (Caso + simile alle successioni)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ +\infty & \textcircled{2} \\ -\infty & \textcircled{3} \\ \text{NON ESISTERE} & \textcircled{4} \end{cases}$$

Nessuno dei prec.

Def. ② Si dice che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  se

$\forall M \in \mathbb{R}$  (anche enorme)

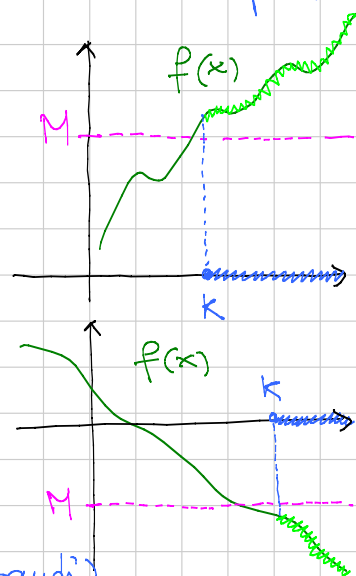
$$\exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x) \geq M \quad \forall x \geq k$$

Def. ③ Si dice che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  se

$\forall M \in \mathbb{R}$  (anche enorm. negativo)

$$\exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x) \leq M \quad \forall x \geq k$$

(se un certo  $k$  va bene, vanno bene tutti i  $k$  + grandi)



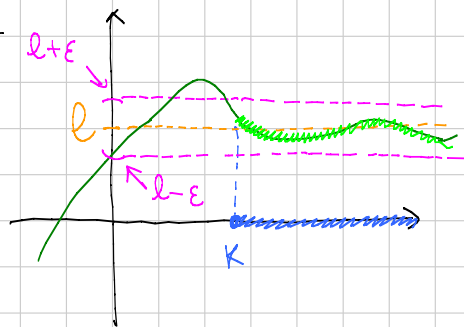
Def. ① Si dice  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$  se

$\forall \varepsilon > 0$  (anche molto vicino a zero)

$\exists k \in \mathbb{R}$  b.c.  $l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon$

$\forall x \geq k$

↓ il grafico, per  $x \geq k$ , sta nella striscia compresa tra  $l - \varepsilon$  ed  $l + \varepsilon$



Varianti di ①:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l^+$

$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$  b.c.  $l \leq f(x) \leq l + \varepsilon$



$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l^-$

$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$  b.c.  $l - \varepsilon \leq f(x) < l \quad \forall x \geq k$



2° Caso  $x_0 = -\infty$

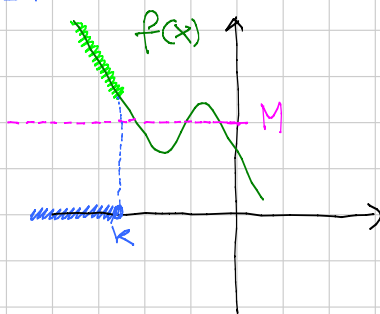
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ +\infty & \textcircled{2} \\ -\infty & \textcircled{3} \\ \text{Non esiste} & \textcircled{4} \end{cases}$

NDP

Def. di ② Si dice che  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  se

$\forall M \in \mathbb{R}$  (anche enorme)

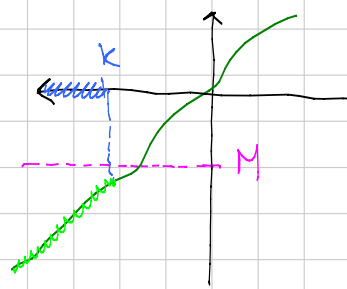
$\exists k \in \mathbb{R}$  b.c.  $f(x) \geq M \quad \forall x \leq k$



Def. di ③ Si dice che  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  se

$\forall M \in \mathbb{R}$  (anche molto negativo)

$\exists k \in \mathbb{R}$  b.c.  $f(x) \leq M \quad \forall x \leq k$



Def. ① Si dice che  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$  se

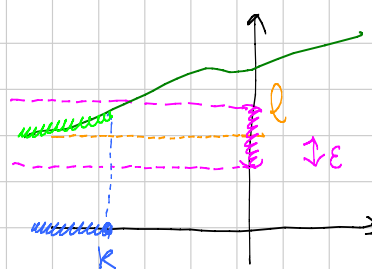
$\forall \varepsilon > 0$  (anche vicinissimo a 0)

$\exists k \in \mathbb{R}$  t.c.  $l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \leq k$

$$\downarrow$$

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon$$

(altro modo di scrivere  
la stessa cosa)



Analogamente a prima si definiscono

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l^-$$

3° caso  $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ +\infty & \textcircled{2} \\ -\infty & \textcircled{3} \\ \text{Non esiste} & \textcircled{4} \text{ NDP} \end{cases}$$

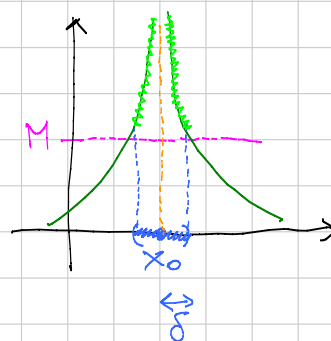
Def. di ② Si dice che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  se

$\forall M \in \mathbb{R}$  (anche enorme)

$\exists \delta > 0$  t.c.  $f(x) \geq M$

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$

intorno di  $x_0$  di ampiezza  
 $\delta$  meno il punto  $x_0$



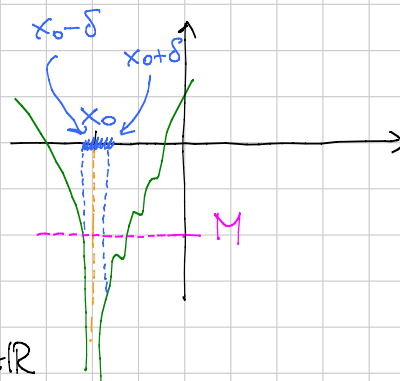
Il limite non considera quello che accade per  $x = x_0$

Def. di ③ Si dice che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  se

$\forall M \in \mathbb{R}$  (anche molto negativo)

$\exists \delta > 0$  t.c.  $f(x) \leq M$

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$



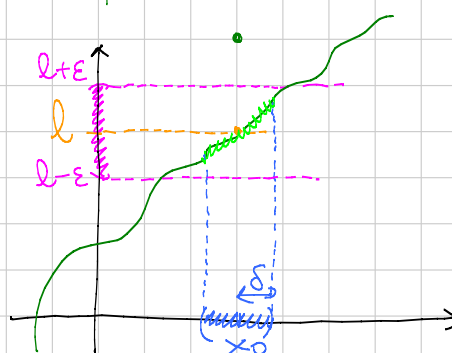
Def. di ① Si dice che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

se

$\forall \varepsilon > 0$  (anche molto vicino a 0)

$\exists \delta > 0$  t.c.  $l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon$

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$



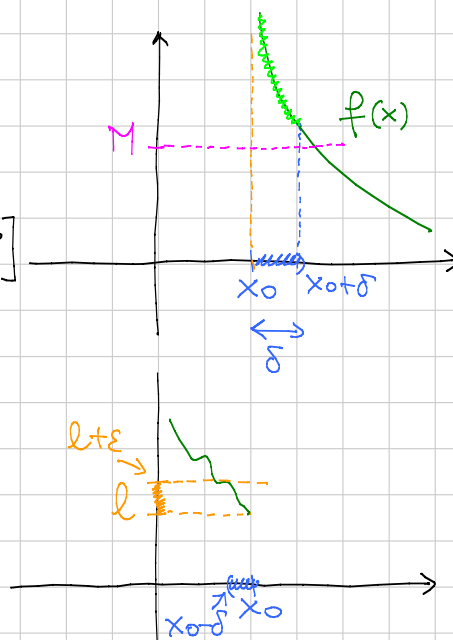
NON IMPORTA QUANTO VALE  $f(x_0)$

## MATEMATICA I

ORA 15

Titolo nota

10/10/2007

Varianti della def. di limite  $x \rightarrow x_0^+$   $x \rightarrow x_0^-$ Si dice che  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$  se $\forall M \in \mathbb{R}$  (anche enorme) $\exists \delta > 0$  t.c.  $f(x) \geq M \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta]$ Si dice che  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l^+$  se $\forall \varepsilon > 0$  (anche vicinissimo a 0) $\exists \delta > 0$  t.c.  $l \leq f(x) \leq l + \varepsilon$  $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0)$ 

Strumenti per il calcolo dei limiti di funzione

① Teo. di confronto (a 2 e a 3): esattamente come per le succ.② Teo. algebrici: come nelle successioni con la solita cautela per le forme indeeterminate $+\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \pm\infty$ ,  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ,  $0^0$ ,  $1^{\pm\infty}$ ,  $(\pm\infty)^0$ 

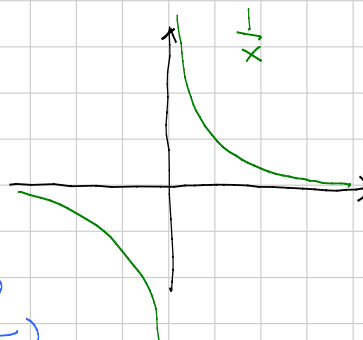
e la cautela sui segni quando il denomin. tende a zero

Esempio  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  NON ESISTE

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$\searrow$  basta per dire  
 che il limite a 0  
 (senza + e senza -)  
 non esiste



### ③ Utilizzo della continuità

Def. Una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice continua in un p.to  $x_0 \in \mathbb{R}$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

*cioè se il valore in  $x_0$  coincide con il limite.*

"Teorema" Tutte le funzioni ottenute a partire dalle funzioni elementari (cioè quelle presentate a suo tempo) mediante operazioni algebriche e/o composizione sono continue dove sono definite (al di fuori dei problemi BUROCRATICI: denominatori che si annullano, log di roba  $\leq 0$ , ...)

Esempio

$\lim_{x \rightarrow 0}$

$$\frac{2^{\cos(\sin x^2)} - x \arctan(x+3^x)}{x^6 + 5 \cos x} = \frac{2}{5}$$

$f(x)$

La funzione  $f(x)$  NON ha problemi in  $x=0$   
(il denominatore è 5 per  $x=0$ )  
Quindi  $f(x)$  è continua in  $x=0$ , QUINDI

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

*(fare il limite per  $x \rightarrow 0$  è come sostituire  $x=0$  nella funzione)*

Sostituendo  $f(0) = \frac{2}{5}$ .

④ Limiti notevoli: alcuni limiti che si dimostrano una volta e tutte e poi si possono utilizzare

⑤ Cambio di variabile

# LIMITI NOTEVOLI

**PADRI**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

**FIGLI**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

[Nota bene:  $\log x$  (indicato anche con  $\ln x$ ) indica  $\log_e x$ ]

**NIPOTI**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$

Esercizio 1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$  Non esiste

$\cos x$  è una funzione continua

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} = +\infty$   $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x \downarrow = \cos 0 = 1$

$= \left[ \frac{1}{0^+} \right] = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{x} = \left[ \frac{1}{0^-} \right] = -\infty$



Quindi  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$  non esiste

Esercizio 2  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$  Motivo  $-1 \leq \cos x \leq 1$

Divido per  $x$

$-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$  carabinieri



Esercizio 3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(3^x + x^8 - \sin^2 x)}{x + 3 \cos x} = 0$$

Motivo:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arctan(\text{Mostro}) \leq \frac{\pi}{2}$$

Per valori grandi di  $x$  il denominatore è  $> 0$ , quindi posso dividere per  $x$  conservando i versi

$$\boxed{-\frac{\pi}{2} \frac{1}{x+3\cos x}} \leq \boxed{\frac{\arctan(\text{Mostro})}{x+3\cos x}} \leq \boxed{\frac{\pi}{2} \frac{1}{x+3\cos x}}$$

$\downarrow 0$ 
 $\downarrow \text{carab.}$ 
 $\downarrow 0$

$$\boxed{x+3\cos x} \geq \boxed{x-72}$$

$\downarrow +\infty$ 
 $\downarrow +\infty$

congruito  
a 2

## MATEMATICA I

Titolo nota

ORA 16

10/10/2007

Esempio 1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 = 1^2 = 1$

↓  
1 per limite notevole

Esempio 2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \frac{1}{2}$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \rightarrow \frac{1}{2}$$

FATTO  
PRIMA↓  
1↓  
 $\frac{1}{2}$ Basta sostituire  
 $x \rightarrow 0$ 

Esempio 3  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = 2$

$$\frac{\sin(2x)}{x} = \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{2x}{x} = 2$$

se io pongo  $y = 2x$ Quando  $x$  tende a 0  
anche  $y \rightarrow 0$ 

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Esempio 4  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = 1$

Pongo  $x^2 = y$  Quando  $x \rightarrow 0$ , ho che  $y \rightarrow 0$ 

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Esempio 5  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 0$

$-1 \leq \sin(x^2) \leq 1$  divido per  $x^2$

$$\boxed{-\frac{1}{x^2}} \leq \boxed{\frac{\sin(x^2)}{x^2}} \leq \boxed{\frac{1}{x^2}}$$

$\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$   
 0                                      0                                      0

Esempio 6  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \frac{1}{4} \sin 4$

In  $x = 2$  non  
c'è nessun  
problema, dunque  
basta sostituire!!!

Esempio 7  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \boxed{\frac{\sin x}{x}} \cdot \boxed{\frac{1}{\cos x}} \rightarrow 1$$

limite  
molto  
facile

$\downarrow$   
1

$\downarrow$   
1

← Posso sostituire  
 $x = 0$

Esempio 8  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{\sin^2 x} = 1$

$$\frac{\sin(x^2)}{\sin^2 x} = \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} = \boxed{\frac{\sin(x^2)}{x^2}} \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \rightarrow 1$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 1                      1<sup>2</sup>

Esempio 9  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{x} = 5$

$$\frac{e^{5x} - 1}{x} = \boxed{\frac{e^{5x} - 1}{5x}} \cdot \boxed{5} \rightarrow 5$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 1                      5

Esempio 10  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = 1$

$$\frac{e^x - 1}{\sin x} = \boxed{\frac{e^x - 1}{x}} \cdot \boxed{\frac{x}{\sin x}} \rightarrow 1 \cdot 1 = 1$$

Esempio 11  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = 1$

$$\frac{e^{\sin x} - 1}{x} = \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 1                      1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

Pongo  $y = \sin x$

Quando  $x \rightarrow 0$   
ho che  $y \rightarrow 0$

Esempio 12  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x} = \sin 1$

Basta sostituire  
 $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sin y}{y} = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1$$

Pongo  $y = \cos x$

Quando  $x \rightarrow 0$ ,  
ho che  $y \rightarrow 1 = \cos 0$

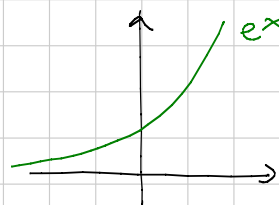
Esempio 13  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \left[ \frac{+\infty}{+\infty} \right]$

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = +\infty$$

esponenz.  
contro potenza  
 $+\infty$

Esempio 14

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \left[ \frac{0-1}{-\infty} \right] = \frac{-1}{-\infty} = 0^+$$



Esempio 15  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{3x^3 - 5x} = \frac{1}{3} \quad \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$

$$\frac{x^3 + 2x^2}{3x^3 - 5x} = \frac{\cancel{x^3} \left( 1 + \frac{2}{x} \right)}{\cancel{x^3} \left( 3 - \frac{5}{x^2} \right)} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Esempio 16  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2}{3x^3 - 5x} \quad \left[ \frac{0}{0} \right]$

posso sostituire  
 $x=0$

$$\frac{x^3 + 2x^2}{3x^3 - 5x} = \frac{\cancel{x^2} (x+2)}{\cancel{x} (3x^2 - 5)} = x \frac{x+2}{3x^2 - 5} \xrightarrow{\downarrow} 0$$

"MORALE": a  $+\infty$  comandano le potenze con esponente + grande, a 0 le potenze con esponente + piccolo

Esempio 17  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{3x^2 - 5x} = -\infty$

(a  $-\infty$  contano le pot. + grandi: raccogliere  $x^3$ )

# MATEMATICA I

ORA 17

Titolo nota

11/10/2007

## Dimostrazione limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \left(\text{questo si potrebbe dedurre dall'analogo sulle successioni}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad \text{DISUGUAGLIANZA: per ogni } x \in (0, \frac{\pi}{2}) \text{ si ha}$$

$$\sin x \leq x \leq \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Divido per  $\sin x$  (che è positivo tra  $0$  e  $\frac{\pi}{2}$ )

$$\boxed{1} \leq \boxed{\frac{x}{\sin x}} \leq \boxed{\frac{1}{\cos x}}$$

$\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   
 $1$   $\frac{1}{\cos 0} = 1$   
*carabinieri*

Abbiamo dimostrato che, dando la disug. per buona, si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\uparrow$   
 abbiamo lavorato in  $(0, \frac{\pi}{2})$

Osserviamo che la funzione  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  è PARI in quanto

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$$

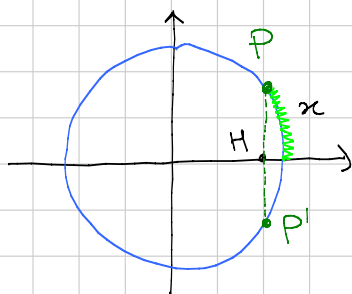
e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Fatto generale: se  $f(x)$  è PARI, allora  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

Resta da dim. ①  $\sin x \leq x$  ②  $x \leq \tan x$   
per  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Dim. ①



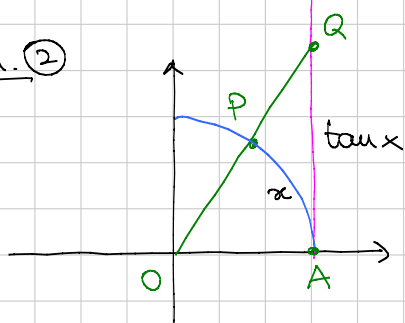
$$\text{arco } \widehat{PP'} = 2x$$

$$\text{segmento } PP' = 2PH = 2\sin x$$

$$\text{segmento } PP' \leq \text{arco } \widehat{PP'}$$

$$2\sin x \leq 2x$$

Dim. ②



$$\text{Area settore OPA} : \text{Area cerchio} = x : 2\pi$$

$$\text{Area settore} = \frac{x \cdot \pi}{2\pi} = \frac{x}{2}$$

$$\text{Area triangolo OAQ} = \frac{1}{2} OA \cdot AQ = \frac{\tan x}{2}$$

$$\text{Area settore} \leq \text{Area triangolo} \Rightarrow \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$$

Figlio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Nipote

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} =$$

Pongo  $y = \arctan x$

Quando  $x \rightarrow 0$ , ho che  $y \rightarrow \arctan 0 = 0$

Se  $y = \arctan x$ , allora  $x = \tan y$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} =$$

Pongo  $y = \arcsin x$ , da cui

$x = \sin y$

Quando  $x \rightarrow 0$ , ho che  $y \rightarrow \arcsin 0 = 0$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x =$$

Pongo  $y = -x$ , dunque  $x = -y$   
Quando  $x \rightarrow -\infty$ , ho che  $y \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = e$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} &= \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^y \\ &= \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) \end{aligned}$$

bisognerebbe fare il cambio  $y-1 = z$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow e$$

$\log x$  è una funzione continua, quindi posso fare il log a dx e sx

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left[ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] = \log e = 1$$

Quindi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$

Pongo  $\frac{1}{x} = y$   
Quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  
ho che  $y \rightarrow 0^+$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} \log(1+y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

Partendo da  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  e facendo esattamente

le stesse sostituzioni si arriva a

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} =$$

Pongo  $y = e^x - 1$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1$$

Quando  $x \rightarrow 0$  ho che  $y \rightarrow e^0 - 1 = 0$

Ricavo  $x$  in funzione di  $y$

$$y = e^x - 1 \Rightarrow e^x = y + 1 \Rightarrow x = \log(y + 1)$$

Sia ora  $a > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

$e^{\text{ALLA}}$

$$\begin{aligned} a^x &= e^{\log a^x} \\ &= e^{x \log a} \end{aligned}$$

$B = e^{\log B}$  definizione di log

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log a} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a} \cdot \log a = \log a$$

$$y = (\log a) x \quad \leftarrow \downarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} =$$

Pongo  $y = \log x$ , dunque  $x = e^y$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$$

Quando  $x \rightarrow +\infty$ , ho che  $y \rightarrow +\infty$

↑ perché esponenziale batte potenze

Più in generale si dimostra che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^a}{x^b} = 0$$

Le potenze (per  $x \rightarrow +\infty$ ) battono i logaritmi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log x = 0^- [0 \cdot (-\infty)]$$

Pongo  $\frac{1}{x} = y$ , cioè  $x = \frac{1}{y}$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \log \frac{1}{y}$$

Quando  $x \rightarrow 0^+$ , ho che  $y \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} [-\log y] = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log y}{y} = 0^-$$



# MATEMATICA I

ORA 18

Titolo nota

11/10/2007

## Criterio Funzioni $\rightarrow$ successioni

"Cambio di variabili da una successione ad una funzione"

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Pongo  $\frac{1}{n} = x$   
Quando  $n \rightarrow +\infty$ ,  
ho che  $x \rightarrow 0$

## Esempio 2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( \sqrt[n]{12} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{12^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12^x - 1}{x} = \log 12$$

Pongo  $\frac{1}{n} = x$

## Esempio 3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{\sqrt{x}}}{x^{1000}} = \frac{e^{\sqrt{x} \log 2}}{e^{1000 \log x}} = e^{\sqrt{x} \log 2 - 1000 \log x}$$

$$2^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x} \log 2}$$

$$2^{\sqrt{x}} = e^{\log(2^{\sqrt{x}})}$$

basta fare il limite  
dell'esponente

$$\sqrt{x} \log 2 - 1000 \log x = \sqrt{x} \left( \log 2 - 1000 \frac{\log x}{\sqrt{x}} \right)$$

$\rightarrow +\infty$

logaritmo contro  
potenza

## Sottoprodotto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{n^{1000}} = +\infty$$

Esempio 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^2 + 2^x)}{3x + 4} \quad \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$$

logaritmo contro  
potenza  
→ tende a 0

NO !!!!!!!!

$$\frac{\log(x^2 + 2^x)}{3x + 4} = \frac{\log \left[ 2^x \left( 1 + \frac{x^2}{2^x} \right) \right]}{x \left( 3 + \frac{4}{x} \right)}$$

$$= \frac{\log(2^x) + \log \left( 1 + \frac{x^2}{2^x} \right)}{x \left( 3 + \frac{4}{x} \right)} =$$

$$= \frac{\cancel{x} \log 2}{\cancel{x} \left( 3 + \frac{4}{x} \right)} + \frac{\log \left( 1 + \frac{x^2}{2^x} \right) \rightarrow \log + \infty}{x \left( 3 + \frac{4}{x} \right) \rightarrow +\infty} \rightarrow \frac{1}{3} \log 2$$

$\downarrow \frac{1}{3} \log 2$ 
 $\downarrow +\infty$

Brutalmente:  $\frac{\log(x^2 + 2^x)}{3x + 4} \sim \frac{\log(2^x)}{3x} = \frac{x \log 2}{3x} = \frac{\log 2}{3}$

— 0 — 0 —

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\log x + 7}}{x^2} = 0$$

$$\frac{e^{\log x + 7}}{x^2} = \frac{e^{\log x} \cdot e^7}{x^2} = \frac{x \cdot e^7}{x^2} = \frac{e^7}{x} \rightarrow 0$$

— 0 — 0 —

Esempio 6

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - \cos x}{x + \sin x}$$

$$\frac{7^0 - \cos 0}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{7^x - \cos x}{x + \sin x} = \frac{7^x - 1 + 1 - \cos x}{x + \sin x} = \frac{7^x - 1}{x + \sin x} + \frac{1 - \cos x}{x + \sin x} =$$

$$= \frac{7^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{x + \sin x} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x + \sin x} \rightarrow \frac{1}{2} \log 7$$

$\log 7$ 
 $\frac{1}{2}$ 
 $\frac{1}{2}$ 
 $0$

$$\frac{7^x - 1}{x} \rightarrow \log 7; \quad \frac{x}{x + \sin x} = \frac{1}{\frac{x + \sin x}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{\sin x}{x}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}; \quad \frac{x^2}{x + \sin x} = \boxed{x} \cdot \boxed{\frac{x}{x + \sin x}} \rightarrow 0$$

$\downarrow 0$                        $\downarrow \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x} - 1} = \left[ \frac{0}{0} \right]$$

Faccio un cambio di variabile per riportare il limite a 0.

$y = x - 1$  Quando  $x \rightarrow 1$ , ho che  $y \rightarrow 0$   $x = y + 1$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(y+1)^2 - 3(y+1) + 2}{\sqrt{y}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^2 + 2y + \cancel{-3y} - \cancel{3} + 2}{\sqrt{y}} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^2 - y}{\sqrt{y}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y(y-1)}{\sqrt{y}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \sqrt{y}(y-1) = 0^-$$

Esempio 8

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2 \sin x} + \arctan(\log(1+x)) - 1}{\sin(\sin x) + \arcsin(3x)}$$

$$\frac{\cancel{x} \frac{e^{2 \sin x} - 1}{x} + \cancel{x} \frac{\arctan(\log(1+x))}{x}}{\cancel{x} \frac{\sin(\sin x)}{x} + \cancel{x} \frac{\arcsin(3x)}{x}} \rightarrow \frac{2+1}{1+3} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{e^{2 \sin x} - 1}{x} = \frac{e^{2 \sin x} - 1}{2 \sin x} \cdot \frac{2 \sin x}{x}$$

$\downarrow y = 2 \sin x$                        $\downarrow 2$

$$\frac{e^y - 1}{y} \rightarrow 1$$

$$\frac{\sin(\sin x)}{x} = \boxed{\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}} \cdot \boxed{\frac{\sin x}{x}} \rightarrow 1$$

$\downarrow y = \sin x$ 
 $\downarrow 1$

$$\boxed{\frac{\sin y}{y}}$$

$\downarrow 1$

$$\frac{\arcsin(3x)}{x} = \boxed{\frac{\arcsin(3x)}{3x}} \cdot 3 \rightarrow 3$$

$\downarrow 1$

$$\frac{\operatorname{arctan}(\log(1+x))}{x} = \boxed{\frac{\operatorname{arctan}(\log(1+x))}{\log(1+x)}} \cdot \boxed{\frac{\log(1+x)}{x}} \rightarrow 1$$

$\downarrow 1$ 
 $\leftarrow y = \log(1+x)$

Quando  $x \rightarrow 0$ , ho  
che  $y \rightarrow \log 1 = 0$

$$\boxed{\frac{\operatorname{arctan} y}{y}} \rightarrow 1$$

# MATEMATICA I

ORA 19

Titolo nota

12/10/2007

Uso di sottosuccessioni → strumenti per dimostrare che un limite non esiste

## SOTTOSUCCESSIONE

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$

Prendere solo "alcuni" termini di una successione

$a_{2m} =$  sottosuccessione dei termini di indice pari

$a_{2m+1} =$  " " " " " dispari

$a_{m^2} =$  "  $a_0, a_1, a_4, a_9, a_{16}, a_{25}, \dots$

$a_{4m+1} = a_1, a_5, a_9, a_{13}, \dots$

2 definizioni  
in commercio

pescare in modo strettamente crescente

pescare in modo che gli indici tendano  
 $a + \infty$

In generale una sottosuccessione di  $a_n$  si indica con

$a_{n_k} \rightarrow n_k$  è la successione degli indici che sto pescando, ad esempio

$2k, 2k+1, k^2, 4k+1$

Legame tra il limite di una succ. ed il limite di una s.succ.

Teorema Se  $a_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$ , allora ogni sua s.succ.

$a_{n_k}$  tende allo stesso  $l$ .

Utilizzo operativo Sia data una successione  $a_n$ .

Supponiamo che esistano

$$\begin{aligned} * \text{ una sottosucc. } b_n \text{ t.c. } b_n &\rightarrow l_1 \in \overline{\mathbb{R}} \\ * \text{ " } c_n \text{ " } c_n &\rightarrow l_2 \in \overline{\mathbb{R}} \end{aligned} \quad l_1 \neq l_2$$

Allora il limite di  $a_n$  non esiste (cioè  $a_n$  è di tipo ④)

Infatti, se per assurdo  $a_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$ , allora tutte le sottosuccessioni dovrebbero tendere allo stesso  $l$ .

Esempio 1  $a_n = (-1)^n$   $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

$$a_{2m} = (-1)^{2m} = 1 \rightarrow 1$$

$$a_{2m+1} = (-1)^{2m+1} = -1 \rightarrow -1$$

↖ Sono 2 sottosucc.  
con 2 limiti diversi  
↓  
il limite di  $a_n$  non esiste

Esempio 2  $a_n = n^3 + (-1)^n n^4$

$$a_{2m} = (2m)^3 + (-1)^{2m} (2m)^4 = 8m^3 + 16m^4 \rightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= (2m+1)^3 + (-1)^{2m+1} (2m+1)^4 \\ &= (2m+1)^3 - (2m+1)^4 \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

Ho 2 sottosucc. con limite diverso  $\Rightarrow$  il limite iniziale N.E.

Esempio 3  $a_n = n^4 + (-1)^n n^3$

$$n^4 + (-1)^n n^3 \geq n^4 - n^3$$

comparando  
a 2

$+\infty$

$$\begin{aligned} & n^3(n-1) \\ & \downarrow \\ & +\infty \end{aligned}$$

Esempio 4  $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$

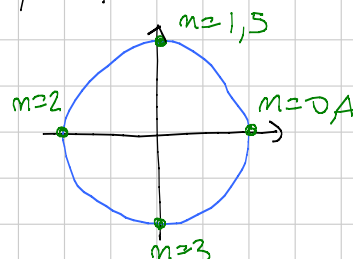
$$a_0 = 0, a_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, a_2 = \sin\pi = 0, a_3 = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

$$a_4 = 0, a_5 = \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1, a_6 = 0, a_7 = -1$$

La succ.  $a_n$  alterna

$$0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1$$

$$a_{2n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2n\right) = \sin(n\pi) = 0 \rightarrow 0$$



La s. succ. dei termini di indice pari  $\rightarrow 0$

$$a_{4n+1} = \sin\left(\frac{\pi}{2} (4n+1)\right) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \rightarrow 1$$

2 s. succ. con 2 limiti diversi  $\Rightarrow$  limite iniziale non esiste

Anzi potuto considerare  $a_{4n+3} \rightarrow -1$  (sostituire per esercizio)

ANALOGO PER LE FUNZIONI

Utilizzo del criterio  
funzioni successioni

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

$a_n$  successione tale che  $a_n \rightarrow x_0$

$$\text{Calcolare } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) =$$

↑  
Pongo  $x = a_n$

Quando  $n \rightarrow +\infty$ ,  
ho che  $x \rightarrow 0$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Utilizzo operativo

Siano  $a_n$  e  $b_n$  2 successioni tali che

$$* a_n \rightarrow x_0, b_n \rightarrow x_0$$

$$* f(a_n) \rightarrow l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$* f(b_n) \rightarrow l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$l_1 \neq l_2$$

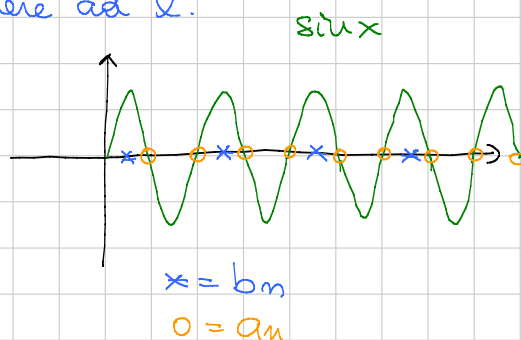
Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ NON ESISTE}$$



Infatti, se tale limite fosse un certo  $l \in \mathbb{R}$ , allora  $f(a_n)$  e  $f(b_n)$  dovrebbero tendere ad  $l$ .

Esempio 1  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$



$$a_n = n\pi \rightarrow +\infty$$

$$\sin a_n = \sin(n\pi) = 0 \rightarrow 0$$

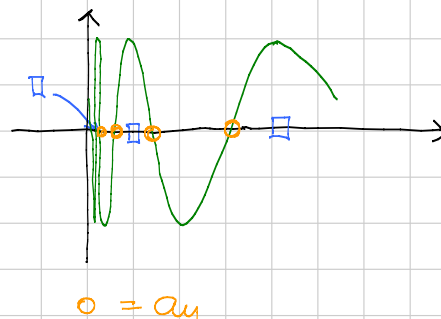
$$b_m = \frac{\pi}{2} + 2\pi m \rightarrow +\infty$$

$$\sin b_m = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right) = 1 \rightarrow 1$$

Abbiamo trovato  $a_n \rightarrow +\infty$  e  $b_m \rightarrow +\infty$  con  
 $\sin a_n \rightarrow 0$  e  $\sin b_m \rightarrow 1$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x \text{ N.E.}$$

Esempio 2  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$



Devo trovare

$$a_n \rightarrow 0^+ \text{ e } b_m \rightarrow 0^+ \text{ con}$$

$$\cos\left(\frac{1}{a_n}\right) \rightarrow 0 \text{ e } \cos\left(\frac{1}{b_m}\right) \rightarrow 1$$

Come trovare  $a_n$  e  $b_m$ ?

$$\cos\left(\frac{1}{a_n}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} = \frac{\pi}{2} + \pi m \Rightarrow a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi m} \rightarrow 0^+$$

$$\cos\left(\frac{1}{b_m}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{b_m} = 2\pi m \Rightarrow b_m = \frac{1}{2\pi m} \rightarrow 0^+$$

## MATEMATICA I

ORA 20

Titolo nota

12/10/2007

Esercizio 1  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + \cos x)^x = +\infty$  perché?

$$3 + \cos x \geq 2$$

$\cos x \geq -1$  aggiungo 3  
a dx e sx

devo alla x-esima (che è un esponente  $> 0$ )

$$(3 + \cos x)^x \geq 2^x$$

$\downarrow$   $\downarrow$   
 $+\infty$   $+\infty$

confronto a 2.

Esercizio 2  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \cos x)^x$  come prima sarebbe

$$(2 + \cos x)^x \geq 1^x \rightarrow 1$$

Questo limite NON esiste!!!! Posto  $f(x) = (2 + \cos x)^x$

devo trovare 2 successioni  $a_n \rightarrow +\infty$   $b_m \rightarrow +\infty$

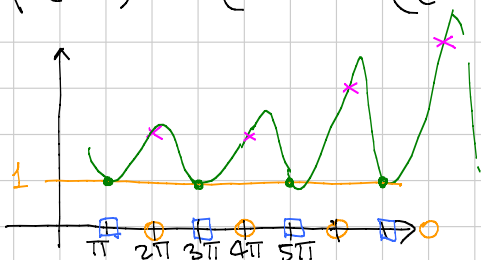
b.c.  $f(a_n) \rightarrow l_1$   $f(b_m) \rightarrow l_2$

$$a_m = 2\pi m \rightarrow +\infty; f(a_m) = (2 + \cos(2\pi m))^{2\pi m} = (2 + 1)^{2\pi m} = 3^{2\pi m} \rightarrow +\infty$$

$$b_m = \pi + 2\pi m = (2m+1)\pi$$

$$f(b_m) = (2 + \cos((2m+1)\pi))^{(2m+1)\pi} = (2 - 1)^{(2m+1)\pi} = 1^{\text{qualsunque cosa}} = 1$$

DIVERGENTI



$\square = b_m$   
 $\circ = a_m$

Esercizio 3

$$\frac{\sin(m + \arctan m)}{m + \arctan m} =$$

Pongo  $x = m + \arctan m$ Quando  $m \rightarrow +\infty$ , ho che  $x \rightarrow +\infty$ 

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Esempio 4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \arctan x)}{x + \arctan x}$$

Pongo  $y = x + \arctan x$ Quando  $x \rightarrow 0$ , ho che  $y \rightarrow 0$ 

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Esercizio 5

$$\frac{m \sin(m^2) + m^2 \sin m}{(m+1)(m + \sqrt{m^3})}$$

$$\sim \frac{m^2 \sin m}{m \cdot m^{3/2}} \sim \frac{\sin m}{m^{1/2}} \downarrow 0$$

Rigorosamente: raccolgo  $m^2$  al numeratore  
e " "  $m$  e  $m^{3/2}$  nei 2 termini del den.

$$\frac{m^2 \left( \frac{\sin(m^2)}{m} + \sin m \right)}{m \left( 1 + \frac{1}{m} \right) m^{3/2} \left( \frac{1}{\sqrt{m}} + 1 \right)}$$

FINALE COME  
SEMPRE

$$\text{Esercizio 6} \quad \sqrt[n]{4^n + m^4} - \sqrt[n]{3^n + m^3} \sim \sqrt[n]{4^n} - \sqrt[n]{3^n} = 4 - 3 = 1$$

Rigorous

$$\sqrt[n]{4^n \left( 1 + \frac{m^4}{4^n} \right)} - \sqrt[n]{3^n \left( 1 + \frac{m^3}{3^n} \right)}$$

$$4 \left( 1 + \frac{m^4}{4^n} \right)^{\frac{1}{n}} - 3 \left( 1 + \frac{m^3}{3^n} \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 4 - 3 = 1.$$

$\downarrow$   
 $1^0 = 1$

Esercizio 7  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^4)}{x}$   $\left[ \frac{0}{0} \right]$

$$\frac{\log(1+x^4)}{x^4} \cdot \frac{x^4}{x} = \frac{\log(1+x^4)}{x^4} \cdot x^3 \rightarrow 0$$

Esercizio 8  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x^2}}$   $[1^\infty] = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$$(\cos x)^{\frac{1}{\sin x^2}} = e^{\frac{1}{\sin x^2} \cdot \log(\cos x)}$$

Basta fare il limite dell'esponente

$$\frac{\log(\cos x)}{\sin x^2} = \frac{\log[1 + (\cos x - 1)]}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin x^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

Quando  $x \rightarrow 0$ , ho che  $y \rightarrow 0$

$y = \cos x - 1$

$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$

$\frac{\cos x - 1}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$

$\frac{x^2}{\sin x^2} \rightarrow 1$

Esercizio 9  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 3} + x$   $\infty - \infty$

Pongo  $y = -x$  Quando  $x \rightarrow -\infty$ , ho che  $y \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y^2 - y + 3} - y$$

$\infty - \infty$

$$\sqrt{y^2 - y + 3} - y \cdot \frac{\sqrt{\quad} + y}{\sqrt{\quad} + y} = \frac{y^2 - y + 3 - y^2}{\sqrt{y^2 - y + 3} + y} \sim \frac{-y}{\sqrt{y^2 + y}} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

Esercizio 10

$$(\log(1+m^2) - \log m) \operatorname{arctan} m! = +\infty$$

$\infty - \infty$

$$\log\left(\frac{1+m^2}{m}\right) = \log\left(m + \frac{1}{m}\right) \rightarrow +\infty$$

" $\operatorname{arctan}(+\infty)$ " =  $\frac{\pi}{2}$

Esercizio 11

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \underbrace{(2x - \pi)}_{\downarrow 0} \underbrace{\tan x}_{\downarrow \pm \infty} =$$

Pongo  $y = x - \frac{\pi}{2}$  Quando  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  ho che  $y \rightarrow 0$   
 $x = y + \frac{\pi}{2}$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} (2y + \pi - \pi) \tan\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} 2y \tan\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{\text{FORMULA}}{=} -\frac{1}{\tan y} = \lim_{y \rightarrow 0} 2y \left(-\frac{1}{\tan y}\right) =$$

$$= -2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = -2.$$

## MATEMATICA I

Titolo nota

ORA 21

16/10/2007

o piccolo

Def. Siano  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sia  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Si dice che  $f(x) = o(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$  se

esiste una funzione  $w(x)$  tale che

$$f(x) = w(x) \cdot g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 0$$

Brutalmente:  $f(x) = g(x) \cdot \text{qualcosa che tende a 0 per } x \rightarrow x_0$

Def. quasi equivalente. Supponendo di poter dividere per  $g(x)$  (cosa che si può fare se  $g(x) \neq 0$  in un intorno di  $x_0$  meno il punto  $x_0$  stesso) si ha che

$$f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \rightarrow x_0 \text{ se}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$\leftarrow w(x)$

Brutalmente: supponendo che  $f(x)$  e  $g(x)$  tendano a 0 per  $x \rightarrow x_0$ , il limite sarebbe una forma invol.  $\frac{0}{0}$  e  $f(x) = o(g(x))$  vuol dire

che "f batte g" oppure "f tende a 0 più veloc. di g."

Esempio 1  $x^2 = o(x)$  per  $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ g(x) &= x \\ x_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} x^2 = x \cdot x \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ f(x) = w(x) \cdot g(x) \end{array}$$

Da controllare  $\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

Esempio 2  $\sin^3 x = o(x^2)$  per  $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^3 x \\ g(x) &= x^2 \\ x_0 &= 0 \end{aligned}$$

Def. ufficiale:  $\sin^3 x = \frac{\sin^3 x}{x^2} \cdot x^2$

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ f(x) = w(x) \cdot g(x) \end{array}$$

Da controllare:  $\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^2} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{\sin^3 x}{x^3}} \cdot \boxed{x} \rightarrow 1 \cdot 0 = 0$$

Def. quasi equivalente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^2} = 0 \quad (\text{stesso motivo})$$

Esempio 3  $\frac{1}{x^4} = o\left(\frac{1}{x^{20}}\right)$  per  $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^4} \\ g(x) &= \frac{1}{x^{20}} \\ x_0 &= 0 \end{aligned}$$

Def. q.e.:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^{20}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \cdot x^{20} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{16} = 0 \end{aligned}$$

In questo esempio  $f(x)$  e  $g(x)$  NON tendono a zero per  $x \rightarrow x_0 = 0$

Def uff.

$$\boxed{\frac{1}{x^4}} = \boxed{x^{16}} \cdot \boxed{\frac{1}{x^{20}}} \quad \begin{array}{c} f(x) \\ w(x) \\ g(x) \end{array}$$

Proprietà di piccolo

$$o(g) + o(g) = o(g)$$

Supp.  $f_1(x) = o(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$  $f_2(x) = o(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$ Allora  $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$ Dim.  $f_1(x) = w_1(x) \cdot g(x)$ 

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w_1(x) = 0$$

 $f_2(x) = w_2(x) \cdot g(x)$ 

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w_2(x) = 0$$

Sommando:

$$f_1(x) + f_2(x) = \underbrace{(w_1(x) + w_2(x))}_{w_3(x)} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (w_1(x) + w_2(x)) = 0 \Rightarrow f_1 + f_2 = o(g)$$

2ª proprietà :

$$o(g) - o(g) = o(g)$$

Dim. si arriva a

$$f_1(x) - f_2(x) = \underbrace{(w_1(x) - w_2(x))}_{w_3(x)} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w_3(x) = \dots = 0 \Rightarrow f_1 - f_2 = o(g)$$

3ª proprietà Per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$  si ha che

$$\lambda o(g) = o(g)$$

Detto per bene: se  $f(x) = o(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$ , allora

$$\lambda f(x) = o(g(x))$$

Dim.  $f(x) = w(x) \cdot g(x)$ 

$$\text{con } \lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 0$$



$$\lambda f(x) = \underbrace{\lambda \omega(x)}_{\omega_1(x)} \cdot g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lambda \omega(x) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda f = o(g)$$

4ª proprietà

$$o(\lambda g) = o(g)$$

Dim.  $f(x) = o(\lambda g(x))$ , cioè

$$f(x) = \underbrace{\omega(x) \cdot \lambda}_{\omega_1(x)} g(x) = \omega_1(x) \cdot g(x)$$

$\downarrow$   
0 (come sopra)

Esempio  $o(7x) = o(x)$

5ª proprietà

$$o(g) \cdot o(g) = o(g^2)$$

$$f_1(x) = \omega_1(x) \cdot g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_1(x) = 0$$

$$f_2(x) = \omega_2(x) \cdot g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_2(x) = 0$$

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = \underbrace{\omega_1(x) \cdot \omega_2(x)}_{\omega_3(x)} \cdot g^2(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [\omega_1(x) \cdot \omega_2(x)] = 0 \Rightarrow f_1 \cdot f_2 = o(g^2)$$

6ª "proprietà"

$$\frac{o(g)}{o(g)} = \text{NULLA DI FORBO !!}$$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\omega_1(x) \cdot \cancel{g(x)}}{\omega_2(x) \cdot \cancel{g(x)}} = \frac{\omega_1(x)}{\omega_2(x)} \rightarrow \frac{0}{0} \quad \text{Forma indeterminata}$$

Esempi Per  $x \rightarrow 0$   $f(x) = o(x^2) \Rightarrow f(x) = o(x)$

$$f(x) = o(x^2) \Rightarrow f(x) = x^2 \cdot \omega(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \omega(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{x \cdot \omega(x)}_{\omega_1(x)} \cdot x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \omega_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [x \cdot \omega(x)] = 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow f(x) = o(g)$$

7<sup>a</sup> proprietà: transitività

$$\begin{aligned} f(x) &= o(g(x)) \\ g(x) &= o(h(x)) \end{aligned} \Rightarrow f(x) = o(h(x))$$

Dim.  $f(x) = \omega_1(x) \cdot g(x)$ ,  $g(x) = \omega_2(x) \cdot h(x)$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{\omega_1(x) \cdot \omega_2(x)}_{\omega_3(x)} \cdot h(x)$$

$$o(o(h)) = o(h)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_3(x) = 0 \cdot 0 = 0$$

Nell'esempio precedente ( $x_0 = 0$ )

$$f(x) = o(x^2), \quad x^2 = o(x) \Rightarrow f(x) = o(x)$$

Esempio  $\underbrace{x^2 + \tan^2 x + \sin x^3}_{f(x)} = o(x)$  per  $x \rightarrow 0$   
 $g(x) = x$   
 $x_0 = 0$

Def. quasi equivalente

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \tan^2 x + \sin x^3}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( x + \frac{\tan^2 x}{x} + \frac{\sin x^3}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \underbrace{x}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{\tan^2 x}{x^2}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{x}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{\sin x^3}{x^3}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{x^2}_{\downarrow 0} \right) = 0$$

## MATEMATICA I

ORA 22

Titolo nota

16/10/2007

## SVILUPPINI

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\tan x = x + o(x)$$

$$\arctan x = x + o(x)$$

$$\arcsin x = x + o(x)$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

per  
 $x \rightarrow 0$ 

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\sin x - x = o(x)$$

$$f(x) = \sin x - x$$

$$g(x) = x$$

$$x_0 = 0$$

Verifica con def. q.e.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 0$$

↓  
1

$$\tan x = x + o(x), \text{ cioè } \tan x - x = o(x), \text{ cioè}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan x}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$$

— 0 — 0 —

$$e^x = 1 + x + o(x), \text{ cioè } e^x - 1 - x = o(x), \text{ cioè}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right) = 0$$

↓  
1

— 0 — 0 —

$$\log(1+x) = x + o(x), \text{ cioè } \log(1+x) - x = o(x), \text{ cioè}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\log(1+x)}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$$

↓  
1

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \text{ cioè } \boxed{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}} = o(x^2) \quad \begin{matrix} \uparrow f(x) \\ \uparrow g(x) \end{matrix}$$

cioè

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \boxed{\frac{\cos x - 1}{x^2}} + \frac{1}{2} \right) = 0$$

$\downarrow -\frac{1}{2}$   
 $-0-0-$

Proprietà di o piccolo  $\frac{o(g)}{g}$

Se  $f(x) = o(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$ , allora

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

(in realtà è la def. q.e.)

Esempio 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \arctan x + 2 \tan x}{e^x - 1 + \log(1+x)} \quad \left[ \frac{0}{0} \right]$$

Uso gli sviluppi:

$$\sin x = x + o(x), \quad \arctan x = x + o(x), \quad \tan x = x + o(x)$$

$$2 \tan x = 2x + 2o(x) = 2x + o(x)$$

$$\text{Numeratore: } \underbrace{x + o(x)}_{\uparrow \sin x} + \underbrace{x + o(x)}_{\uparrow \arctan x} + \underbrace{2x + o(x)}_{\uparrow 2 \tan x}$$

$$= 4x + o(x)$$

$$\text{Denominatore: } \underbrace{\cancel{1} + x + o(x)}_{e^x} + \underbrace{\cancel{-1}}_{-1} + \underbrace{x + o(x)}_{\log(1+x)} = 2x + o(x)$$

$$\frac{\text{Num}}{\text{Den}} = \frac{4x + o(x)}{2x + o(x)} = \frac{\cancel{x} \left( 4 + \frac{o(x)}{x} \right)}{\cancel{x} \left( 2 + \frac{o(x)}{x} \right)} \rightarrow \frac{4}{2} = 2$$

$\xrightarrow{0} \quad \quad \quad \xrightarrow{0}$

Esempio 2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - \cos x}{\sin(2x)}$

$$\sin(2x) = 2x + o(2x) = 2x + o(x)$$

$$\sin t = t + o(t)$$

$$e^{3x} = 1 + 3x + o(3x) = 1 + 3x + o(x)$$

$$e^t = 1 + t + o(t)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 + o(x)$$

$$x^2 = o(x) \quad -\frac{1}{2}x^2 = o(x) \quad o(x^2) = o(x)$$

$$1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 + o(x) + o(x) = 1 + o(x)$$

$$\frac{e^{3x} - \cos x}{\sin(2x)} = \frac{\cancel{1} + 3x + o(x) - \cancel{1} - o(x)}{2x + o(x)} = \frac{3x + o(x)}{2x + o(x)} =$$

$$= \frac{\cancel{x} \left( 3 + \frac{o(x)}{x} \right)}{\cancel{x} \left( 2 + \frac{o(x)}{x} \right)} \rightarrow \frac{3}{2}$$

$\xrightarrow{0} \quad \quad \quad \xrightarrow{0}$

In alternativa:

$$\frac{e^{3x} - \cos x}{\sin(2x)} = \frac{\cancel{1} + 3x + o(x) - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} - o(x^2)}{2x + o(x)}$$

$\xrightarrow{0} \quad \quad \quad \xrightarrow{0}$

$$= \frac{3x + \frac{x^2}{2} + o(x) + o(x^2)}{2x + o(x)} =$$

$\xrightarrow{0} \quad \quad \quad \xrightarrow{0}$

$$= \frac{\cancel{x} \left( 3 + \frac{x}{2} + \frac{O(x)}{x} + \frac{O(x^2)}{xx} \right)}{\cancel{x} \left( 2 + \frac{O(x)}{x} \right)} \rightarrow \frac{3}{2}$$

— 0 — 0 —

Esempio  $\sin(3x) + \tan(2x^2) + \log(1+5x) =$   
 $8x + O(x)$

$$\sin(3x) = 3x + O(3x) = 3x + O(x)$$

$$\log(1+5x) = 5x + O(5x) = 5x + O(x)$$

$$\tan t = t + O(t) \Rightarrow \tan(2x^2) = 2x^2 + O(2x^2) = O(x)$$

$$2x^2 + O(2x^2) = 2x^2 + \omega(x) \cdot 2x^2 = x \underbrace{(2x + \omega(x) \cdot 2x)}_{\omega_1(x)} = x \omega_1(x)$$

$$6x + O(x) + 5x^2 - 3x^3 + O(x^4) = 6x + O(x)$$

$$\sin(\sin x) = \sin x + O(\sin x) = x + O(x) + O(\sin x)$$

$$\sin t = t + O(t) \quad = x + O(x)$$

Si può fare? Cioè:  $O(\sin x) = O(x)$  per  $x \rightarrow 0$ ?

Se  $f(x) = O(\sin x)$  per  $x \rightarrow 0$ , posso concludere che

$$f(x) = O(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0? \quad \boxed{\text{SI}}$$

Ipotesi  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin x} = 0$       Tesi:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$

Dim:  $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$

Brutalmente  $f(x) = o(\sin x) \Rightarrow "f(x) \text{ batte } \sin x"$

$\sin x$  e  $x$  "vanno a zero allo stesso modo"  
(pareggiando)

$\Rightarrow "f \text{ batte } x"$

Esempio 1  $\frac{e^{x+\sin x} - 1}{x} \sim \frac{e^{2x} - 1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2$  per  $x \rightarrow 0$

Più rigorosamente

$$x + \sin x = x + x + o(x) = 2x + o(x)$$

$$e^t = 1 + t + o(t) \Rightarrow e^{2x+o(x)} = 1 + 2x + o(x) + o(2x+o(x))$$

$$= 1 + 2x + o(x)$$

# MATEMATICA I

ORA 23

Titolo nota

17/10/2007

## DERIVATE

Ingredienti:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $x_0 \in \mathbb{R}$

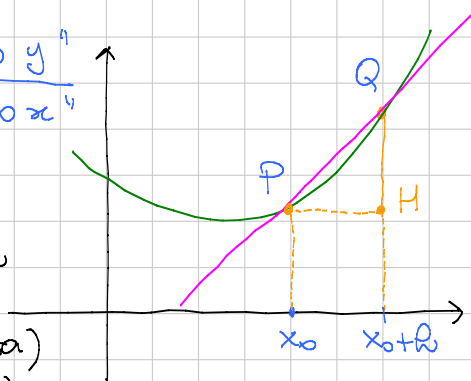
## RAPPORTO INCREMENTALE

Dato  $h \neq 0$  definiamo

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\text{"INCREMENTO } y \text{"}}{\text{"INCREMENTO } x \text{"}}$$

Quando mi sposto da  $x_0$  a  $x_0+h$   
la variabile  $x$  ho incrementato di  $h$

Nella variabile  $y$  (cioè nella quota)  
sono passato da  $f(x_0)$  a  $f(x_0+h)$ ,  
dunque ho un incremento di  
 $f(x_0+h) - f(x_0)$



Geometricamente: rapp. increm. =  $\frac{HQ}{PH}$  (con segno)  
= coeff. angolare retta PQ.

Definizione Si dice che  $f(x)$  è DERIVABILE nel punto  $x_0$  se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \text{ esiste ed è reale}$$

Il valore del limite si dice DERIVATA di  $f$  nel pto  $x_0$  e si indica con uno di questi simboli

$$\frac{df}{dx}(x_0) \quad f'(x_0) \quad \dot{f}(x_0)$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO: quando  $h \rightarrow 0$ , abbiamo che  
Q tende a P, la retta PQ tende a diventare la retta  
tg. al grafico in P, il rapp. increm. tende al coeff.  
angolare della ret. tg. al grafico in P.



**DIFFERENZIALE** Ingredienti:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Si dice che  $f(x)$  è differentiabile nel punto  $x_0$  se esiste  $\alpha \in \mathbb{R}$  tale che

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \alpha R + o(R) \quad \text{per } R \rightarrow 0$$

**TEOREMA**  $f$  è differentiabile in  $x_0$



$f$  è derivabile in  $x_0$

Inoltre  $\alpha = f'(x_0)$

Dim  $\boxed{\Downarrow}$  Ipotesi:  $f$  è differentiabile in  $x_0$   
 Tesi:  $f$  è derivabile in  $x_0$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + R) - f(x_0)}{R} &\stackrel{\text{uso ip.}}{=} \frac{\overbrace{f(x_0 + R)}^{f(x_0) + \alpha R + o(R)} - \cancel{f(x_0)}}{R} \\ &= \alpha + \underbrace{\frac{o(R)}{R}}_{\downarrow 0} \rightarrow \alpha \end{aligned}$$

Ho dimostrato che il rapp. increm. tende ad  $\alpha$ , quindi  $f$  è deriv. in  $x_0$  e  $f'(x_0) = \alpha$ .

$\boxed{\Uparrow}$  Ipotesi:  $f$  è derivabile in  $x_0$  (cioè il rapp. incr. ha limite)  
 Tesi:  $f$  è diff. in  $x_0$ , cioè

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + f'(x_0) R + o(R)$$

Devo quindi dimostrare che

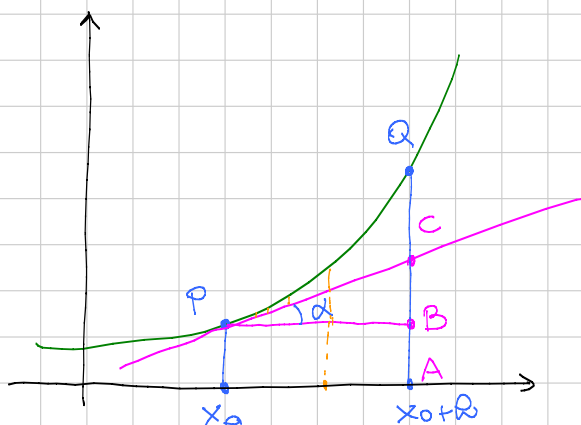
$$f(x_0 + R) - f(x_0) - f'(x_0) R = o(R)$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{f(x_0+R) - f(x_0) - f'(x_0)R}{R} =$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x_0+R) - f(x_0)}{R} - f'(x_0) \right] = 0.$$

$\downarrow$   
 $f'(x_0)$

— 0 — 0 —



$$f(x_0+R) = AQ$$

$$f(x_0) = AB$$

$$\frac{BC}{PB} = \tan \alpha = \text{coeff. ang. retta tangente} = f'(x_0)$$

$$BC = f'(x_0) \cdot PB = f'(x_0) \cdot R$$

$$AQ = AB + BC + CQ$$

$$f(x_0+R) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot R + o(R)$$

Cosa succede quando  $R \rightarrow 0$  ai 3 segmenti AB, BC, CQ

AB resta invariato

BC tende a zero "come R" (se dimetto R, dimetto BC)

Detto meglio: LINEARMENTE in R.

CQ tende a zero "più velocemente di R" e per questo è  $o(R)$

— 0 — 0 —

Operativamente: scrivendo  $f(x_0+R)$  nella forma come somma di 3 termini, il coefficiente di R è  $f'(x_0)$

Esempio 1  $f(x) = x^2$   $f'(x) = 2x$

1° modo: limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0h + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0$$

2° modo: differenziale

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

$$(x_0+h)^2 = x_0^2 + 2x_0h + h^2$$

$$= x_0^2 + \boxed{2x_0h} + o(h)$$

$f'(x_0)$

Esempio 2  $f(x) = e^x$   $f'(x) = e^x$

1° modo: rapp. incem,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^h - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ e^{x_0} \cdot \boxed{\frac{e^h - 1}{h}} \right] = e^{x_0}$$

$\downarrow$   
1

2° modo: differenziale

$$f(x_0+h) = e^{x_0+h} = e^{x_0} \cdot e^h = \text{SVILUPPI}$$

$$= e^{x_0} (1 + h + o(h)) = e^{x_0} + \boxed{e^{x_0}h} + o(h)$$

$\uparrow$   $\uparrow$   $\uparrow$   
 $f(x_0)$   $f'(x_0)h$   $o(h)$

Esempio 3  $f(x) = \sin x$ 

$f'(x) = \cos x$

1° modo: rapp. increment.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h - \sin x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \sin x_0 \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \cdot \frac{\sin h}{h} \right] = \cos x_0$$

$\downarrow \quad \downarrow$   
 $-\frac{1}{2} \quad 0$

2° modo:  $f(x_0+h) = \sin(x_0+h) = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h$ 

$$= \sin x_0 (1 + o(h)) + \cos x_0 (h + o(h))$$

$$= \sin x_0 + o(h) + \cos x_0 \cdot h + o(h)$$

$$= \sin x_0 + \boxed{\cos x_0} \cdot h + o(h)$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(x_0) & f'(x_0) \cdot h \end{array}$$

Provare per esercizio a fare il 1° modo usando

$$\sin(x_0+h) - \sin x_0$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = \dots$$

## MATEMATICA I

ORA 24

Titolo nota

17/10/2007

Calcolo di derivate

Esempio 1  $f(x) = \cos x$   $f'(x) = -\sin x$

per esercizio  
fare con  
formula  
 $\cos \alpha - \cos \beta$

1° modo: rapp. incrementale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0+h) - \cos x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x_0 \cdot \cos h - \sin x_0 \cdot \sin h - \cos x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \cos x_0 \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x_0 \frac{\sin h}{h} \right] = -\sin x_0$$

$\downarrow$  0                       $\downarrow$  1

2° modo: differenziale

$$\cos(x_0+h) = \cos x_0 \cdot \cos h - \sin x_0 \cdot \sin h = (\text{SVILUPPINI})$$

$$\uparrow$$

$$f(x_0+h) = \cos(x_0) (1+o(h)) - \sin x_0 (h+o(h))$$

$$= \cos x_0 \boxed{-\sin x_0} \cdot h + o(h)$$

$\uparrow$                        $\uparrow$   
 $f(x_0)$      $+ f'(x_0) \cdot h$      $+ o(h)$

BRUTALMENTE

LIMITI                       $\longleftrightarrow$  SVILUPPINI                       $\longleftrightarrow$  DERIVATE FUNZ.  
 NOTE VOLI                                                                ELEMENTARI

Esempio 2  $f(x) = \frac{1}{x}$   $x_0 \neq 0$   $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{\cancel{x_0} - \cancel{x_0} - h}{(x_0+h) \cdot \cancel{x_0}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{(x_0+h)x_0} \right] = -\frac{1}{x_0^2}$$

Esempio 3  $f(x) = \log x$   $x_0 > 0$   $f'(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x_0+h) - \log x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \log\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}} = \frac{1}{x_0}$$

1 ←

### TABELLINA DI DERIVATE

| $f(x)$   | $f'(x)$       |                                          | $f(x)$      | $f'(x)$                                                                                                   |
|----------|---------------|------------------------------------------|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| costante | 0             |                                          | $\tan x$    | $\frac{1}{\cos^2 x}$ <span style="border: 1px solid blue; padding: 2px;"><math>1 + \tan^2 x</math></span> |
| $x^k$    | $k x^{k-1}$   | $k \in \mathbb{N}$<br>$k \in \mathbb{R}$ | $\arctan x$ | $\frac{1}{1+x^2}$                                                                                         |
| $\sin x$ | $\cos x$      |                                          | $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$                                                                                  |
| $\cos x$ | $-\sin x$     |                                          | $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$                                                                                 |
| $e^x$    | $e^x$         |                                          | $a^x$       | $a^x \cdot \log a$                                                                                        |
| $\log x$ | $\frac{1}{x}$ |                                          |             |                                                                                                           |

### TEOREMI ALGEBRICI SULLE DERIVATE

$$(\lambda f)' = \lambda f'$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Derivata della composizione:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Derivata della funzione inversa: se  $g$  è l'inversa di  $f$

allora 
$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

### Derivata di $\lambda f(x)$ $x_0$

Se  $f$  è derivabile in  $x_0$  abbiamo che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

Moltiplico per  $\lambda$  e ottengo

$$\lambda f(x_0 + h) = \lambda f(x_0) + \boxed{\lambda f'(x_0)}h + o(h)$$

### Derivata di $f \pm g$ Sia $h(x) = f(x) \pm g(x)$

Sappiamo che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + g'(x_0)h + o(h)$$

Sommando

$$\underbrace{f(x_0 + h) \pm g(x_0 + h)}_{h(x_0 + h)} = \underbrace{f(x_0) \pm g(x_0)}_{h(x_0)} + \underbrace{[f'(x_0) \pm g'(x_0)]}_{h'(x_0)}h + \underbrace{o(h)}_{o(h)}$$

Derivata di  $f \cdot g$  Sia  $p(x) = f(x) \cdot g(x)$

Moltiplico le formule per  $f(x_0+h)$  e  $g(x_0+h)$ .  
Ottengo

$$\underbrace{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h)}_{p(x_0+h)} = \underbrace{f(x_0) \cdot g(x_0)}_{p(x_0)} + \underbrace{[f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)]h}_{p'(x_0)h} + o(h)$$

Questo "mangia" tutti gli altri 6 termini

$$[f'(x_0)h] \cdot [g'(x_0)h] = [f'(x_0) \cdot g'(x_0)]h^2 = o(h)$$

$$[f'(x_0)h] \cdot o(h) = \underbrace{f'(x_0) \cdot h \cdot \omega(h)}_{\omega_1(h)}h$$

Derivata della composizione

$$c(x) = f(g(x))$$

$$c(x_0+h) = f(g(x_0+h)) \quad \text{SVILUPPO } g(x_0+h)$$

$$= f(\underbrace{g(x_0)}_{y_0} + \underbrace{h g'(x_0)}_k + o(h)) \quad \begin{aligned} f(y_0+k) &= \\ f(y_0) + f'(y_0)k &+ o(k) \end{aligned}$$

$$= \underbrace{f(g(x_0))}_{f(y_0)} + \underbrace{f'(g(x_0))}_{f'(y_0)} \underbrace{[h g'(x_0) + o(h)]}_k + o(k)$$

$$= \underbrace{f(g(x_0))}_{c(x_0)} + \underbrace{f'(g(x_0))g'(x_0)}_{c'(x_0)} \cdot h + o(h)$$



Calcolare la derivata di  $\frac{1}{f}$

$\frac{1}{f}$  è la composizione di  $f(x)$  e della funzione

$d(x) = \frac{1}{x}$ . Detto meglio: se  $d(x) = \frac{1}{x}$ , allora

$$d(f(x)) = \frac{1}{f(x)}$$

$$d'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left[ d(f(x)) \right]' = d'(f(x)) \cdot f'(x) = -\frac{1}{f^2(x)} \cdot f'(x)$$

↑  
COMPOSIZIONE

Usando questa

$$\left( \frac{f}{g} \right)' = \left( f \cdot \frac{1}{g} \right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left( \frac{1}{g} \right)' =$$

↑  
PRODOTTO

↑  
APPENA FATTA

$$= f' \cdot \frac{1}{g} + f \left( -\frac{g'}{g^2} \right) = \frac{f' \cdot g - f g'}{g^2}$$

Esempio

$$(\tan x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\overset{f'}{\cos x} \cdot \overset{g}{\cos x} - \overset{f}{\sin x} \cdot \overset{g'}{(-\sin x)}}{\overset{g^2}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\rightarrow 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

DUE MODI DI SCRIVERE  
LA STESSA COSA

## MATEMATICA I

ORA 25

Titolo nota

17/10/2007

## DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

Sia  $f(x)$  una funzione e sia  $g(x)$  la sua inversa.  
Questo vuol dire che

$$f(g(x)) = x \quad \text{per ogni } x \in \text{insieme di partenza di } g$$

$$g(f(x)) = x \quad \text{" " " " " } f$$

[NB] Insieme di partenza di  $f$  = insieme di arrivo di  $g$   
E VICEVERSA

Supponiamo che  $f$  e  $g$  siano derivabili. Derivando la 1ª relazione a  $dx$  e  $dx$  ottengo

$$[f(g(x))]' = [x]'$$

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$$

Derivata composizione

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Esempio 1  $f(x) = \tan x$

$$g(x) = \arctan x$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} =$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

$$f'(g(x)) = 1 + \tan^2(g(x))$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)}$$

$$= \frac{1}{1 + [\tan(\arctan x)]^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Esempio 2  $f(x) = e^x$   $g(x) = \log x$

$$f'(x) = e^x$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{g(x)}} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

Esempio 3  $f(x) = \sin x$   $g(x) = \arcsin x$   $f'(x) = \cos x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(g(x))} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(g(x))}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - [\sin(\arcsin x)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Nota bene: abbiamo usato che  $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ .  
Questa formula vale solo nel I e IV quadrante, cioè  
per

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

L'abbiamo usato con  $x = \arcsin x$  che "fortunatamente"  
assume valori proprio in quell'intervallo. Quindi Ok.

Per esercizio: fare lo stesso calcolo con  $\cos x$  e  $\arccos x$

Esempi di calcolo di derivate

①  $f(x) = \sin x + \log x + e^x$  ;  $f'(x) = \cos x + \frac{1}{x} + e^x$

②  $f(x) = \underbrace{\log x}_f \cdot \underbrace{\sin x}_g$   $f'(x) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'} \sin x + \log x \cdot \underbrace{\cos x}_{g'}$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \sin(e^x) \quad f'(x) = \cos(e^x) \cdot e^x$$

$\uparrow$  derivata del sin       $\uparrow$  derivata di  $e^x$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = \cos x \cdot \sin(e^x)$$

$$f'(x) = (\cos x)' \cdot \sin(e^x) + \cos x \cdot (\sin(e^x))'$$

$$= -\sin x \cdot \sin(e^x) + \cos x \cdot \cos(e^x) \cdot e^x$$

$$\textcircled{5} \quad f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\uparrow$   $\alpha = \frac{1}{2}$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$   
 $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

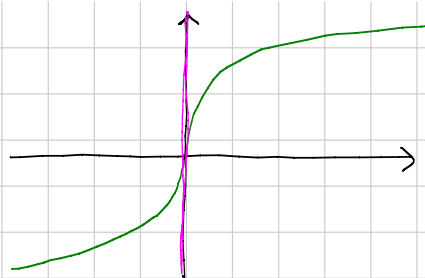
$$\textcircled{6} \quad f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$\uparrow$   $\alpha = \frac{1}{3}$

Occhio: deve essere  $x \neq 0$ .

Per  $x=0$  la retta tangente al grafico "tende a diventare verticale"

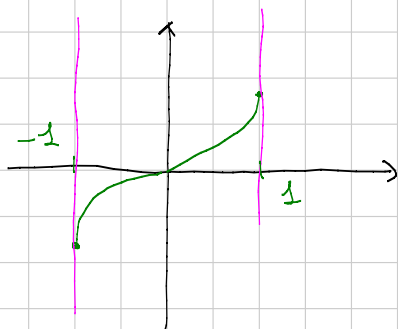


Stessa cosa succede per  $f(x) = \arcsin x$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f'(x)$  tende a  $+\infty$  quando

$x \rightarrow 1^-$  oppure  $x \rightarrow -1^+$

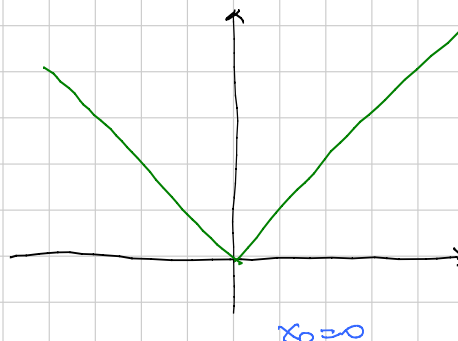


Retta tangente verticale  
in  $x = 1$  e  $x = -1$

DERIVABILE IN  $x_0 \Rightarrow$  CONTINUA IN  $x_0$

Non vale il viceversa.  $f(x) = |x|$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x > 0 \\ \text{N.E.} & \text{per } x = 0 \\ -1 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$



Per mostrare che  $f'(0)$  non esiste si fa il rapp. incr.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x_0+h| - |x_0|}{h} \stackrel{!}{=}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \rightarrow \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \end{cases} \quad \text{DIVERSI!}$$

$$f(x) = x |\sin x|$$

Calcolare  $f'(0)$

Rapp. increment.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} & \stackrel{!}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h |\sin h| - 0}{h} \\ & = \lim_{h \rightarrow 0} |\sin h| = 0. \end{aligned}$$

Ancora esempi di calcolo

⑦  $e^{\sin x} = f(x)$

$$f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

⑧  $f(x) = \cos(x^2)$

$$f'(x) = -\sin(x^2) \cdot 2x$$

⑨  $f(x) = x^3 e^{-x^4}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)' e^{-x^4} + x^3 (e^{-x^4})' \\ &= 3x^2 e^{-x^4} - 4x^3 x^3 e^{-x^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{10} \quad f(x) &= 3^x & f(x) &= e^{x \cdot \log 3} \\
 f'(x) &= (e^{x \log 3})' = e^{x \log 3} \cdot (x \log 3)' \\
 &= e^{x \log 3} \cdot \log 3 \\
 &= 3^x \cdot \log 3
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{11} \quad f(x) = \log 37 \quad f'(x) = 0 \quad \text{derivata di una costante !!!!}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{12} \quad f(x) &= x^{\cos x} \\
 &= e^{\cos x \cdot \log x} \\
 f'(x) &= e^{\cos x \cdot \log x} (\cos x \cdot \log x)' =
 \end{aligned}$$

~~$f'(x) = \cos x \cdot x^{\cos x - 1}$~~

NO

$$\begin{aligned}
 &= e^{\cos x \cdot \log x} ((\cos x)' \cdot \log x + \cos x \cdot (\log x)') \\
 &= x^{\cos x} (-\sin x \cdot \log x + \cos x \cdot \frac{1}{x})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{13} \quad f(x) &= x^\alpha & f(x) &= e^{\alpha \log x} \\
 f'(x) &= (e^{\alpha \log x})' = e^{\alpha \log x} (\alpha \log x)' \\
 &= e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x} \\
 &= x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}
 \end{aligned}$$

## MATEMATICA I

ORA 26

Titolo nota

18/10/2007

## DERIVATE SUCCESSIVE

 $f(x) \rightsquigarrow f'(x) \rightsquigarrow f''(x) = \text{derivata della derivata}$ 

Notazioni:

$$\frac{df}{dx}$$

$$f'(x)$$

$$\dot{f}(x)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$f''(x)$$

$$\ddot{f}(x)$$

$$\frac{d^3 f}{dx^3}$$

$$f'''(x)$$

BASTA

$$\frac{d^4 f}{dx^4}$$

$$f^{(4)}(x)$$

$$\frac{d^{2007} f}{dx^{2007}}$$

$$f^{(2007)}(x) = \text{derivata } 2007\text{-esima}$$

Teorema di De L'Hôpital

Supponiamo di dover calcolare  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  ( $x_0 \in \mathbb{R}$ )

Supponiamo 3 cose:

1) un po' di burocrazia  $\rightarrow g \neq 0$  in un intorno di  $x_0$  (frazionare  $x_0$ )  
 $\rightarrow g' \neq 0$   $\rightarrow$   $f'$  e  $g'$  devono esistere

2) il limite sia del tipo  $\frac{0}{0}$  oppure  $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$

3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  esista e  $\in \mathbb{R}$  (escluso solo il caso 2)

Tesi  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Operativamente - Devo calcolare il limite di  $\frac{f(x)}{g(x)}$ . Se questo viene del tipo  $\frac{0}{0}$  oppure  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$  provo a calcolare il limite di  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Se questo esiste ho finito. Se è ancora  $\frac{0}{0}$  oppure  $\frac{\infty}{\infty}$  vado avanti calcolando il limite di  $\frac{f''(x)}{g''(x)}$  e così via.

— 0 — 0 —

**ACHTUNG 1**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{H\ddot{o}p.}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{1} = 0$

NOOO!!! Il limite iniziale non era  $\frac{0}{0}$  oppure  $\frac{\infty}{\infty}$

**ACHTUNG 2**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{H\ddot{o}p.}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{1} = \text{N.E.}$

NOOO!!! Se il limite di  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  non esiste NON SI PUÒ CONCLUDERE NULLA

Esempio 1  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right) x \quad 0 \cdot +\infty$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\substack{f(x) \\ g(x)}}{=} \frac{0}{0} \Rightarrow \text{posso applicare H\ddot{o}p.}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$

Esempio 2  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( \frac{\pi}{2} - \arctan n \right) = \text{uso criterio funzioni} \rightarrow \text{succ.}$   
 $x = n$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$



Esempio 3  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\sin x)}{\log x}$

$\frac{-\infty}{-\infty}$  posso applicare Hôpital

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} \cdot x = 1$$

Esempio 4  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + x^4}{x^3 + x^4}$

In maniera elementare:

Ho fatto il limite solo su un pezzo !!!

$$\frac{\sin x - x + x^4}{x^3 + x^4} = \frac{\cancel{x} \left( \frac{\sin x}{x} - 1 + x^3 \right)}{\cancel{x} (x^2 + x^3)} = \frac{x^3}{x^2 + x^3} =$$

$$= \frac{\cancel{x^2} \cdot x}{\cancel{x^2} (1+x)} = \frac{x}{1+x} \rightarrow 0$$

NON SI FANNO I LIMITI METÀ PER VOLTA

Con Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + x^4}{x^3 + x^4} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + 4x^3}{3x^2 + 4x^3} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 12x^2}{6x + 12x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + 24x}{6 + 24x} = -\frac{1}{6}$$

Esempio 5  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \cos x + 3}{2x^2 - 4}$

$\frac{+\infty}{+\infty}$   $[x^2 + \cos x + 3 \geq x^2]$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sin x}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \cos x}{4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{4} \right)$$

$= \text{N.E.}$

$\Rightarrow$  Non si può dire nulla

$$\cancel{x^2} \left( 1 + \frac{\cos x}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right) \rightarrow \frac{1}{2}$$

### FORMULA DI TAYLOR

Data una funzione  $f(x)$ , sotto certe ipotesi per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste un unico polinomio  $P_n(x)$  di grado  $\leq n$  tale che

$f(x)$  deve avere almeno  $n$  derivate in  $x=0$

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

↓ Posso approssimare  $f(x)$  vicino a zero con il polinomio  $P_n(x)$  commettendo un errore che è  $o(x^n)$

Inoltre  $P_n(x)$  è dato dalla seguente formula

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

↑ Polinomio di Taylor di  $f(x)$  di ordine  $n$

### SVILUPPI DI TAYLOR

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4 + \dots$$

Caso particolare :  $\boxed{\alpha = -1}$

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6$$

## MATEMATICA I

ORA 27

Titolo nota

18/10/2007

Giustificazione sviluppi di Taylor

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Esempio 1  $f(x) = e^x$ ,  $f'(x) = e^x$ ,  $f''(x) = e^x$ , ...,  $f^{(k)}(x) = e^x$

Quindi  $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$  e pertanto

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Esempio 2  $f(x) = \sin x$ ,  $f'(x) = \cos x$ ,  $f''(x) = -\sin x$ ,  $f'''(x) = -\cos x$   
 $f^{(4)}(x) = \sin x$ ,  $f^{(5)}(x) = \cos x$  e così via

$$f^{(2007)}(x) = -\cos x \quad (\text{periodica di periodo 4})$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1$$

$$0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$$

$$P_n(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \dots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

— 0 — 0 —

Esempio 3  $f(x) = \cos x$ ,  $f'(x) = -\sin x$ ,  $f''(x) = -\cos x$ ,  $f'''(x) = \sin x$   
 $f^{(4)}(x) = \cos x$ ,  $f^{(5)}(x) = -\sin x$

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 0, \dots \quad 1, 0, -1, 0$$

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Esempio 4  $f(x) = \log(1+x)$   $f'(x) = \frac{1}{1+x}$   
 $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$   $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$   
 $f^{(4)}(x) = -\frac{3 \cdot 2}{(1+x)^4}$   $f^{(5)}(x) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{(1+x)^5}$

In conclusione:  $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$  Per esercizio dimostrarla x induzione

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} (k-1)!$$

Il termine di grado  $k$  nel polinomio di Taylor è

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{k!} x^k = (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Esempio 1 Calcolare il polinomio  $P_5(x)$  per  $f(x) = \sin x$

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$f(x) = P_5(x) + o(x^5)$$

Esempio 2 Calcolare  $P_5(x)$  per  $f(x) = \cos x$

$$P_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \quad f(x) = P_5(x) + o(x^5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \quad f(x) = P_4(x) + o(x^4)$$

Esempio 3

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{VERA Taylor con } n=3$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \quad \text{VERA Taylor con } n=4$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^2) \quad \text{VERA} \quad \sin x = x + o(x^2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x) \quad \text{VERA} \quad \sin x = x + o(x)$$

Esempio 4 $x \rightarrow 0$ 

$$\frac{\sin x - x + x^4}{x^3 + x^4}$$

Taylor con  $n=3$ 

$$\frac{\sin x - x + x^4}{x^3 + o(x^3)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} - x + x^4 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)}$$

$$\frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{x^3 \left( -\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right)}{x^3 \left( 1 + \frac{o(x^3)}{x^3} \right)} \rightarrow -\frac{1}{6}$$

$$\frac{\sin x - x + x^4}{x^3 + x^4} \stackrel{n=5}{=} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) - x + x^4}{x^3 + x^4}$$

$$= \frac{-\frac{x^3}{6} + x^4 + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{x^3 + x^4}$$

$$= \frac{x^3 \left( -\frac{1}{6} + x + \frac{x^2}{120} + \frac{o(x^5)}{x^3 x^2} \right)}{x^3 (1 + x)} \rightarrow -\frac{1}{6}$$

$$\frac{\sin x - x + x^4}{x^3 + x^4} \stackrel{n=2}{=} \frac{x + o(x^2) - x + x^4}{x^3 + x^4} = \frac{o(x^2)}{x^3 + x^4}$$

$$= \frac{o(x^2)}{o(x^2)} = \text{BOH !!!}$$

Esempio 3  $f(x) = \sin x + 2 \cos x$ . Calcolare  $P_3(x)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad ; \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$2 \cos x = 2 - x^2 + o(x^3)$$

$$\sin x + 2 \cos x = x - \frac{x^3}{6} + 2 - x^2 + o(x^3)$$

$$= 2 + x - x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$P_3(x) = 2 + x + o(x)$$

Esempio 4  $f(x) = e^x \cdot \sin x$  ordine 3

$$= \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \cdot \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)$$

$e^x$   $\sin x$

$$= x - \frac{x^3}{6} + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Esempio 5  $f(x) = \log(1+x^2)$  ordine 6

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^7)$$

*il termine successivo sarebbe  $x^8$*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

*il succ. sarebbe  $x^5$*

$$\sin x^4 = x^4 - \frac{x^{12}}{6} + o(x^{12})$$

*il succ. sarebbe  $x^{20}$*

$$+ o(x^{14})$$

$$+ o(x^{19})$$

## MATEMATICA I

ORA 28

Titolo nota

19/10/2007

## FUNZIONI IPERBOLICHE

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

↑  
coseno iperbolico

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Simmetrie

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x \quad \text{PARI} \quad \cosh 0 = 1$$

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh x \quad \text{DISPARI} \quad \sinh 0 = 0$$

$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh(x)}{\cosh(x)} = -\tanh(x) \quad \text{DISPARI}$$

$$(\cosh x)' = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$(\sinh x)' = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$\sinh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{2} =$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{2}$$

$$= 2 \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2 \cosh x \cdot \sinh x$$

Per esercizio: trovare la formula per  $\cosh(2x)$



$$\cos^2 x = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}$$

$$\sin^2 x = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$$

$$\boxed{\cos^2 x - \sin^2 x = 1} \quad \text{Relazione fondamentale}$$

Sviluppi di Taylor (Fare per esercizio calcolando le derivate successive)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

$$= \frac{1}{2} \left( 1 + \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} + \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!} + \cancel{\frac{x^5}{5!}} + \dots \right.$$

$$\left. + 1 - \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!} - \cancel{\frac{x^5}{5!}} + \dots \right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Termini di grado pari  
nello sviluppo di  $e^x$   
(come lo sviluppo di  
 $\cos x$ , soltanto con tutti +)

$$\sin x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

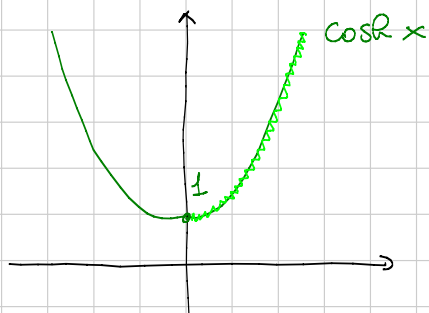
termini di grado dispari di  $e^x$

Nota bene:  $\cos x + \sin x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x$

Grafico di  $\cosh x$ 

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{è una funzione crescente per } x \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty$$



Vista come funzione

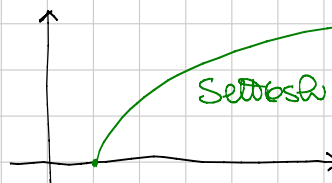
$$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [1, +\infty)$$

è iniettiva e surgettiva, dunque invertibile. L'inversa è una funzione

$$g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{detta}$$

$$g(x) = \text{Sett} \cosh x$$

↑  
Settore

Formula per  $\text{Sett} \cosh x$ 

$$\cosh x = y \quad \leadsto \quad \text{ricavare } x \text{ in funzione di } y$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y; \quad e^x + e^{-x} = 2y$$

Pongo  $z = e^x$

$$z + \frac{1}{z} = 2y$$

$$z^2 - 2yz + 1 = 0$$

eq. di 2° grado in  $z$

$$z_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Prendo  $z = y + \sqrt{y^2 - 1}$

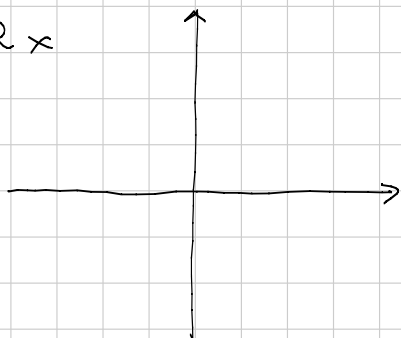
per essere la sol. nel "ramo destro" del grafico

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1} \quad \rightarrow \quad x = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

$$= \text{Sett} \cosh y$$

Per esercizio  $\leadsto$  ricavare la formula per  $\text{Sett} \sinh x$

$\sinh x$

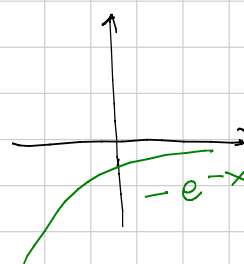
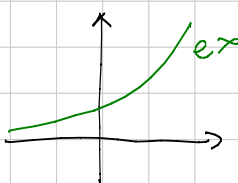


$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$e^x$  funzione crescente

$e^{-x}$  funzione decrescente

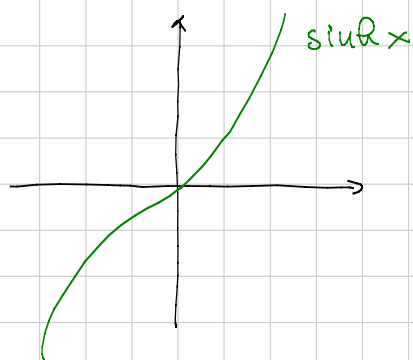
$-e^{-x}$  funzione crescente



$\sinh x =$  somma di 2 funzioni cresc.

$=$  funzione crescente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = +\infty$$



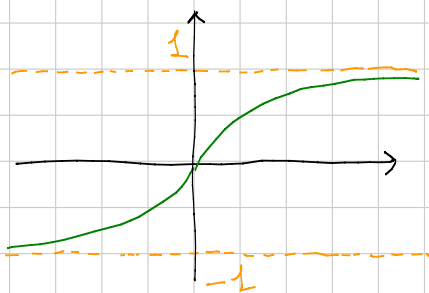
Vista come funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è invertibile.

La sua inversa è  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  detta

$$g(x) = \text{Sett} \sinh x$$

— o — o —

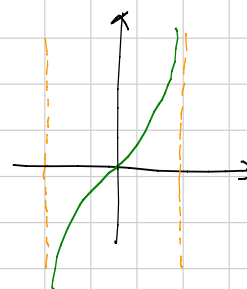
$\tanh x \leadsto$  (verificare quando avremo fatto i grafici di funzione)

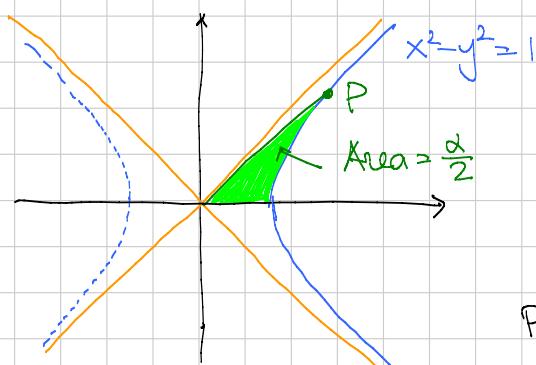
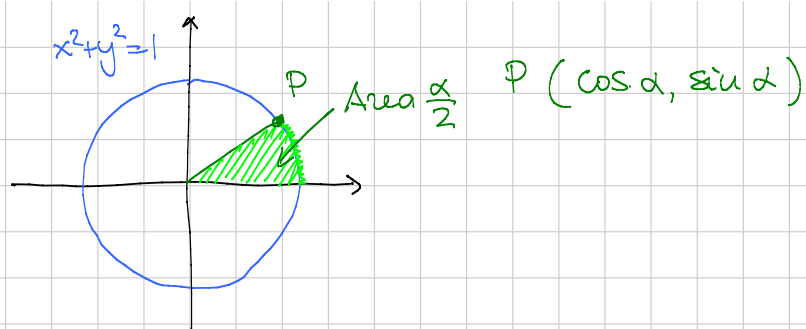


L'inversa è

$$g(x) = \text{Sett} \tanh x$$

$$g: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$





Fissato  $\alpha \in \mathbb{R}$ , cerco un punto  $P$  sull'iperbole in modo che l'area del settore sia  $\frac{\alpha}{2}$

Allora  $P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$

$P$  sta sull'iperbole  $\Rightarrow \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1$

Un filo della luce sospeso tra 2 pali



si dispone secondo un tratto del grafico di  $\cos x$ .

## MATEMATICA I

ORA 29

Titolo nota

19/10/2007

"Dimostrazione" della formula di Taylor.

CASO PARTICOLARE  $n=3$ . Devo dimostrare che

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0$$

cioè  $f(x) - f(0) - f'(0)x - \dots - \dots = o(x^3)$

Divido per  $x^3$  e faccio il lim per  $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x - \frac{f''(0)}{2}x^2 - \frac{f'''(0)}{6}x^3}{x^3} = \frac{0}{0} \text{ H\o{p}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0) - f''(0) \cdot x - \frac{f'''(0)}{2}x^2}{3x^2} = \frac{0}{0} \text{ H\o{p}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) - f''(0) - f'''(0)x}{6x} = \frac{0}{0} \text{ H\o{p}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'''(x) - f'''(0)}{6} = f'''(0) - f'''(0) = 0$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$e^{2x} = 1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + \frac{(2x)^4}{24} + o(x^4)$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$e^{x^2} = 1 + (x^2) + \frac{(x^2)^2}{2} + o(x^4) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

↑  
posso mettere  $o(x^5)$

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{6} + \frac{(\sin x)^4}{24} + o(\sin^4 x)$$

Ora  $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$  lo sostituisco al posto di ogni  $\sin x$

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6} \left(\right)^3 + \frac{1}{24} \left(\right)^4 + o(\sin^4 x)$$

$$= 1 + x - \cancel{\frac{x^3}{6}} + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \cancel{\frac{1}{6}x^3} + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

doppio prodotto  
di  $x$  per  $\left(-\frac{x^3}{6}\right)$

$$-\frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{-4+1}{24}$$

$$e^x = 1 + x + \dots + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$= 1 + x + \dots + \frac{x^4}{24} + x^4 \omega(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \omega(x) = 0$$

$$e^{\sin x} = 1 + (\sin x) + \dots + \frac{(\sin x)^4}{24} + \sin^4 x \omega(\sin x)$$

Divido il termine in questione per  $x^4$  e faccio il limite

$$\frac{\sin^4 x \omega(\sin x)}{x^4} = 0$$

↓ volendo con cambio  
di variabili  $y = \sin x$

↓ vorrei che fosse  
 $o(x^4)$

↑  
VERA!!!

$\sin(x+x^3) \rightsquigarrow$  sviluppo di ordine 3

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\sin(x+x^3) = (x+x^3) - \frac{(x+x^3)^3}{6} + o((x+x^3)^3)$$

$$= x + x^3 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$= x + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$$

↓ Si potrebbe mettere anche  $o(x^4)$  perché  $\sin(x+x^3)$  è una funzione DISPARI (verificare), dunque nello sviluppo  $x^4$  non c'è

$\cos(\sin x)$  sviluppo di ordine 4

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^4}{24} + o(\sin^4 x)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^2 + \frac{1}{24} \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left( x^2 - \frac{x^4}{3} \right) + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24} x^4 + o(x^4)$$

↑  
DOPPIO PROD

$$\sin(\cos x) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\sin(\cos x) = \cos x - \frac{1}{6} \cos^3 x + \frac{1}{120} \cos^5 x + o(\cos^5 x)$$

$$= \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right) - \frac{1}{6} \left( \right)^3 + \frac{1}{120} \left( \right)^5 + o( )$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{6} \left( 1 + \text{tripli prod.} \right) + \frac{1}{120} (1 + \dots) + o(x^5)$$

QUESTE COSE NON SI FAUNO !!!

$\cos(\sin x)$  Quando  $x \rightarrow 0$ , ho che  $\sin x \rightarrow 0$ , quindi posso usare lo sviluppo di  $\cos t$  che vale per  $t \rightarrow 0$

$\sin(\cos x)$  Quando  $x \rightarrow 0$ , ho che  $\cos x \rightarrow 1$ , quindi NON posso usare lo sviluppo di  $\sin t$  che vale per  $t \rightarrow 0$

$e^{\sin x}$  OK  $\sin x \rightarrow 0$   $e^t$  con  $t \rightarrow 0$

$\sin(e^x)$  NO  $e^x \rightarrow 1$   $\sin t$  con  $t \rightarrow 1$ , e non  $t \rightarrow 0$

Esempio 1  $\sin(\arctan(\log(1+x^2))) = x^2 + o(x^2)$

$$\log(1+x) = x + o(x) \quad \log(1+x^2) = x^2 + o(x^2)$$

$$\arctan(\log(1+x^2)) =$$

$$= \arctan(x^2 + o(x^2)) = x^2 + o(x^2)$$

$\arctan t = t + o(t)$

$$\sin(\arctan \dots) = \sin(x^2 + o(x^2)) = x^2 + o(x^2)$$

$\sin t = t + o(t)$

Esempio 2  $\sqrt{1+\sin x}$  sviluppo di ordine 2

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$



$$\begin{aligned}
 (1 + \sin x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2} (\sin x) - \frac{1}{8} (\sin x)^2 + o(\sin^2 x) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + o(x^2)
 \end{aligned}$$

Esempio 3

$$\begin{aligned}
 \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot (\cos x)^{-1} = \\
 &= \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \underbrace{\left( 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^{-1}}_{\substack{(1+t)^{-1} \text{ con } t = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ " \\ 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 + \dots}}
 \end{aligned}$$

## MATEMATICA I

Titolo nota

ORA 30

23/10/2007

SVILUPPO DI TAYLOR CON CENTRO IN UN PUNTO  $x_0 \neq 0$ 

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Se  $x_0 \neq 0$  possiamo pensare di considerare la funzione

$$g(R) = f(x_0 + R) \quad \text{con } R \text{ piccolo}$$

Posso sviluppare come sopra la funzione  $g(R)$  per  $R \rightarrow 0$ 

$$g(R) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} R + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!} R^n + o(R^n)$$

$$g(R) = f(x_0 + R), \quad g'(R) = f'(x_0 + R), \quad g''(R) = f''(x_0 + R)$$

$$g(0) = f(x_0), \quad g'(0) = f'(x_0), \quad \text{in generale } g^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0 + R)$$

quindi

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} R + \frac{f''(x_0)}{2!} R^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} R^n + o(R^n)$$

Se  $x_0 + R = x$ , allora  $R = x - x_0$  e sostituendolo

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

FORMULA DI TAYLOR CON CENTRO IN  $x_0$



$$\arctan(1+R) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}R^2 + o(R^2)$$

$$\begin{aligned} \arctan\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \frac{1}{4}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o\left(\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2\right) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{4} + o(x^2) \end{aligned}$$

Se avessi voluto lo stesso sviluppo di ordine  $n=4$

$$\arctan\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{24}\right)^2 + o\left(\left(\frac{x^4}{24}\right)^2\right)$$

$\uparrow$   
cos x di ordine 4

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} - \frac{x^4}{16} + o(x^4)$$

$\uparrow$   
unico termine che sopravvive da  $R^2$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Esempio 3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\cos x) - \frac{\pi}{4} + \frac{x^2}{4}}{\log(1+x^2+x^6) \cdot \sin(\sin^2(x-x^3))}$$

Sviluppo Numeratore:  $\arctan(\cos x) - \frac{\pi}{4} + \frac{x^2}{4} =$

$$= \cancel{\frac{\pi}{4}} - \cancel{\frac{x^2}{4}} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \cancel{\frac{\pi}{4}} + \cancel{\frac{x^2}{4}} = -\frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Devo sviluppare il Denominatore all'ordine 4

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$$

$$\begin{aligned}\log(1+x^2+x^6) &= x^2+x^6 - \frac{1}{2}(x^2+x^6)^2 + \frac{1}{3}(x^2+x^6)^3 + o(x^4) \\ &= x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

$$\sin(x-x^3) = \sin(x+o(x)) = x+o(x)$$

$$\sin^2(x-x^3) = (x+o(x))^2 = x^2+o(x^2)$$

$$\sin(\sin^2(x-x^3)) = \sin(x^2+o(x^2)) = x^2+o(x^2)$$

$$\log(1+x^2+x^6) = x^2+o(x^2)$$

$$\sin(\quad) \cdot \log(\quad) = x^4 + o(x^4) = \text{Denominatore}$$

$$\begin{aligned}\frac{\text{Num.}}{\text{Den.}} &= \frac{-\frac{x^4}{24} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{\cancel{x^4} \left(-\frac{1}{24} + \frac{o(x^4)}{x^4}\right)}{\cancel{x^4} \left(1 + \frac{o(x^4)}{x^4}\right)} \\ &\rightarrow -\frac{1}{24}\end{aligned}$$

Esempio 4

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sin \frac{1}{n} - \sinh \frac{1}{n} \right) \left( \log(1+n^3) - 3 \log n \right)$$

(0 - 0) (∞ - ∞)

$$\begin{aligned}\log(1+n^3) - 3 \log n &= \log(1+n^3) - \log(n^3) \\ &= \log\left(\frac{1+n^3}{n^3}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

Pongo  $x = \frac{1}{n}$  (quando  $n \rightarrow +\infty$ , ho che  $x \rightarrow 0^{(+)}$ )

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x - \sinh x) \log(1+x^3) = 0 \cdot 0 = 0$$

Se fosse stato

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 2x}{\log(1+x^3)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - \left(x + \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} - \cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Il Denominatore poteva essere

$$\log(1+x^3) + \boxed{x \cdot \operatorname{arctan} x \cdot \arcsin(x^2 + \sin^2 x^3)} \\ \sim x^4 = o(x^3)$$

## MATEMATICA I

Titolo nota

ORA 31

23/10/2007

## SERIE NUMERICHE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \text{somma di tutti gli (infiniti) elementi di una successione } a_n.$$

Cosa vuol dire sommare infiniti addendi?

## SOMME PARZIALI

$$s_0 = a_0$$

$$s_1 = a_0 + a_1$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$s_k = a_0 + a_1 + \dots + a_k$$

$$= \sum_{n=0}^k a_n \quad \leftarrow \text{NUMERO FINITO DI ADDENDI}$$

La serie (cioè la somma degli infiniti addendi) si definisce come

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \text{si dice che la serie CONVERGE ad } l \\ +\infty & \text{" la serie diverge a } +\infty \\ -\infty & \text{" " " " } -\infty \\ \text{N.E.} & \text{" la serie è INDETERMINATA} \end{cases}$$

Esempi banali

$$\textcircled{1} a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow s_k = 0 + 0 + \dots + 0 = 0 \rightarrow 0$$

$$\textcircled{2} a_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow s_k = 1 + 1 + \dots + 1 = k+1$$

$$a_0 + a_1 + \dots + a_k$$

$$s_k = k+1 \Rightarrow s_k \rightarrow +\infty \Rightarrow \text{la serie diverge}$$

$$\textcircled{3} \quad a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$s_0 = a_0 = 1$$

$$s_1 = a_0 + a_1 = 1 - 1 = 0$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$s_3 = 0$$

$$s_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ pari} \\ 0 & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k \text{ N.E.}$$

$\Rightarrow$  La serie è INDETERMINATA

### SERIE TELESCOPICHE

1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = \underbrace{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}}_{a_1} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_{a_2} = 1 - \frac{1}{3}$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \underbrace{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}}_{a_1} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_{a_2} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{a_3} = 1 - \frac{1}{4}$$

In generale "dovrebbe essere"  $s_k = 1 - \frac{1}{k+1}$

La dimostrazione si fa per induzione

Passo base  $k=1$   $s_1 = 1 - \frac{1}{2} = a_1$  VERO!

Passo induttivo Ipotesi  $s_k = 1 - \frac{1}{k+1}$

Tesi  $s_{k+1} = 1 - \frac{1}{k+2}$

Dim.

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= \overbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_k}^{s_k} + a_{k+1} = s_k + a_{k+1} = \text{(uso ipotesi)} \\ &= \underbrace{1 - \frac{1}{k+1}}_{s_k} + \underbrace{\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}}_{a_{k+1}} = 1 - \frac{1}{k+2} \quad \text{Tesi dimostrata} \end{aligned}$$



Essendo  $s_k = 1 - \frac{1}{k+1}$  si ha che  $s_k \rightarrow 1$ ,

quindi la serie converge a 1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1$

$$\boxed{2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log\left(1+1\right) + \log\left(1+\frac{1}{2}\right) + \log\left(1+\frac{1}{3}\right) + \dots$$

$$s_1 = a_1 = \log 2$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = \log 2 + \log\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \log 2 + \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{3}\right)$$

Oss.  $\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1) - \log n$

$$s_1 = a_1 = \log 2 - \log 1$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = \underbrace{\log 2 - \log 1}_{a_1} + \underbrace{\log 3 - \log 2}_{a_2} = \log 3$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \underbrace{\log 2 - \log 1}_{a_1} + \underbrace{\log 3 - \log 2}_{a_2} + \underbrace{\log 4 - \log 3}_{a_3} = \log 4$$

$$s_k = \log(k+1) \rightsquigarrow \text{Dimostrare (esercizio) per induzione!}$$

$$s_k \rightarrow +\infty \Rightarrow \text{la serie diverge a } +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan(n! + 2^n)}{n^2 + 3 \sin n + 7}$$

$\rightsquigarrow$  impossibile scrivere una formula esplicita per  $s_k$

CRITERI DI CONVERGENZA  $\rightsquigarrow$  permettono di stabilire se una serie converge o no senza calcolare gli  $s_k$

Non permettono di calcolare la SOMMA nel caso in cui la serie converga

### PROPRIETÀ ALGEBRICHE DELLE SERIE

Siano  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ . Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

VERA TRANNE NEI CASI DI INDETERMINAZIONE e  
NEL CASO  $\infty - \infty$

Se  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$   $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$  NON È IL PRODOTTO DELLE SERIE

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1$$

Idea di come si dimostrano

$$\sum a_n \quad \sum b_n \quad \sum \overset{c_n}{(a_n + b_n)}$$

$S_k^{(a)} = a_0 + a_1 + \dots + a_k$  somme parziali prima serie

$S_k^{(b)} = b_0 + b_1 + \dots + b_k$  " " seconda "

$$\begin{aligned} S_k^{(c)} &= c_0 + c_1 + \dots + c_k = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \dots + (a_k + b_k) \\ &= a_0 + \dots + a_k + b_0 + \dots + b_k = S_k^{(a)} + S_k^{(b)} \end{aligned}$$

Se  $S_k^{(a)} \rightarrow l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$  e  $S_k^{(b)} \rightarrow l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ , allora

$S_k^{(c)} \rightarrow l_1 + l_2$  tranne nel caso  $+\infty - \infty$ .

## CONDIZIONE NECESSARIA

Se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  CONVERGE, allora  $a_n \rightarrow 0$

UTILIZZO OPERATIVO : Se  $a_n$  non tende a zero (cioè  
 o tende ad alto oppure non ha limite)  
 allora di sicuro la serie non converge (cioè può  
 tendere a  $+\infty$ , a  $-\infty$ , o essere indeterminata)

Dim. cond. necessaria

$$s_{k+1} = s_k + a_{k+1}$$

$$a_{k+1} = s_{k+1} - s_k \rightarrow 0$$

$\downarrow$                    $\downarrow$   
 $l$                    $l$

Se la serie converge, vuol dire che  $s_k \rightarrow l \in \mathbb{R}$

## MATEMATICA I

ORA 32

Titolo nota

24/10/2007

Serie Numeriche

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

← può anche essere diverso

Somme parziali

$$s_0 = a_0$$

$$s_1 = a_0 + a_1$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$s_k = a_0 + a_1 + \dots + a_k = \sum_{n=0}^k a_n$$

Il limite delle  $s_k$  individua il comport. della serie

Condizione necessaria. Se  $\sum_{n=0}^{\infty}$  converge, allora  $a_n \rightarrow 0$

In particolare; se  $a_n$  non tende a 0, allora la serie non converge.

CRITERI DI CONVERGENZA: come stabilire se una serie converge o no senza calcolare esplicitamente le  $s_k$ .

SERIE  $\begin{cases} \nearrow \text{A TERMINI } \geq 0 \text{ (seguo costante)} \\ \searrow \text{A TERMINI DI SEGNO VARIABILE} \end{cases}$

→ Basta definitivamente

Oss. fondamentale Se a una serie io modifico UN NUMERO FINITO di termini (definitivamente resta tutto uguale) il comportamento non cambia (eventualmente cambia il numero al quale convergono le  $s_k$ )

Teorema Una serie a termini  $\geq 0$  (definitivamente) può solo

- convergere
- divergere a  $+\infty$

Dim. In questo caso la successione  $s_k$  è (debolmente) CRESCENTE  
 → vedi teorema succ. monotone.

Esempio 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{n^2+27}{n^2+3n+15}}$$

$a_n$

È improbabile trovare  
una formula per le  $S_k$

$a_n \geq 0$  sempre  $\Rightarrow$  può convergere o div. a  $+\infty$ .

Controllo condizione necessaria

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+27}{n^2+3n+15} = 1$$

Poiché il limite non è zero, di sicuro la serie NON CONVERGE.  
Quindi diverge a  $+\infty$ .

Esempio 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+27}{n^2+3n+15}$$

$a_n \geq 0$  sempre.  $a_n \rightarrow 0$  quindi può convergere (ma non è obbligata a farlo). Per ora BOH.

### CRITERI PER SERIE A TERMINI $\geq 0$

- ① RADICE
  - ② RAPPORTO
  - ③ CONFRONTO
  - ④ CONFRONTO ASINTOTICO
- $\nearrow$  CASI STANDARD  
 $\searrow$  CASI LIMITE

① RADICE. Sia  $a_n \geq 0$  definitivamente. Supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora

- $l > 1 \Rightarrow$  la serie diverge
- $l < 1 \Rightarrow$  la serie converge
- $l = 1 \Rightarrow$  BOH

② RAPPORTO Sia  $a_n > 0$  definitivamente. Supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}. \text{ Allora come nella radice.}$$

③ CONFRONTO Sia  $0 \leq a_n \leq b_n$  definitivamente.  
Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

ACHTUNG !!! Non ci sono altre implicazioni.

④ CONFRONTO ASINTOTICO (CASO STANDARD)

Siano  $a_n$  e  $b_n$  2 succ. con  $a_n \geq 0$  e  $b_n > 0$ . Supp. che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} \text{ esista e sia un certo } l \neq 0 \neq +\infty$$

Allora  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  hanno lo stesso comportamento  
(se una conv, l'altra conv.; se una div. a  $+\infty$ , l'altra anche)

Utilizzo operativo del confronto asintotico: devo studiare  $\sum a_n$ . Cerco una  $\sum b_n$  che so studiare in modo che  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l \neq 0 \neq +\infty$ . A quel punto ho finito.

### TABELLINA DI SERIE NOTE

① SERIE GEOMETRICA  $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$  ( $a$  è un parametro)

$$= 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \begin{cases} \text{per } -1 < a < 1 & \text{converge a } \frac{1}{1-a} \\ a \geq 1 & \text{diverge a } +\infty \\ a \leq -1 & \text{indeterminata} \end{cases}$$

② SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

$$\text{Serie armonica: } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Armonica generalizzata:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$   $\alpha =$  esponente fissato  
 (per  $\alpha=1$  è l'armonica "vera")

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \rightarrow$  converge (ma non si sa la somma) se  $\alpha > 1$   
 $\rightarrow$  diverge a  $+\infty$  se  $\alpha \leq 1$

### ③ PARENTE DELLA ②

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}} \rightarrow$  converge se  $\alpha > 1$   
 $\rightarrow$  diverge a  $+\infty$  se  $\alpha \leq 1$

Esempio 2  $\rightarrow$  continua

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2+27}{n^3+3n+15}}_{a_n}$$

$a_n \rightarrow 0$  e  $a_n \geq 0$  sempre. Quindi sono possibili 2 comp  
 \* converge  
 \* diverge a  $+\infty$

BRUTALE:  $a_n \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$  armonica con  $\alpha=1$   
 $\Rightarrow$  DIVERGE A  $+\infty$

Rigoroso: confronto asintotico con  $b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^2+27}{n^3+3n+15}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+27}{n^3+3n+15} \cdot n$$

$$= 1 \neq 0 \neq +\infty$$

Poiché il limite di  $\frac{a_n}{b_n}$  è  $\neq 0$  e  $\neq +\infty$  (ed esiste)

$\sum a_n$  e  $\sum b_n$  si comportano allo stesso modo.

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$  diverge (è in tabellina) Quindi

$\sum a_n = +\infty$  (diverge a  $+\infty$ ).



## MATEMATICA I

Titolo nota

ORA 33

24/10/2007

Serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

Si trova la formula per le somme parziali  $s_k$ 

$$s_k = 1 + a + a^2 + \dots + a^k = \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} \quad (\text{se } a \neq 1)$$

↑  
Dimostrata a suo tempo per induzione

Se  $a > 1$   $s_k = \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} \rightarrow +\infty$

Se  $-1 < a < 1$  allora  $a^{k+1} \rightarrow 0$  e quindi

$$s_k \rightarrow \frac{0 - 1}{a - 1} = \frac{1}{1 - a} \quad (\text{la serie converge})$$

Se  $a = -1$

$$s_k = \frac{(-1)^{k+1} - 1}{-2} = \begin{cases} \frac{-2}{-2} = 1 & k \text{ pari} \\ \frac{0}{-2} = 0 & k \text{ dispari} \end{cases}$$

$$s_k = 1, 0, 1, 0, 1, 0 \quad \leadsto \text{non ha limite}$$

Se  $a < -1$

$$a^{k+1} \begin{cases} \rightarrow +\infty & \text{sui } k \text{ dispari} \\ \rightarrow -\infty & \text{sui } k \text{ pari} \end{cases}$$

quindi  $s_k$  non ha limite (serie indeterminata)

Se  $a = 1$  non posso usare la formula precedente per calcolare  $s_k$ .

In questo caso  $s_k = 1 + a + \dots + a^k = 1 + 1 + \dots + 1 = k + 1$

quindi  $s_k \rightarrow +\infty$  in questo caso

**Dim. CONFRONTO** Ipotesi  $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$S_k^{(a)} = a_0 + a_1 + \dots + a_k; \quad S_k^{(b)} = b_0 + b_1 + \dots + b_k$$

$$S_k^{(a)} \leq S_k^{(b)} \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}$$

$$\sum a_n = +\infty \Rightarrow S_k^{(a)} \rightarrow +\infty \Rightarrow S_k^{(b)} \rightarrow +\infty$$

$\uparrow$  definitiz.       $\uparrow$  confronto a 2 sui limiti       $\downarrow$  definitiz.

$$\sum b_n = +\infty$$

$$\sum b_n \text{ converge} \Rightarrow S_k^{(b)} \rightarrow l \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{è impossibile che } S_k^{(a)} \rightarrow +\infty$$

$\uparrow$  definitiz.

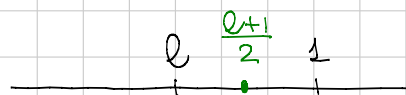
$\Rightarrow$  è impossibile che  $\sum a_n = +\infty \Rightarrow$  (trattandosi di una serie a termini  $\geq 0$ ) l'unica possibilità è che converge

**Dim. RADICE**  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$

1° caso:  $l > 1$ . Poiché  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l > 1$ , allora (criterio della radice applicato ai limiti)  $a_n \rightarrow +\infty$ , ma allora la condiz. nec. non è verificata  $\Rightarrow$  la serie non converge  $\Rightarrow$  (essendo a termini  $\geq 0$ ) diverge a  $+\infty$ .

2° caso  $0 \leq l < 1$ . Poiché  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l < 1$ , allora  $a_n \rightarrow 0$  quindi la condiz. nec. è verificata, quindi la serie può convergere

Poiché  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$ , allora definitivamente



$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}, \text{ cioè } a_n \leq \underbrace{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n}_{b_n}$$

$\sum b_n$  è una geometrica con parametro  $\frac{l+1}{2} < 1$  ( $l > 0$ )

$\sum b_n$  converge, quindi  $\sum a_n$  (che è a termini  $\geq 0$ )

converge.

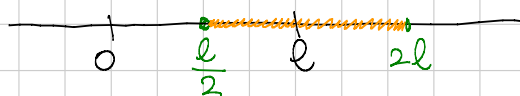
DIM. CONFRONTO ASINTOTICO STANDARD

Ipotesi

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l \neq 0 \neq +\infty$$

(quindi  $> 0$  perché  $a_n \geq 0$   
e  $b_n > 0$ )

Poiché  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l$ , allora



definitivamente

$$\frac{l}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2l$$

Poiché  $b_n > 0$  moltiplico e ottengo

$$\frac{l}{2} b_n \leq a_n \leq (2l) \cdot b_n$$

1° caso Supponiamo che  $\sum b_n = +\infty$ , allora ovviamente

$$\frac{l}{2} \sum b_n = +\infty, \text{ e quindi (per la disug. di SINISTRA)}$$

$$\text{anche } \sum a_n = +\infty \text{ (per il confronto tra serie)}$$

2° caso Supponiamo che  $\sum b_n$  converga. Allora

$$\sum (2l) b_n \text{ converge, quindi (disug. di DESTRA)}$$

$$\text{anche } \sum a_n \text{ converge (per confronto tra serie).}$$

CASI LIMITE DI CONFRONTO ASINTOTICO  $a_n \geq 0, b_n > 0$

Supponiamo che  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$ . Allora definitivamente

$$\frac{a_n}{b_n} \leq 1, \text{ cioè } a_n \leq b_n, \text{ quindi}$$

$$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

$$\sum b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

Supponiamo invece che  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$ .

Allora definitivamente  $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$ , cioè  $a_n \geq b_n$ , quindi

$$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$$

$$\sum b_n \text{ converge} \Rightarrow \text{BOH}$$

Osservazione sui limiti Supponiamo  $a_n \geq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n \rightarrow l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$b_n \rightarrow l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$$

NO!!!!!! Allora  $l_1 > l_2$  solo  $l_1 \geq l_2$

Esempio  $a_n = \frac{327}{n}$   $b_n = \frac{1}{n}$   $a_n > b_n \quad \forall n \geq 1$

$$a_n \rightarrow 0 \quad b_n \rightarrow 0$$

LE DISUGUAGLIANZE STRETTE NON PASSANO AL LIMITE

Torniamo alle serie....

①  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$   $a_n \geq 0$ . Uso criterio rapporto ( $a_n > 0$ )

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{converge}$$

Radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{converge}$$

(  $\sqrt[n]{\text{polinomio}} \rightarrow 1$  )

$$\textcircled{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad a_n > 0$$

Radice:  $\sqrt[n]{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e > 1 \Rightarrow \text{diverge}$

Alternativa: controllare la condizione necessaria

$$\textcircled{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^n}{n!} \quad a_n > 0$$

Rapporto:  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 \overset{n+1}{2}}{(n+1)!} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^2 \cancel{2^n}} = \boxed{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2} \cdot \boxed{\frac{2}{n+1}} \rightarrow 0$

$\uparrow \quad \uparrow$   
1      0

$0 < 1 \Rightarrow \text{la serie converge.}$

Radice:  $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^2} \cdot 2}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{la serie converge.}$

$\sqrt[n]{n^2} \rightarrow 1, \sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$

## MATEMATICA I

ORA 34

Titolo nota

24/10/2007

## Esercizio 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{32 + \cos n! + \arctan n^2}{n^3 + 3}$$

$$a_n \geq 0$$

BRUTALE:  $a_n \sim \frac{\text{costante}}{n^3} \Rightarrow \text{CONVERGE}$

Rigoroso: confronto (non asintotico)

$$a_n \leq \frac{85 \leftarrow \text{Num. + grande}}{n^3 \leftarrow \text{Den. + piccolo}} = \underbrace{\quad}_{b_n}$$

$$\sum b_n = \sum \frac{85}{n^3} = 85 \sum \frac{1}{n^3} \quad \text{converge perché armonica gen. con } \alpha = 3 > 1$$

$$\sum b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

## Esercizio 2

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{12 + \cos n^2}{n^2 - 6}$$

$$a_n \geq 0$$

$$\underbrace{\frac{12 + \cos n^2}{n^2 - 6}}_{a_n} \leq \underbrace{\frac{15}{n^2 - 6}}_{b_n}$$

$\sum b_n$  non è immediatamente un'armonica gen.

Studio a parte  $\sum_{n=5}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2 - 6}}_{b_n}$

Per questa faccio il confronto asintotico con  $\sum \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{c_n}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2 - 6}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 - 6} = 1 \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

$\sum b_n$  si comporta come  $\sum c_n$

confronto

$\sum c_n$  converge (armonica gen. con  $\alpha = 2$ )  $\Rightarrow \sum b_n$  conv.  $\Rightarrow \sum a_n$  conv.

$\uparrow$   
C.A.

Esercizio ③  $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$   $a_n > 0$

$$a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \frac{n+2 - n-1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$

$a_n \rightarrow 0 \Rightarrow$  cond. nec. ok  $\Rightarrow$  può convergere

BRUTALE:  $a_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$  aritmetica generalizzata  
con  $\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$  DIVERGE

RIGOROSO: confronto asintotico con  $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (\text{Fare x esercizio})$$

$\frac{1}{2} \neq 0$ ,  $\neq +\infty$ , quindi  $\sum a_n$  si comporta come  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ , cioè DIVERGE

Esempio 4  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$   $a_n > 0$   $\frac{1}{n} \in (0,1)$  e in questa zona il  $\sin$  è  $> 0$

BRUTALE:  $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \Rightarrow$  DIVERGE

RIGOROSO: confronto asintotico con  $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \underset{x=\frac{1}{n}}{=} 1 \neq 0 \neq +\infty \Rightarrow \text{stesso comportamento.}$$

Esempio 5  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n+1} \right)$   $a_n > 0$   
(andrebbe dimostrato e un giorno lo faremo)

BRUTALE 1:  $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$

$$\sin \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n+1}$$

$$a_n \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \text{TROPPO BRUTALE}$$

BRUTALE 2:  $\sinh \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3}$   $\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$\sinh \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}$   $\sinh x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$a_n \sim \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{6n^3} - \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{6n^3} = \frac{1}{3n^3} \Rightarrow \text{armonica gen. cond } \alpha=3$   
 $\Rightarrow \text{CONVERGE}$

RIGOROSO: C.A. con  $b_n = \frac{1}{n^3}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sinh \frac{1}{n} - \sinh \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} =$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - \sinh x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \cancel{x} + \frac{x^3}{6}}{x^3} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} \neq 0$   
 $\neq +\infty \Rightarrow \text{stesso comportamento}$

Esempio 6

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$

$a_n > 0$  per  $n \geq 2$

$\underbrace{\frac{\log n}{n}}_{a_n} \geq \underbrace{\frac{1}{n}}_{b_n}$  definitivamente (non appena  $\log n \geq 1$ )

$\sum b_n$  DIVERGE ( $\alpha=1$ )  $\Rightarrow \sum a_n$  diverge

Esempio 7

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$

$a_n > 0$

$\underbrace{\frac{1}{n^2 \log n}}_{a_n} \leq \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{b_n}$  (non appena  $\log n \geq 1$ )

$\sum b_n$  CONVERGE ( $\alpha=2$ )  $\Rightarrow \sum a_n$  CONVERGE



Esempio 8  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$   $a_n > 0$  per  $n \geq 2$

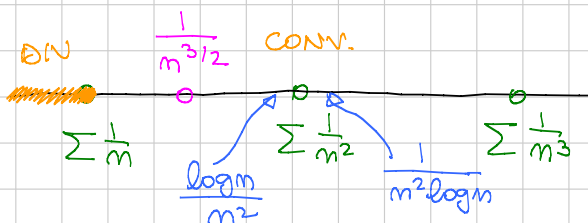
①  $\frac{\log n}{n^2} \geq \frac{1}{n^2}$   $\sum \frac{1}{n^2}$  converge  $\Rightarrow$  BOH

② C.A. con  $b_n = \frac{1}{n}$ .  $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log n}{n^2} \cdot n = \frac{\log n}{n} \rightarrow 0$

Caso limite:  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$ , quindi defiu.  $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$ , cioè  
 $a_n \leq b_n$

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n} = +\infty$  (armonica con  $\alpha=1$ )  $\Rightarrow$  BOH

③



Confronto asintotico con  $b_n = \frac{1}{n^{3/2}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}$

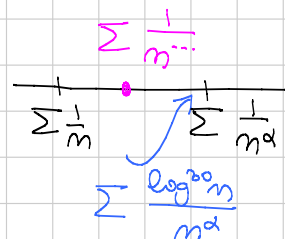
$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{\log n}{n^2}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \frac{\log n}{n^2} \cdot n\sqrt{n} = \frac{\log n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$   
 caso limite

$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq 1$  defiu.  $\Rightarrow a_n \leq b_n$  defiu.

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$  converge ( $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ )  $\Rightarrow \sum a_n$  converge

In generale

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^{\alpha} n}{n^{\alpha}}$  converge  $\Leftrightarrow \alpha > 1$



## MATEMATICA I

ORA 35

Titolo nota

25/10/2007

CRITERI PER STUDIARE SERIE A TERMINI DI SEGNO QUALUNQUE

① CRITERIO DI LEIBNITZ (SERIE A SEGNO ALTERNO)

② CRITERIO ASSOLUTA CONVERGENZA

**LEIBNITZ** Consideriamo la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$ . Supponiamo

- (i)  $\alpha_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (quindi  $(-1)^n \alpha_n$  è alternativ. pos. e neg.)
- (ii)  $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  ( $\alpha_n$  è debolam. decr.)
- (iii)  $\alpha_n \rightarrow 0$

Allora la serie converge.

Oss. Se almeno una delle 3 ipotesi non è verificata, allora BOH (il criterio non si applica)

Oss. Se l'ipotesi che non è verificata è la (iii), allora manca la condizione nec., dunque di sicuro la serie non converge (può div. a  $\pm\infty$ , o essere indebitata)

$a_n = (-1)^n \alpha_n$ . Se  $a_n \rightarrow 0$ , allora  $|\alpha_n| \rightarrow 0$

$$|\alpha_n| = |(-1)^n \alpha_n| = |(-1)^n| \cdot |\alpha_n| = \alpha_n$$

Quindi  $a_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow \alpha_n \rightarrow 0$

Osservazione generale sulle succ. (criterio del valore assol.)

Data una succ.  $a_n$ , si ha che

$$a_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |a_n| \rightarrow 0$$

"Dim" Come è fatta la succ.  $s_k$  in questo caso?

$$s_0 = a_0 \geq 0$$

$$s_1 = a_0 + a_1 = s_0 - \alpha_1$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = s_0 - \alpha_1 + \alpha_2$$



$\Rightarrow s_{2k}$  è una succ. decrescente

$s_{2k+1}$  è una succ. crescente

e tendono allo stesso limite.

Esempio 1  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \quad (i) \alpha_n \geq 0 \quad \text{Ok.} \quad (iii) \alpha_n \rightarrow 0 \quad \text{Ok}$$

$$(ii) \alpha_{n+1} \stackrel{?}{\leq} \alpha_n \quad \frac{1}{n+1} \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{n} \quad \text{Ok!} \Rightarrow \text{La serie converge}$$

Esempio 2  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  converge per Leibnitz per ogni  $\alpha > 0$

Esempio 3  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{5n+1}$   
 $\alpha_n$

$$(i) \alpha_n \geq 0 \quad \text{Ok}$$

$$(ii) \alpha_{n+1} \leq \alpha_n \quad \text{BOT}$$

$$(iii) \alpha_n \rightarrow 0 \quad \text{NO perché } \alpha_n \rightarrow \frac{1}{5}$$

$\Rightarrow$  Di sicuro la serie non converge.

Esempio 4  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \arctan \frac{n}{n^2+2}$   $\alpha_n$

$$(i) \alpha_n \geq 0 \quad \text{Ok}$$

$$(iii) \alpha_n \rightarrow 0 \quad \text{Ok}$$

$$(ii) \alpha_{n+1} \stackrel{?}{\leq} \alpha_n; \quad \cancel{\arctan} \frac{(n+1)}{(n+1)^2+2} \stackrel{?}{\leq} \cancel{\arctan} \frac{n}{n^2+2}$$

$\nwarrow$  strett. crescente

$$\frac{(n+1)}{(n+1)^2+2} \stackrel{?}{\leq} \frac{n}{n^2+2} ; \quad (n+1)(n^2+2) \stackrel{?}{\leq} n(n^2+2n+3)$$

$$\cancel{n^3+2n} + n^2+2 \stackrel{?}{\leq} \cancel{n^3} + 2n^2+3n$$

$n^2+n-2 \geq 0$  Sicuramente vera definitivamente  
(in realtà vera  $\forall n \geq 1$ )

Ipotesi (ii) Ok  $\Rightarrow$  la serie converge.

**ASSOLUTA CONVERGENZA**  $a_n$  a segno qualunque

$$\sum |a_n| \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

Operativamente: devo studiare  $\sum a_n$ . Provo a studiare

$\sum |a_n|$  (questa è a termini  $\geq 0$ , quindi ho + criteri a disposiz.)

$\sum |a_n| \nearrow$  converge  $\rightsquigarrow$  la serie  $\sum a_n$  converge  
 $\searrow$  diverge a  $+\infty \rightsquigarrow$  BOH

Dim.  $a_n = |a_n| + (a_n - |a_n|) = |a_n| - (|a_n| - a_n)$

$$\sum a_n = \underbrace{\sum |a_n|}_{\substack{\downarrow \\ \text{converge per} \\ \text{ipotesi}}} - \sum (|a_n| - a_n)$$

Devo dimostrare che  $\sum (|a_n| - a_n)$  converge

$$0 \leq |a_n| - a_n \leq 2|a_n|$$

$\sum 2|a_n|$  converge (sempre per ipotesi), dunque

$\sum (|a_n| - a_n)$  converge per confronto

$\Rightarrow$  la serie data è differenza di 2 serie a termini  $\geq 0$  convergenti

Esempio 1  $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\cos n}{n^2}}_{a_n}$   $a_n$  è a segni variabili

Prato a studiare  $\sum |a_n|$ , cioè  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$  (termini  $\geq 0$ )

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{Conclusione}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$  converge (armonica gen. con  $\alpha = 2 > 1$ )

$\Downarrow$   $\leftarrow$  Criterio del confronto tra serie a termini  $\geq 0$

$\sum \frac{|\cos n|}{n^2}$  converge

$\Downarrow$   $\leftarrow$  Criterio assoluta convergenza

$\sum \frac{\cos n}{n^2}$  converge

**SOLUZIONE SBAGLIATA!**

$$\frac{\cos n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$  converge  $\Rightarrow$   $\sum \frac{\cos n}{n^2}$  converge

$\uparrow$   
il confronto vale SOLO tra serie a termini  $\geq 0$

Esempio 2  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{n^5 + 5n + 25}{n^7 - 7n + 82}}_{d_n}$

(i)  $d_n \geq 0$  definitivamente ci crediamo!

(iii)  $d_n \rightarrow 0$  Ok

(ii)  $d_{n+1} \leq d_n$  MAH!!!

Absoluta convergenza  $\sum_{n=0}^{\infty} | \dots |$

Almeno definitivamente abbiamo che

$$|a_n| = \frac{n^5 + 5n + 25}{n^7 - 7n + 82}$$

Brutale:  $|a_n| \sim \frac{1}{n^2}$

$\sum |a_n|$  converge (per confronto asintotico con  $b_n = \frac{1}{n^2}$ )

$\Rightarrow \sum a_n$  converge (per assoluta convergenza)

Esempio 3

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^5 + 5n + 25}{n^6 - 7n + 82}$$

$\sum |a_n|$  diverge per confronto asint. con  $\frac{1}{n}$

$\Rightarrow \sum a_n$  non conv.

## MATEMATICA I

ORA 36

Titolo nota

25/10/2007

Esempio 1  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{n^5+5n+25}{n^6-7n+82}}_{a_n}$

1ª possibilità: Leibnitz + dirug.

2ª possibilità:  $a_n \sim \frac{1}{n} \Rightarrow$  aggiungo e tolgo  $\frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} \frac{n^5+5n+25}{n^6-7n+82} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} &= \frac{1}{n} + \frac{n^6+5n^2+25n - n^6+7n-82}{n^7-7n^2+82n} \\ &= \frac{1}{n} + \frac{5n^2+32n-82}{n^7-7n^2+82n} \end{aligned}$$

Serie iniziale =  $\sum \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\text{CONVERGE} \times \text{LEIBNITZ}} + \sum \underbrace{(-1)^n \frac{5n^2+32n-82}{n^7-7n^2+82n}}_{\text{CONVERGE ASSOLUTAMENTE}} \rightarrow \sim \frac{5}{n^5}$

Esempio 2  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{n^{19}+5}{n^{20}+3}}_{a_n}$

Non è piacevole risolvere  
 $a_{n+1} \leq a_n$

$\sum |a_n| = \sum \frac{n^{19}+5}{n^{20}+3}$  diverge per C.A. con  $b_n = \frac{1}{n} \Rightarrow$  BOH

$$\begin{aligned} \frac{n^{19}+5}{n^{20}+3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} &= \frac{1}{n} + \frac{n^{20}+5n - n^{20}-3}{n^{21}+3n} \\ &= \frac{1}{n} + \frac{5n-3}{n^{21}+3n} \end{aligned}$$

$$(-1)^n \frac{n^{19}+5}{n^{20}+3} = (-1)^n \frac{1}{n} + (-1)^n \frac{5n-3}{n^{21}+3n}$$

$$\sum (-1)^n \frac{n^{19}+5}{n^{20}+3} = \underbrace{\sum (-1)^n \frac{1}{n}}_{\text{CONV. LEIBNITZ}} + \underbrace{\sum (-1)^n \frac{5n-3}{n^{21}+3n}}_{\text{ASSOL. CONV.}}$$

Per studiare la seconda serie utilizzo l'assoluta conv.

$$\sum \frac{5n-3}{n^{21}+3n} \quad \text{Brutale} \quad \sim \frac{1}{n^{20}}$$

Rigoroso: C.A. con  $b_n = \frac{1}{n^{20}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5n-3}{n^{21}+3n}}{\frac{1}{n^{20}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n-3}{n^{21}+3n} \cdot n^{20} = 5 \neq 0 \neq +\infty$$

$\sum \frac{1}{n^{20}}$  conv. (armonica con  $\alpha=20>1$ )

$\Downarrow \leftarrow$  confr. asint.

$$\sum \frac{5n-3}{n^{21}+3n} \Rightarrow \sum (-1)^n \frac{5n-3}{n^{21}+3n}$$

$\uparrow$   
Assol. conv.

Esempio 3

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2+7n+\sin n}{n^a+5n-\cos n}}_{a_n}$$

$a_n \geq 0$  (almeno definit.)

Per  $a > 2$  si ha che  $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow$  cond. nec. ok  $\Rightarrow$  può conv.

Brutale:  $a_n \sim \frac{n^2}{n^a} = \frac{1}{n^{a-2}}$  dunque converge  $\Leftrightarrow a-2 > 1 \Leftrightarrow a > 3$

Esempio 4

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+7n+5}{n^a+n^4+12}$$

converge sempre  
perché l' $n^4$  da solo  
basta a farla convergere

Esempio 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)}_{a_n}$$

$a_n \geq 0$

Condiz. necessaria:  $a_n \rightarrow 1 - \cos(0) = 0$  ok.



BRUTALE:  $\cos \frac{1}{n} \sim 1 - \frac{1}{2n^2}$   $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$  per  $x \rightarrow 0$

$$1 - \cos \frac{1}{n} \sim 1 - \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2n^2} \Rightarrow \text{CONVERGE}$$

Rigoroso: confronto asintotico con  $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0 \neq \pm \infty$$

La serie data si comporta come  $\sum \frac{1}{n^2}$ , dunque conv.

Esempio 6  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^\alpha$  per quali  $\alpha$  converge?

Brutale:  $\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^\alpha \sim \left(\frac{1}{2n^2}\right)^\alpha = \frac{1}{2^\alpha} \cdot \frac{1}{n^{2\alpha}}$

$$\text{Converge} \Leftrightarrow 2\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$$

Esempio 7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{12} - 1\right)$$

$a_n \geq 0$   
 $a_n \rightarrow 0$  cond. nec. ok

Brutale  $\sqrt[n]{12} - 1 \sim e^{\frac{1}{n} \log 12} - 1$

$e^x \sim 1 + x$

$$\sim \cancel{1} + \frac{1}{n} \log 12 - \cancel{1} = \frac{1}{n} \log 12$$

$\Rightarrow$  DIVERGE

Rigoroso: confronto asint. con  $b_n = \frac{1}{n}$

Esempio 8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sin \left( \frac{1}{n^2 + 7} \right) \right]^\alpha$$

$\sin x \sim x$

Brutale:  $\left[ \sin \left( \frac{1}{n^2 + 7} \right) \right]^\alpha \sim \left[ \sin \frac{1}{n^2} \right]^\alpha \sim \left[ \frac{1}{n^2} \right]^\alpha = \frac{1}{n^{2\alpha}}$

$$\text{converge} \Leftrightarrow 2\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$$

Esempio 9 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2+7}\right)$$

Absoluta convergenza

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2+7}\right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\sin\left(\frac{1}{n^2+7}\right)}^{\text{sempre } \geq 0}$$

↑  
converge per C.A. con  $\frac{1}{n^3}$

$$\sum |a_n| \text{ conv.} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

Esempio 10 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{12^n + 40^n}{41^n + 11^n}$$

Brutale:  $\sim \frac{40^n}{41^n} = \left(\frac{40}{41}\right)^n$

converge perché geometrica  
con "ragione"  $< 1$

Rigoroso, C.A. con  $\left(\frac{40}{41}\right)^n$   
oppure radice

Esempio 11 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n + n! + 8^n}{80^n + (2n)!}$$

Brutale:  $\sim \frac{n!}{(2n)!}$

1° passaggio: confronto  
ass. con  $b_n = \frac{n!}{(2n)!}$

Studio  $\sum \underbrace{\frac{(n!)}{(2n)!}}_{b_n}$  con il rapporto

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n!} = \frac{(n+1) \cancel{n!}}{(2n+2)(2n+1) \cancel{(2n)!}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{n!}} \rightarrow 0$$

$0 < 1 \Rightarrow$  converge.

## MATEMATICA I

ORA 37

Titolo nota

26/10/2007

## SERIE DI POTENZE

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

 $x$  parametro  $\in \mathbb{R}$ 

numeri assegnati, detti COEFFICIENTI

"Polinomio di grado  $+\infty$ "  $= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$ Domande: ① Per quali valori di  $x$  converge② Per i valori di  $x$  per cui converge, determinare esplicitamente la somma

Domanda ①

Oss. La serie converge sempre per  $x=0$  e converge a  $c_0$ .

## TEOREMA 1

Data una serie di potenze  $\sum c_n x^n$  esiste un valore  $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$  ← Raggio di convergenza tale che(i) per  $|x| < R$  la serie converge assolutamente(ii) per  $|x| > R$  la serie non converge (e non verifica nemmeno la cond. nec.)(iii) per  $|x| = R$  dipende dai casi

NON CONV    $-R$    CONVERGE    $R$    NON CONV

0

Oss 1 Se  $R=0$ , allora la serie converge solo per  $x=0$ Oss 2 Se  $R=+\infty$ , allora la serie converge  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

### TEOREMA 2 (Calcolo del raggio di convergenza)

Supponiamo che esista  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

Allora  $R = \frac{1}{L}$  (ovviamente se  $L=0$   $R=+\infty$   
se  $L=+\infty$   $R=0$ )

DIM  $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{c_n x^n}_{a_n}$  Nessuna info. sul segno di  $a_n$

Provo con l'assoluta convergenza, cioè studio la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |x|^n \quad \text{con il criterio della radice}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|c_n| \cdot |x|^n} = \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x| \rightarrow L |x|$$

1° caso Se  $L|x| < 1$ , cioè se  $|x| < \frac{1}{L}$ , allora

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  converge, dunque la serie iniziale converge.

2° caso Se  $L|x| > 1$ , cioè se  $|x| > \frac{1}{L}$ , allora

$[\sum |a_n| \text{ diverge a } +\infty, \text{ dunque BOK}]$  ma anche

$|a_n| \rightarrow +\infty$ , dunque  $a_n$  non può tendere a zero, dunque la serie non può convergere.

Questo dimostra che  $\frac{1}{L} = R$ . Con piccole modifiche si adatta ai casi  $L=0$  ed  $L=+\infty$ .

Esempio 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{c_n} x^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1 = L$$

$$R = \frac{1}{L} = 1$$

- per  $|x| < 1$  (cioè  $-1 < x < 1$ ) converge
- per  $|x| > 1$  (cioè  $x > 1$  e  $x < -1$ ) non converge
- $x = 1$  e  $x = -1$  vanno "fatti a mano"

$$\boxed{x=1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \quad \text{diverge (no condiz. nec.)}$$

$$\boxed{x=-1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{a_n} \quad \text{non converge perché } a_n \text{ non tende a zero,}$$

( $a_n$  in realtà non ha limite in quanto  
 $a_{2n} \rightarrow +\infty$  e  $a_{2n+1} \rightarrow -\infty$ )

Esempio 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$c_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 = L \quad R = \frac{1}{L} = 1$$

- per  $-1 < x < 1$  converge
- per  $|x| > 1$  non converge

$$\boxed{x=1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{diverge perché armonica con } x=1$$

$$\boxed{x=-1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{converge per Leibnitz}$$

Conclusione: la serie data converge  $\Leftrightarrow x \in [-1, 1)$

compreso  $\downarrow$  escluso  $\downarrow$

Esempio 3

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^4+4} x^n$$

$$C_n = \frac{n+3}{n^4+4}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|C_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n+3}}{\sqrt[n]{n^4+4}} = 1 = L \quad R = \frac{1}{L} = 1$$

$$\boxed{x=1} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^4+4} \quad \text{converge per confronto asintotico con } \frac{1}{n^3}$$

$$\boxed{x=-1} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^4+4} (-1)^n \quad \text{converge per assoluta convergenza (ci si riduce al caso } x=1 \text{)}$$

Esempio 4

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$C_n = \frac{1}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|C_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0 = L$$

$$R = \frac{1}{L} = +\infty$$

Converge  $\forall x \in \mathbb{R}$ 

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

è un esempio di

SERIE DI TAYLOR

Data una funzione  $f(x)$  derivabile infinite volte, si dice serie di Taylor di  $f(x)$  con centro in  $x_0=0$  la serie che ha come somme parziali i polinomi di Taylor di  $f(x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots$$

TEOREMA 3

Per tutte le funzioni decenti (e tutte quelle ottenute dalle funzioni elementari mediante composizioni e/o operat. algebriche sono decenti)

la serie di Taylor DOVE CONVERGE converge al valore della funzione (quindi so calcolare la somma)

Continuazione esempio precedente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$$

è il caso  $x=8$  della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

è la serie di Taylor di  $f(x) = e^x$ ,  
quindi DOVE CONVERGE converge a  $e^x$

↓  
Sempre perché  $R = +\infty$   
(calcolato prima)

Conclusione  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$  converge e la sua somma  
è  $e^8$

## MATEMATICA I

Titolo nota

ORA 38

26/10/2007

**Esempio 1** Calcolare  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  Sappiamo per Leibnitz che converge

È il caso particolare  $x = -1$  della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{la quale converge } (\Leftrightarrow) x \in [-1, 1)$$

Sarà una serie di Taylor?

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots = \boxed{?}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

Quindi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  è la serie di Taylor di  $f(x) = -\log(1-x)$

quindi, dove converge, converge a  $-\log(1-x)$

Per  $x = -1$  converge, dunque converge a  $-\log 2$ .

In conclusione 
$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots = -\log 2$$

**Esempio 2** Calcolare la somma

$$2 - \frac{2^3}{3} + \frac{2^5}{5} - \frac{2^7}{7} + \frac{2^9}{9} - \dots$$

È il caso  $x=2$  della serie di potenze

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$



cioè della serie di Taylor di  $\arctan x$ .

Quindi la serie data converge a  $\arctan 2$  **NO!!!**

La serie converge ad  $\arctan x$  **DOVE CONVERGE**

Nel caso  $x=2$  non è verificata la condizione necessaria, dunque NON converge

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3} x^{2n}$  ha soltanto i termini di grado pari!!  
(quindi  $c_n = 0$  se  $n$  è dispari)

Ponendo  $x^2 = y$  otteniamo la serie di potenze

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3} y^n$ , che ha la formula classica con  $c_n = \frac{1}{n^2+3}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+3}} \rightarrow 1 = L \Rightarrow R = 1$$

Quindi la serie in  $y$  converge per  $|y| < 1$   
non conv. per  $|y| > 1$   
per  $y = 1$  conv. per CA. con  $\frac{1}{n^2}$   
per  $y = -1$  conv. per Leibnitz

Conclusione: converge per  $y \in [-1, 1]$ , quindi in  $x$   
converge quando  $x^2 \in [-1, 1]$ , cioè quando  
 $x \in [-1, 1]$ .

Esempio Calcolare il raggio di convergenza della serie di Taylor della funzione  $\arctan x$

$$\begin{aligned} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} \end{aligned}$$

I valori di  $x$  per cui converge sono gli stessi per cui converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} \quad \text{Pongo } y = x^2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{2n+1}}_{c_n} y^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}} \rightarrow 1 = L$$

$$R = \frac{1}{L} = 1$$

Controllo "a mano" gli estremi.

$$\boxed{y=1} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \rightsquigarrow \text{converge per Leibnitz}$$

$$\boxed{y=-1} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \quad \text{diverge per C.A. con } \frac{1}{n}$$

Conclusione: in  $y$  converge  $\Leftrightarrow y \in (-1, 1]$ .

In  $x$  converge  $\Leftrightarrow x^2 \in (-1, 1]$ , cioè  $\Leftrightarrow x \in [-1, 1]$

In particolare la serie di Taylor di  $\arctan x$  converge per  $x = +1$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

— 0 — 0 —

Esempio Per quali valori di  $x$  converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}}_{c_n} x^n$$

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{\sqrt[n]{2^n + 5^n}}{\sqrt[n]{3^n + 4^n}} = \frac{\sqrt[n]{5^n \left(1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}}{\sqrt[n]{4^n \left(1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}} = \frac{5}{4} \frac{\sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}}{\sqrt[n]{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}} \rightarrow \frac{5}{4}$$

$1^0 = 1$

$1^0 = 1$

$$L = \frac{5}{4} \Rightarrow R = \frac{4}{5}$$

Se  $|x| < \frac{4}{5}$  converge

$|x| > \frac{4}{5}$  non converge

Per  $x = \frac{4}{5}$  diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n} \cdot \frac{4^n}{5^n}}_{a_n}$$

Esercizio sui limiti:  $a_n \rightarrow 1$

$\Rightarrow$  no cond. nec.

$\Rightarrow$  non converge

$$x = -\frac{4}{5}$$

ancora una volta  $a_n$  non tende a zero  
 $\Rightarrow$  non converge.

Conclusione: converge  $\Leftrightarrow -\frac{4}{5} < x < \frac{4}{5}$

Esempio 5

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2 + \cos n!}{n^7 \cdot 7^n + 5}}_{c_n} x^n$$

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{\sqrt[n]{n^2 + \cos n!}}{\sqrt[n]{n^7 \cdot 7^n + 5}} \rightarrow \frac{1}{7} = L \Rightarrow R = 7$$

- Per  $|x| < 7$  ok
- Per  $|x| > 7$  nessuna speranza

Per  $x=7$   $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + \cos n!}{n^7 \cdot 7^n + 5} 7^n$  converge per C.A.  
con  $\frac{1}{n^5}$

Per  $x=-7$  converge perché imporre l'assoluta convergenza porta al caso  $x=7$

Giustificazione del limite:

$$\sqrt[n]{n^7 \cdot 7^n + 5} = \sqrt[n]{7^n n^7 \left(1 + \frac{5}{7^n n^7}\right)} = 7 \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n^7}}_1 \underbrace{\left(1 + \frac{5}{7^n n^7}\right)^{\frac{1}{n}}}_{1^0=1}$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{n^2 - 1}}_1 \leq \sqrt[n]{n^2 + \cos n!} \stackrel{\text{carab.}}{\leq} \underbrace{\sqrt[n]{n^2 + 1}}_1$$

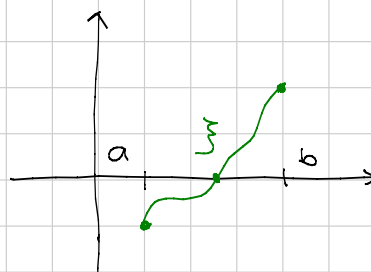
## MATEMATICA I

Titolo nota

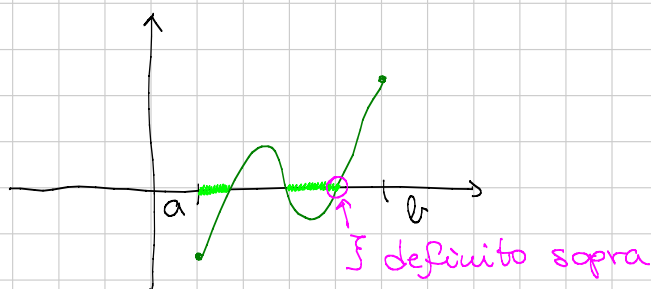
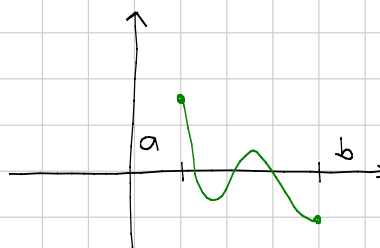
ORA 39

30/10/2007

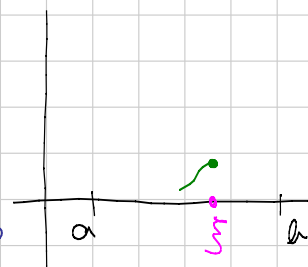
## TEO. ESISTENZA DEGLI ZERI

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione CONTINUA $\uparrow$  intervallo con estremiSupponiamo che  $f(a) \cdot f(b) < 0$  (cioè  $f(a)$  e  $f(b)$  hanno segno diverso)Allora  $\exists \xi \in (a, b)$  b.c.  $f(\xi) = 0$ Oss. Il punto  $\xi$  NON è obbligato ad essere unico"Dim." Definiamo

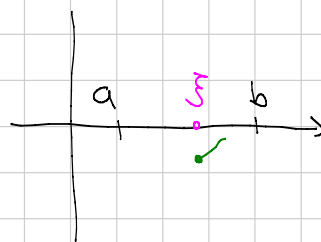
$$\xi = \sup \{ x \in [a, b] : f(x) < 0 \}$$

Supponiamo che  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ 

Dico che  $f(\xi) = 0$ . Se fosse  $f(\xi) > 0$ , essendo continua  $f(x)$  sarebbe  $> 0$  anche un po' prima di  $\xi$ , quindi  $\xi$  non può essere il sup degli  $x$  in cui  $f(x) < 0$  (il sup sarebbe + piccolo)



Se fosse  $f(\xi) < 0$ , allora  $f(x)$  sarebbe  $< 0$  anche per  $x$  un po' + grandi di  $\xi$ , quindi il sup sarebbe + grande.



L'unica possibilità è che sia  $f(\xi) = 0$ .

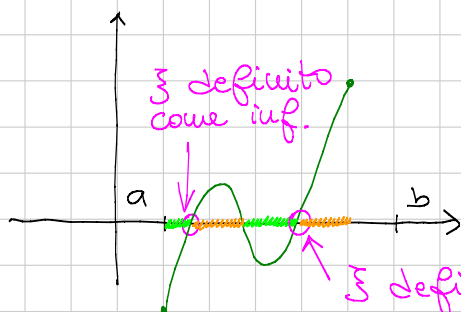
In alternativa avremmo potuto prendere

$$\xi = \inf \{ x \in [a, b] : f(x) > 0 \}$$

La dimostrazione sarebbe stata analoga.

Lo  $\xi$  fatto con il sup e con l'inf sono lo stesso?

Chiaramente se c'è un unico punto in cui  $f$  si annulla la risposta è positiva.

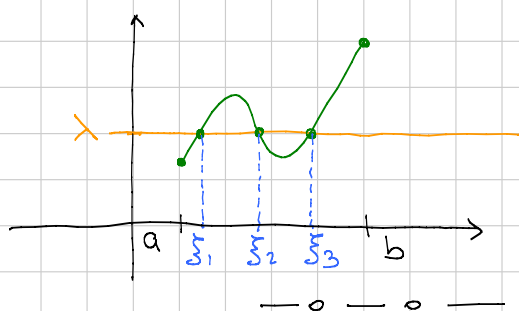


Variaute Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua.  
Sia  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Supponiamo che

$$f(a) < \lambda \quad \text{e} \quad f(b) > \lambda \quad (\text{o viceversa})$$

Allora esiste almeno un punto  $\xi \in (a, b)$  t.c.

$$f(\xi) = \lambda$$



Esercizio 1 Dimostrare che l'equazione

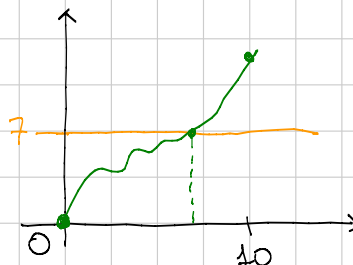
$$x^2 + \sin(3x) = 7$$

ha almeno una soluzione reale.

Considero la funzione  $f(x) = x^2 + \sin(3x)$  e l'intervallo  $[0, 10]$ .  $f: [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$  è continua. Inoltre

$$f(0) = 0, \quad f(10) = 100 + \sin(30) > 7$$

$\Rightarrow$  esiste almeno un punto in cui  $f(x) = 7$ .  
Nota bene:  $x \in (0, 10)$ .



Esercizio 2

$$x^2 + \sin(3x) = 2007$$

Cambia poco o nulla. Invece di  $[0, 10]$  considero l'intervallo  $[0, 100]$ .  $f: [0, 100] \rightarrow \mathbb{R}$  è continua

$$f(0) = 0 < 2007$$

$$\begin{aligned} f(100) &= 100^2 + \sin(300) \\ &= 10000 + \sin(300) > 2007 \end{aligned}$$

Conclusione come prima

Esercizio 3

$$\overbrace{\log(1+x^2) - \arctan x^3 + x}^{f(x)} = 2007$$

Dimostrare che ha almeno una soluzione.

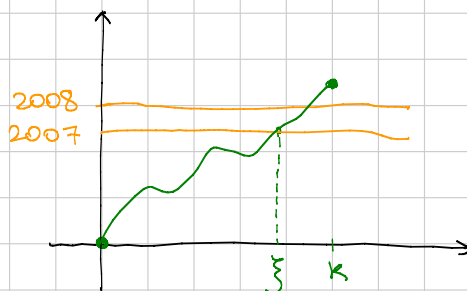
$f(0) = 0$ . Mi serve un punto in cui  $f(x) > 2007$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , cioè  $\forall M \in \mathbb{R}$  (anche enorme) si ha che  $f(x) \geq M \quad \forall x \geq k$

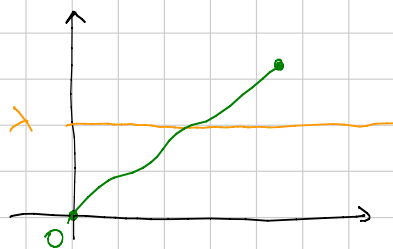
In particolare

$$f(k) \geq 2008 > 2007$$

Ora applico il teo. esistenza degli zeri (esteso) nell'intervallo  $[0, k]$

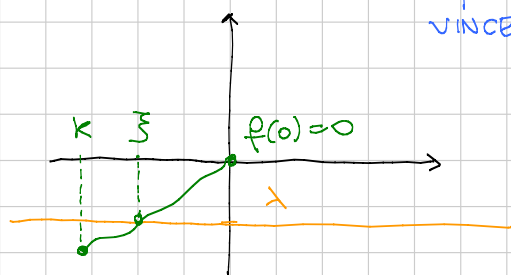


La stessa dimostrazione vale se sostituisco 2007 con un qualunque valore  $\lambda > 0$



Se  $\lambda < 0$ , devo guardare

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \underbrace{\log(1+x^2)}_{+\infty} - \underbrace{\arctan x^3}_{+\frac{\pi}{2}} + \underbrace{x}_{-\infty} \right] = -\infty$$



Conclusione: nell'esempio si ha che

$$f(x) = x$$

ammette almeno una soluzione reale  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ .  
Questo è equivalente a dire che  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è  
suggettiva.

— o — o —

Esercizio 4 Dimostrare che  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \log x + \sin \sqrt{x} + \sin x$$

è suggettiva.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

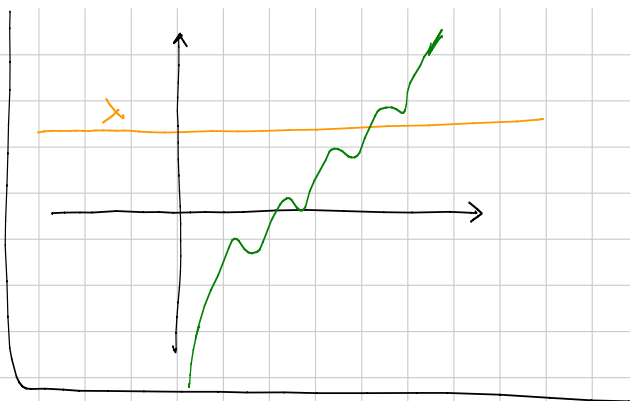
Questo basta per concludere la suggettività

### Esercizio 5

Dimostrare che

$$\underbrace{\arctan \sqrt{x} + \log(1+x^3) + x^4}_{f(x)} = 2007$$

ha un'unica soluzione reale.



$$f(0) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Quindi  $f(x) = 2007$  ha ALMENO una soluzione reale

$f(x)$  è somma di 3 funzioni che sono strettamente  
crescenti per  $x \geq 0$ . Quindi  $f(x)$  è strett. cresc., dunque  
INIETTIVA, quindi la sol. è AL PIÙ UNA

$f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  è INVERTIBILE





## MATEMATICA I

ORA 40

Titolo nota

30/10/2007

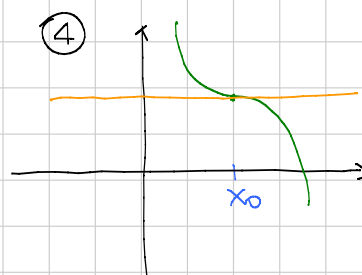
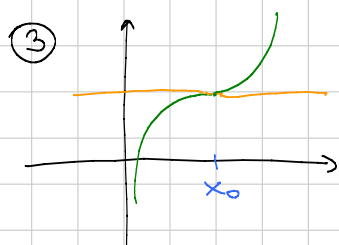
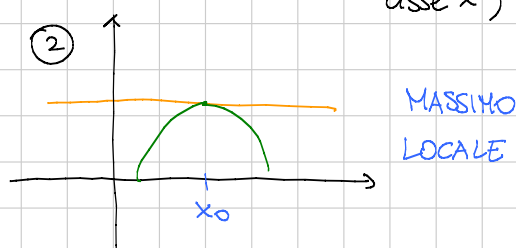
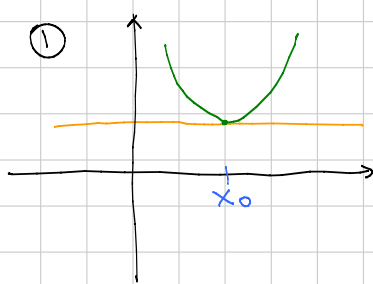
## STUDIO LOCALE DI FUNZIONI

= cercare di determinare  
l'andamento di una  
funzione nell'intorno di  
un punto dato

## Punto stazionario

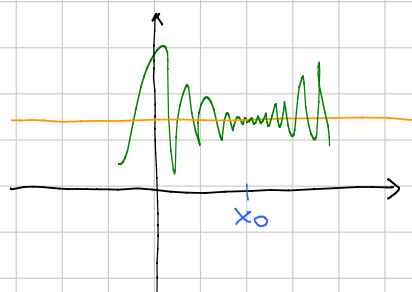
Si dice che il punto  $x_0$  è stazionario  
per una funzione  $f(x)$  se  $f'(x_0) = 0$  **DEFINIZIONE**

Come può essere il grafico vicino ad un punto stazionario?  
Ci sono 5 possibili comportamenti (sempre retta tg. // asse x)



Valore di  $f$  rispetto al punto  $x_0$

|   | $x < x_0$ | $x > x_0$ |
|---|-----------|-----------|
| ① | +         | +         |
| ② | -         | -         |
| ③ | -         | +         |
| ④ | +         | -         |



Dato  $f(x)$  ed un p.to stazionario  $x_0$ , come si stabilisce quale situazione si presenta?

### CRITERIO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE

Supponiamo  $f'(x_0) = 0$  ← punto stazionario

Supponiamo  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(m-1)}(x_0) = 0$

$f^{(m)}(x_0) \neq 0$ . Allora

①  $m$  pari e  $f^{(m)}(x_0) > 0 \Rightarrow$  MIN. LOC.

②  $m$  pari e  $f^{(m)}(x_0) < 0 \Rightarrow$  MAX. LOC.

③  $m$  dispari e  $f^{(m)}(x_0) > 0 \Rightarrow$  tipo ③

④  $m$  dispari e  $f^{(m)}(x_0) < 0 \Rightarrow$  tipo ④



Esempio Supponiamo per semplicità che sia  $x_0 = 0$ .  
Supponiamo che sia  $m = 6$ .

$$f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(5)}(0) = 0$$

$$\text{Supponiamo } f^{(6)}(0) = 25 (> 0)$$

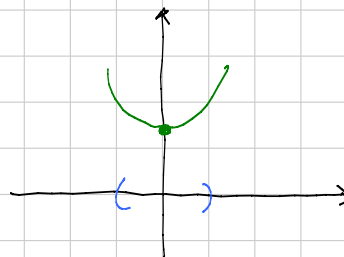
Voglio dedurre che  $x=0$  è un punto di min. locale, cioè

$f(x) > f(0)$  per ogni  $x$  in un intorno di 0 (escluso lo 0 stesso)

Uso TAYLOR !!!

$$f(x) = P_6(x) + o(x^6) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$P_6(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6$$



Per l'ipotesi avremo che  $P_6(x) = f(0) + \frac{25}{6!} x^6$

Quindi sappiamo che

$$f(x) = f(0) + \frac{25}{6!} x^6 + o(x^6) \quad \text{quindi}$$

$$f(x) - f(0) = \frac{25}{6!} x^6 + o(x^6) \quad \text{quindi}$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x^6} = \frac{25}{6!} + \frac{o(x^6)}{x^6}$$

$\downarrow \frac{25}{6!} > 0$ 
 $\downarrow 0$

Di conseguenza  $\frac{f(x) - f(0)}{x^6} > 0$  in un intorno di 0 (meno lo zero stesso)

Quindi  $f(x) - f(0) > 0$  in un intorno di  $x=0$ , quindi  
 $f(x) > f(0)$  in un intorno di  $x=0$ .

Ho usato solo 2 cose:  $n=6$  è PARI (per avere derivata  $> 0$ )  
 e  $f^{(6)}(0) > 0$  (per avere limite positivo).

Allo stesso modo si dimostrano i restanti 3 casi

**ALTRO MODO DI ENUNCIARE LO STESSO CRITERIO**

Una funzione  $f(x)$  si comporta vicino ad un punto stazionario  $x_0$  come il suo primo polinomio di Taylor non costante.

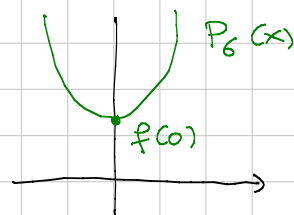
Nell'esempio precedente ( $x_0=0$ )

$$P_1(x) = f(0), \quad P_2(x) = f(0) \quad \leftarrow \text{tutti costanti}$$

$$P_6(x) = f(0) + \frac{25}{6!} x^6 \quad \leftarrow \text{primo pd. di Taylor non costante.}$$

La funzione  $f(x) = \frac{25}{61} x^6$

ha un minimo loc. in  $x=0$ , quindi anche la funzione originaria ha un min. loc. in  $x=0$ .



Esempio 1  $f(x) = x^{20} - \sin x^{16}$   $f(0) = 0$

Come si comporta vicino ad  $x=0$ ?

$$f'(x) = 20x^{19} - \cos x^{16} \cdot 16x^{15} \quad \text{quindi } f'(0) = 0$$

$f(x)$  si comporta come il suo primo pd. di Taylor non costante

$$f(x) = \boxed{-x^{16}} + o(x^{16})$$

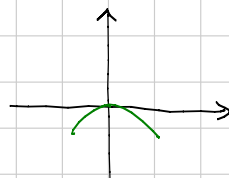
primo pd. di Taylor non costante

$$\begin{aligned} \sin x^{16} &= x^{16} + o(x^{32}) \\ \sin x^{16} &= x^{16} + o(x^{16}) \end{aligned}$$

si mangia  $x^{20}$

$\Rightarrow f(x)$  si comporta come  $-x^{16}$

$\Rightarrow$  MASSIMO LOCALE

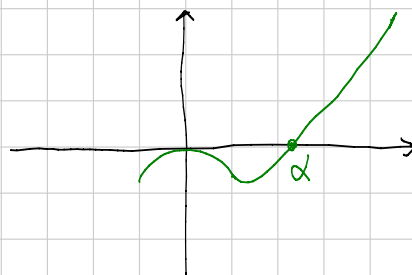


Esercizio 2 Dimostrare che l'eq.

$$x^{20} - \sin x^{16} = 0 \quad \text{ha almeno 3 soluz. reali}$$

Una soluz. è  $x=0$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$  c'è almeno una soluzione  $x > 0$



$f$  è pari, quindi se  $f(\alpha) = 0$ , anche  $f(-\alpha) = 0$ .

Esercizio 3 Supponiamo di calcolare per  $x=0$  le prime 100 derivate della funzione  $f(x) = x^{20} - \sin x^{16}$ .  
Quante vengono  $\neq 0$ ?

Risposta: TAYLOR !!! Calcolo lo sviluppo di Taylor di ordine 100

$$\sin x^{16} = x^{16} - \frac{x^{48}}{6} + \frac{x^{80}}{5!} + o(x^{100})$$

quindi

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{20} - x^{16} + \frac{x^{48}}{6} - \frac{x^{80}}{5!} + o(x^{100}) \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(100)}(0)}{100!}x^{100} + o(x^{100}) \end{aligned}$$

Quindi le uniche derivate  $\neq 0$  per  $x=0$  sono quelle di ordine 16, 20, 48, 80.

## MATEMATICA I

ORA 41

Titolo nota

31/10/2007

## TEOREMI SU FUNZIONI CONTINUE E DERIVABILI

INDICE:  $W \Rightarrow R \Rightarrow C \Rightarrow L$  $\Downarrow$  $\Downarrow$ 

H

M

WEIERSTRASS

Già  
vista $\rightarrow \Downarrow$   
T

ROLLE

CAUCHY

LAGRANGE

HÔPITAL

TAYLOR

MONOTONIA

(legami tra segno della derivata  
e monotonia di una funzione)Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  e sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ Def. Si dice che  $M \in \mathbb{R}$  è il massimo di  $f$  in  $A$ , e si scrive

$$M = \max \{ f(x) : x \in A \}$$

$\rightarrow$  insieme dei valori  
assunti da  $f(x)$  quando  
 $x$  varia in  $A$ . È  
l'immagine di  $A$ , cioè  
 $f(A)$

se (i)  $f(x) \leq M \quad \forall x \in A$   
(ii)  $\exists x \in A$  t.c.  $f(x) = M$

Def. analoga Si dice  $m = \min \{ f(x) : x \in A \}$  se

(i)  $f(x) \geq m \quad \forall x \in A$   
(ii)  $\exists x \in A$  t.c.  $f(x) = m$

Oss 1 Max e min NON sono obbligati ad esistere.  
Se esistono sono unici

Oss 2  $M$  e  $m$  sono "delle  $y$ ", cioè valori assunti dalla funzione

Def. Supponiamo che esista  $M = \max \{ f(x) : x \in A \}$ .  
 Allora tutti i punti  $x \in A$  t.c.  $f(x) = M$  sono detti  
 PUNTI DI MASSIMO  
 Idem per i p.ti di minimo.

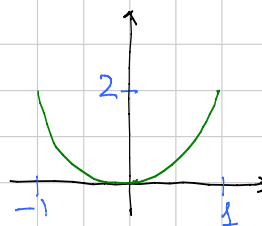
Oss.3 Se  $M$  esiste, allora per forza esiste almeno un punto di massimo, ma questo può non essere unico.  
 Idem per il minimo.

Esempio 1  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2x^2$

$$\max \{ x^2 : x \in (-1, 1) \} = \text{N.E.}$$

$$\min \{ x^2 : x \in (-1, 1) \} = 0$$

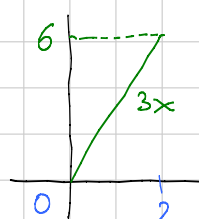
punto di minimo :  $x = 0$



Esempio 2  $f : (0, 2] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 3x$

$$\max \{ 3x : x \in (0, 2] \} = 6 \leftarrow \text{Valore (asse y)}$$

punto di max :  $x = 2 \leftarrow$  punto in cui il  
valore è raggiunto (asse x)



$$\min \{ 3x : x \in (0, 2] \} = \text{N.E.}$$

$$\inf \{ 3x : x \in (0, 2] \} = 0$$

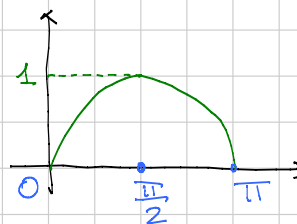
$$\sup \{ 3x : x \in (0, 2] \} = 6$$

Esempio 3  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sin x$

$$\max \{ \sin x : x \in [0, \pi] \} = 1$$

$$\sup \quad \quad \quad = 1$$

p.to di max :  $x = \frac{\pi}{2}$



$$\min \{ \sin x : x \in [0, \pi] \} = 0$$

$$\inf \quad \quad \quad = 0$$

p.ti di minimo :  
 $x = 0, \quad x = \pi$

### TEOREMA DI WEIERSTRASS

Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione **CONTINUA**

↓ intervallo compresi  
gli estremi

Allora  $\max \{f(x) : x \in [a, b]\}$  ESISTONO  
 $\min \quad \quad \quad \sim$   
 $\quad \quad \quad - \circ - \circ -$

Oss. Se manca almeno una delle ipotesi (cioè  $f$  non è continua, o non stiamo considerando un intervallo con estremi),  $\max$  e  $\min$  possono ugualmente esistere.

Nell'esempio 3 precedente avremmo potuto applicare W.

Supponiamo di essere nelle ipotesi di W. Quindi  $\max$  e  $\min$  esistono. Come calcolarli?

Occorre trovare i CANDIDATI ad essere i p.ti di  $\max / \min$ .  
 Questi stanno in una delle seguenti 3 categorie di p.ti

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

① **P.ti STAZIONARI INTERNI** : p.ti  $x \in (a, b)$  b.c.  $f'(x) = 0$

② **P.ti SINGOLARI INTERNI** : p.ti  $x \in (a, b)$  in cui  
 $f'(x)$  NON esiste

(N.B. se  $f'$  esiste ovunque, questa categoria è  $\emptyset$ )

③ **P.ti del BORDO** :  $x = a, x = b$

Operativamente: si determinano i candidati dei 3 tipi, poi si sostituiscono nella funzione e si cercano il valore + alto e + piccolo.



Esempio 4  $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = |x|$

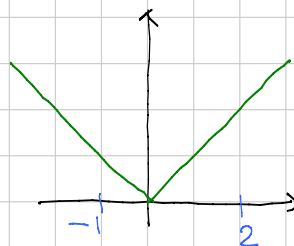
$$\max \{ |x| : x \in [-1, 2] \} = 2$$

$$\min \{ |x| : x \in [-1, 2] \} = 0$$

max e min esistono per W.

p.to di max:  $x = 2$  (categoria BORDO)

p.to di min:  $x = 0$  (categoria SINGOLARE INTERNO)

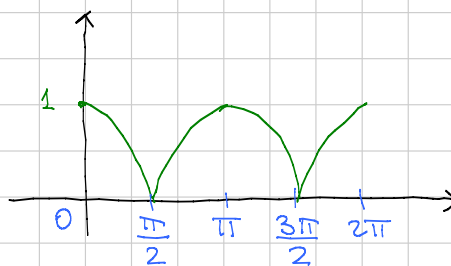


Esempio 5  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = |\cos x|$

Max e min esistono per W

$$\max \{ |\cos x| : x \in [0, 2\pi] \} = 1$$

$$\min \{ |\cos x| : x \in [0, 2\pi] \} = 0$$



p.to di max:  $\begin{array}{l} \nearrow x = 0 \\ \rightarrow x = \pi \\ \searrow x = 2\pi \end{array}$  BORDO  
STAZIONARIO INTERNO  
BORDO

p.to di min:  $\begin{array}{l} \nearrow x = \frac{\pi}{2} \\ \searrow x = \frac{3\pi}{2} \end{array}$  SINGOLARE INTERNO  
" "

Esempio 6  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = x^2 - x^3$

W  $\Rightarrow$  max e min esistono. Cerco i candidati ad essere p.to di max / min.

Bordo:  $x = 0$  e  $x = 1$

Singolari interni:  $\emptyset$  ( $f'(x)$  esiste ovunque)

Stazionari interni: cerco  $x \in (0, 1)$  t.c.  $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 2x - 3x^2 = 0 \quad x(2 - 3x) = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow x = 0 \\ \searrow x = 2/3 \end{array}$$

$x = 2/3$  è l'unico stazionario interno ( $x=0$  è stazionario ma non interno)

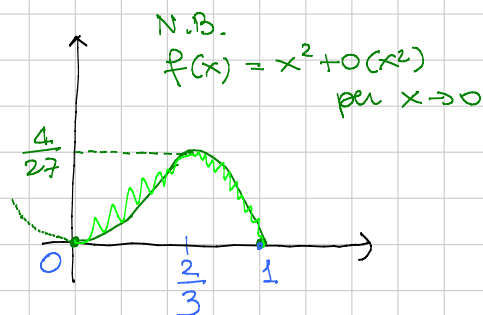
I candidati sono quindi:  $x=0$ ,  $x=1$ ,  $x=2/3$

Confronti i valori assunti dalla funzione

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 0$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27}$$



Conclusioni:

$$\max \{x^2 - x^3 : x \in [0, 1]\} = \frac{4}{27} \quad \text{p.to di max: } x = \frac{2}{3}$$

$$\min \{x^2 - x^3 : x \in [0, 1]\} = 0 \quad \text{p.to di min. } \begin{cases} \nearrow x=0 \\ \searrow x=1 \end{cases}$$

## MATEMATICA I

ORA 42

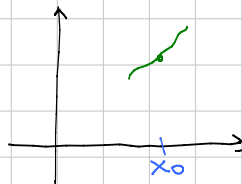
Titolo nota

31/10/2007

Giustificazione della ricerca dei candidati p.ti max/min.

MONOTONIA 1 (Segno della derivata in un punto)Sia  $x_0$  un punto all'interno di un intervallo  $(a,b)$ .Supponiamo che  $f'(x_0) > 0$  (dunque esiste)(negli altri punti di  $(a,b)$  non so nemmeno se la  $f'$  esiste)Allora esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\begin{array}{ll} f(x) > f(x_0) & \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \\ f(x) < f(x_0) & \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \end{array}$$

un po' dopo vale di +  
" " prima " " "Analogamente: supponiamo  $f'(x_0) < 0$ . Allora  $\exists \delta > 0$  t.c.

$$\begin{array}{ll} f(x) < f(x_0) & \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \\ f(x) > f(x_0) & \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \end{array}$$

Oss. NON ho mai detto che  $f$  è monotona in  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ Conseguenza di monotonia 1. Supponiamo che  $x_0 \in (a,b)$ ↑  
INTERNOsia un p.to di max per  $f(x)$  in  $[a,b]$ . Allora\* NON PUÒ ESSERE  $f'(x_0) > 0$  (se fosse così avremmo che  $f(x) > f(x_0)$  un po' a dx di  $x_0$ , quindi  $f(x_0)$  non sarebbe il max)\* NON PUÒ ESSERE  $f'(x_0) < 0$  (se fosse così avremmo che  $f(x) > f(x_0)$  un po' a sx di  $x_0$ , quindi  $f(x_0)$  no max)

Quindi per  $f'(x_0)$  restano solo 2 possibilità

↗ NON esistere → SING. INTERNO

↘  $f'(x_0) = 0$  → STAZ. INTERNO  
— o — o —

Il ragionamento per i p.ti di min. è lo stesso.  
— o — o —

Dim. di monotonia 1 Ipotesi  $f'(x_0) > 0$ , cioè

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0$ . Quindi per  $h$  vicini a 0, cioè  $h \in (-\delta, \delta)$ , si ha che

$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0$ . Per  $h > 0$  il den. è  $> 0$ , quindi num.  $> 0$ , cioè  $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$ , cioè  $f(x_0+h) > f(x_0)$

Per  $h < 0$  il den. è  $< 0$ , quindi num.  $< 0$ , cioè

$f(x_0+h) - f(x_0) < 0$ , cioè  $f(x_0+h) < f(x_0)$

— o — o —  
↓ punto un po' a sx di  $x_0$

TEOREMA DI ROLLE Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Supponiamo che

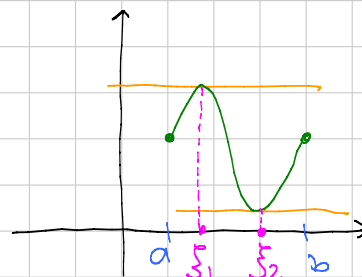
(i)  $f$  continua in  $[a, b]$ ;

(ii)  $f$  derivabile in  $(a, b)$ ; (se è deriv. in  $[a, b]$  meglio!!)

(iii)  $f(a) = f(b)$

Allora  $\exists \xi \in (a, b)$  t.c.  $f'(\xi) = 0$   
— o — o —

Disegno: esiste almeno un p.to  $\xi$  in cui  $f' = 0$ , cioè la retta tangente è //asse  $x$



Oss.  $\xi$  può non essere unico

Dim. basta prendere un p.to di max o di min.

interno. Per W Max e min esistono, ma potrebbero essere assunti sul bordo. Poiché  $f(a) = f(b)$  se max e min. sono sul bordo, vuol dire che  $f$  è costante  $\Rightarrow f' = 0$  ovunque.

**TEOREMA DI CAUCHY** Siano  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che (i)  $f$  e  $g$  continue in  $[a,b]$ ;  
 (ii)  $f$  e  $g$  derivabili in  $(a,b)$ .

Allora  $\exists \xi \in (a,b)$  t.c.  $(g(b)-g(a))f'(\xi) = (f(b)-f(a))g'(\xi)$ .

Se inoltre supponiamo che (iii)  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$ , allora  $g(b) \neq g(a)$  e dividendo si ottiene

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Dim. Considero la funzione

$$\varphi(x) = \underbrace{(g(b)-g(a))}_{\text{Numero}} f(x) - \underbrace{(f(b)-f(a))}_{\text{Numero}} g(x)$$

Allora (i)  $\varphi$  è continua in  $[a,b]$   
 (ii)  $\varphi$  è derivabile in  $(a,b)$   
 (iii)  $\varphi(a) = \varphi(b)$  (fare per esercizio la verifica)

$\Rightarrow \varphi$  soddisfa le ipotesi di Rolle  $\Rightarrow \exists \xi$  t.c.  $\varphi'(\xi) = 0$

$$\varphi'(\xi) = (g(b)-g(a))f'(\xi) - (f(b)-f(a))g'(\xi) = 0$$

Se aggiungiamo l'ipotesi che  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$  allora

- possiamo dividere per  $g'(\xi)$
- $g(b) \neq g(a)$  : se per assurdo fosse  $g(a) = g(b)$ , allora potrei applicare Rolle alla funzione  $g(x)$  e trovare un punto in cui  $g' = 0$ , ma abbiamo supposto che non esista.

— o — o —

**TEOREMA DI LAGRANGE** $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che(i)  $f$  continua in  $[a, b]$ (ii)  $f$  derivabile in  $(a, b)$ .Allora  $\exists \xi \in (a, b)$  tale che

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

Dim: applico Cauchy con  $g(x) = x$  (Nota bene  $g'(x) = 1 \neq 0$  in  $(a, b)$ )

Per Cauchy  $\exists \xi \in (a, b)$  t.c.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{cioè}$$

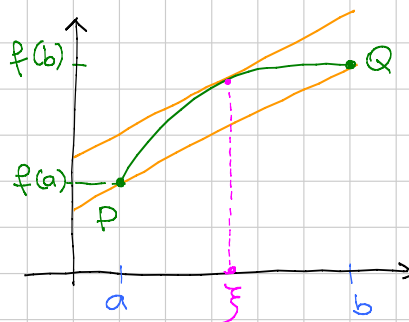
$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{f'(\xi)}{1}$$

Moltiplico per  $b-a$  e ottengo la tesi.  $\square$ Interpretazione geometrica

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

↓  
coeff. angolare  
retta PQ

↓  
coeff.  
angolare  
retta tg al  
grafico in  $\xi$



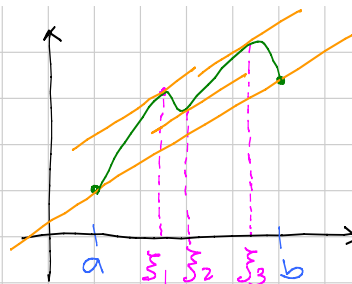
Stesso coeff. angolare = le 2 rette sono parallele.

**Lagrange geometrico**  $\exists \xi \in (a, b)$  in cui la retta tangente  
è  $\parallel$  alla retta PQ

N.B.  $\xi$  non è obbligato ad essere unico

Rolle non è altro che la  
versione del teo. di Lagrange  
in cui  $PQ$  è  $\parallel$  asse  $x$

Questo NON autorizza a  
dimostrare ROLLE usando  
LAGRANGE !!!



## MATEMATICA I

ORA 43

Titolo nota

31/10/2007

C  $\Rightarrow$  H Ipotesi  $x_0 \in \mathbb{R}$   $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  del tipo  $\frac{0}{0}$

Tesi  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Se la forma indeterminata è del tipo  $\frac{0}{0}$ , "vuol dire" che  $f(x_0) = 0$  e  $g(x_0) = 0$

Applico CAUCHY alle funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  nell'intervallo  $[a, b] = [x_0, x]$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad ; \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Dove sta  $\xi$ ?



Se cambio il punto  $x$ , chiaramente cambia anche il punto  $\xi$ , ma sempre rimane fra  $x_0$  e  $x$ . Quindi a rigore di logica dovrei scrivere

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

$\xi$  dipende da  $x$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \lim_{y \rightarrow x_0} \frac{f'(y)}{g'(y)}$$

cambio variabile  $y = \xi_x$   
Quando  $x \rightarrow x_0$ , ho che  $\xi_x = y$  tende a  $x_0$  (carab.)

Questo dimostra il caso  $\frac{0}{0}$  con  $x_0 \in \mathbb{R}$ .



$L \Rightarrow M$  Monotonia 2 (segno della derivata in un intervallo)

Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $(a, b)$ . Allora

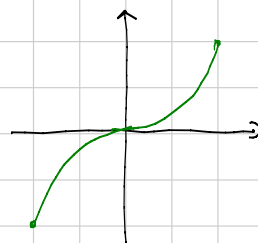
- ①  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$  strett. crescente in  $[a, b]$
- ②  $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$  debolm. crescente in  $[a, b]$
- ③  $f$  deb. cresc. in  $[a, b] \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

④  $f$  strett. cresc. in  $[a, b] \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$  **NOO!!!!**

Esempio  $f(x) = x^3 \quad [a, b] = [-1, 1]$

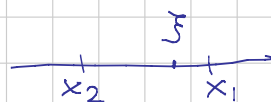
$f(x)$  è strett. crescente in  $[-1, 1]$

$f'(x) = 3x^2$  è  $\geq 0$ , ma non  $> 0$   
perché si annulla per  $x=0$ .



Dim ① Ipotesi:  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$   
Tesi:  $f$  strett. crescente in  $[a, b]$ , cioè

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



Per Lagrange:  $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f'(\xi)$

↓  
deve essere  $> 0$

quindi  $f(x_1) > f(x_2)$

②  $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f'(\xi)$

↓  
deve essere  $\geq 0$

quindi  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , cioè  $f$  è debolmente crescente

[3] Ipotesi:  $f$  debolm. cresc.  
 Tesi:  $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se  $f(x)$  è debolmente crescente, tutti i rapporti incrementali sono  $\geq 0$  (in quanto num. e denom. hanno stesso segno (il num. può anche essere 0))

Ma allora  $f'(x_0)$ , essendo limite di roba  $\geq 0$ , sarà per forza  $\geq 0$ .

"[4] Se  $f(x)$  è strett. crescente, tutti i rapp. increm. sono  $> 0$  (il num. non si annulla mai)

Ma allora  $f'(x_0)$ , essendo il limite di roba  $> 0$  sarà solo  $> 0$  (le disugl. strette NON PASSANO al limite)

Esercizio 1 Determinare quante sono le soluzioni dell'equazione

$$3x = \sin(2x) + 2007$$

Considero la funzione  $f(x) = 3x - \sin(2x)$ . L'eq. data si riduce a

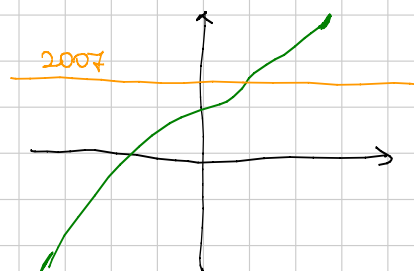
$$f(x) = 2007$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Per il teo. di esistenza degli zeri (o sua variante) si ha che  $f(x)$  è surgettiva

$\Rightarrow$  l'eq. data ha almeno una soluzione



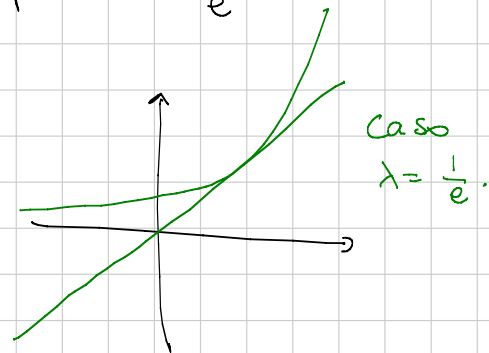


Conclusione: l'eq. ha

0 soluz. per  $\lambda > \frac{1}{e}$

1 soluz. per  $\lambda \leq 0$  e per  $\lambda = \frac{1}{e}$

2 soluz. se  $0 < \lambda < \frac{1}{e}$



## MATEMATICA I

ORA 44

Titolo nota

06/11/2007

## Monotonia 2

$$f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$$

 $\uparrow$  anche tutto  $\mathbb{R}$  o una semiretta

$$f'(x) \geq 0 \text{ in } (a,b) \Leftrightarrow f \text{ è deb. cresc. in } (a,b)$$

$$f'(x) > 0 \text{ in } (a,b) \Rightarrow f \text{ è strett. cresc. in } (a,b)$$

## Monotonia 3

$$f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}. \text{ Supponiamo che}$$

$$(i) f'(x) \geq 0 \text{ in } (a,b)$$

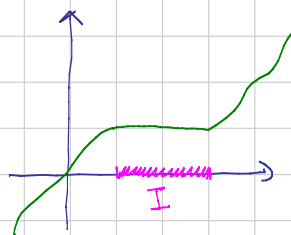
 $(ii)$  non esiste nessun intervallo  $I \subseteq (a,b)$  tale che

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \quad (\text{cioè } f' \text{ si annulla SPORADICAMENTE})$$

Allora  $f$  è strett. cresc. in  $(a,b)$ 

Dim. per l'ipotesi  $(i)$   $f$  è debolm. cresc. Supponiamo che non sia strett. cresc. Questo vuol dire che il grafico di  $f$  ha almeno un tratto piatto

Ma allora ho un intero intervallo  $I$  in cui  $f'(x) = 0$

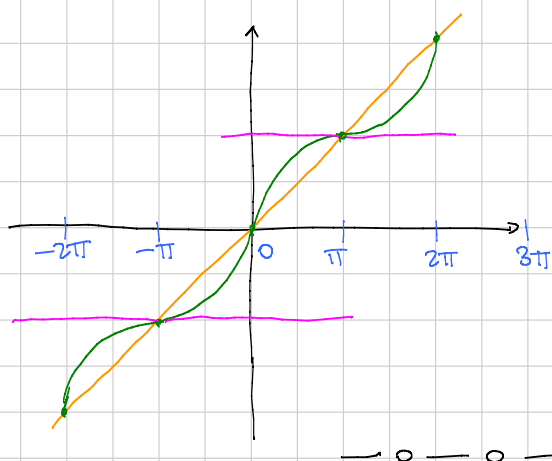
Esempio 1

$$f(x) = x + \sin x$$

$$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Quindi  $f'(x)$  si annulla SPORADICAMENTEMonotonia 3  $\Rightarrow f$  è strett. cresc.  $\Rightarrow f$  è iniettivaVista come  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è anche surgettiva (vedi limiti a  $\pm\infty$ )



i punti  $\pi + 2k\pi$  sono  
stazionari. Di che tipo?  
Poiché  $f'(x) \geq 0$  sempre  
sono dei p.ti di flesso a  
tg. orizz. ascendente.

ASINTOTI

- ORIZZONTALI
- VERTICALI
- OBLIQUI

**ASINTOTO ORIZZONTALE** La retta  $y = l$  si dice asint. orizz. per  $f(x)$  quando  $x \rightarrow +\infty$  se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

Si dice asintoto orizz. per  $x \rightarrow -\infty$  se  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$

Esempio 1  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

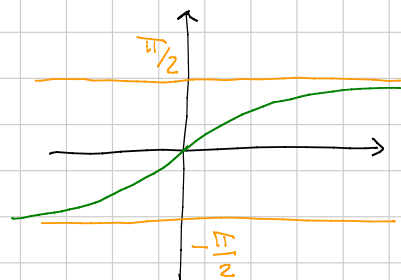
Conclusione: la retta  $y = 1$  è  
asint. orizz. sia per  $x \rightarrow +\infty$   
sia per  $x \rightarrow -\infty$



Esempio 2  $f(x) = \arctan x$

$y = \frac{\pi}{2}$  è asint. orizz. per  $x \rightarrow +\infty$

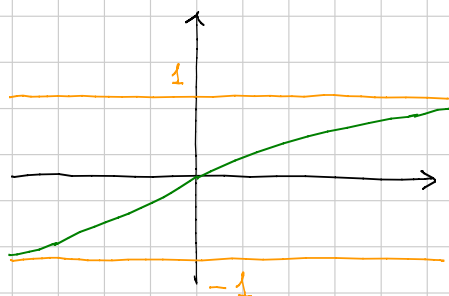
$y = -\frac{\pi}{2}$  è asintoto orizz. per  $x \rightarrow -\infty$



Esempio 3  $f(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = 1$   $y = 1$  as. orizz. per  $x \rightarrow +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1$   $y = -1$  as. orizz. per  $x \rightarrow -\infty$



$$f'(x) = \left( \frac{\sinh x}{\cosh x} \right)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0$$

↑  
REL. FOND.

### ASINTOTI VERTICALI

La retta  $x = x_0$  si dice asintoto verticale per  $f(x)$  se succede almeno una delle seguenti 4 possibilità

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) &= +\infty \\ \text{"} &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) &= +\infty \\ \text{"} &= -\infty \end{aligned}$$

Esempio 1  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$  Il denominatore si annulla per  $x = \pm 1$

Candidati ad essere asint. vert.:  $x = 1$  e  $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

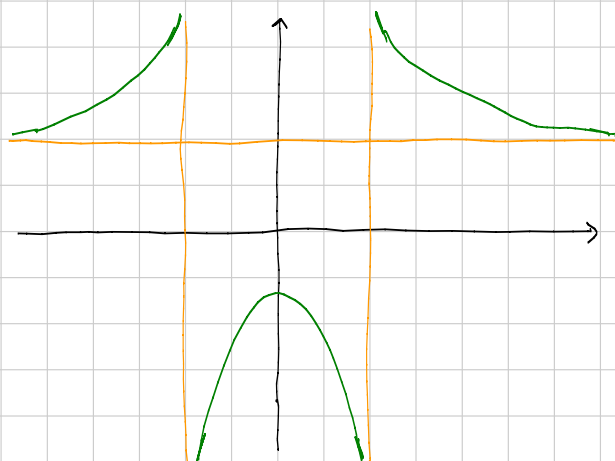


$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - 1) = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

$y = 1$  è asintoto orizz. sia per  $x \rightarrow +\infty$ , sia per  $x \rightarrow -\infty$



### ASINTOTI OBLIQUI

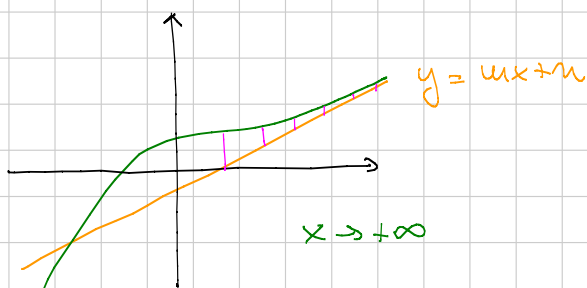
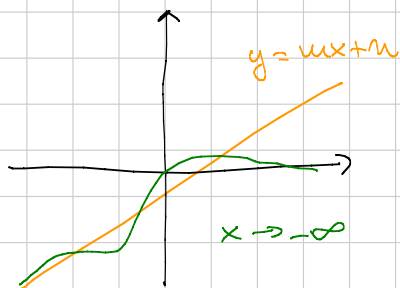
Si dice che la retta  $y = mx + n$  è asint. obliquo di  $f(x)$  per  $x \rightarrow +\infty$  se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - n) = 0$$

Analogamente:  $y = mx + n$  è asint. obliquo di  $f(x)$  per  $x \rightarrow -\infty$  se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx - n) = 0$$

Brutalmente: la differenza tra la funzione e la retta tende a 0, cioè la funzione "TENDE ALLA RETTA"





Operativamente: come calcolare  $m$  ed  $n$ .

La retta  $y = mx + n$  è asint. obliquo per  $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$$

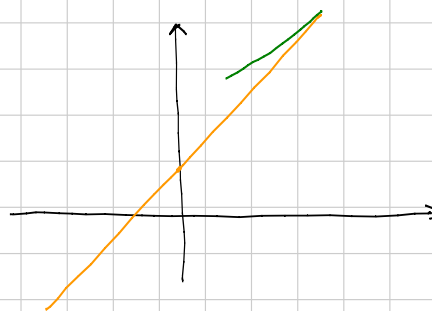
Esempio 1  $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$  Per  $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3}{x^2-x} = 1 = m$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+3}{x-1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2}+3-\cancel{x^2}+x}{x-1} = 1 = n$$

La retta  $y = x+1$  è asintoto obliquo per  $x \rightarrow +\infty$



Esempio 2

$$f(x) = 3x + \log x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \log x}{x} = 3 = m$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3\cancel{x} + \log x - 3\cancel{x}) = +\infty$$

$\Rightarrow$  NO ASINT. OBLIQUO

## MATEMATICA I

ORA 45

Titolo nota

06/11/2007

ASINTOTI OBLIQUI

① Un asintoto obliquo con  $m=0$  è in realtà un asintoto orizzontale

② Supponiamo che  $f$  sia derivabile e che esista  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ . Allora

e che ci sia l'asintoto obliquo.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$$

Sconsigliato: usare  $\lim f'(x)$  per calcolare  $m$ .

Dim Formule per calcolare  $m$  ed  $n$ 

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - n) = 0$  è equivalente a dire che

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$$

Supponiamo che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - n) = 0$ . Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - mx - n}{x} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x} \right] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

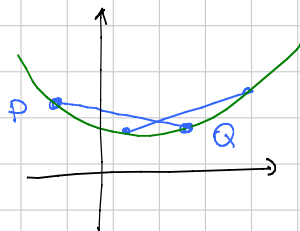
$\downarrow$   
 $0 \quad 0 \quad 0$

## CONVESSITÀ, FLESSI, DERIVATA SECONDA

Una funzione  $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$  si dice CONVESSA in  $(a,b)$  se

è fatta così  $\rightarrow$

cioè



comunque presi 2 punti P e Q  
sul grafico, il segmento PQ  
sta al di sopra del grafico

Si dice concava se ... il segmento PQ sta sotto il grafico

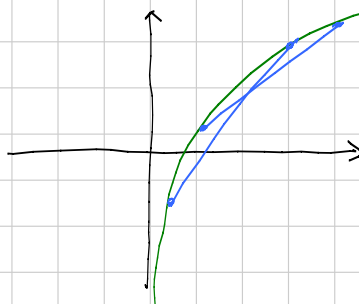
Esempio 1  $f(x) = x^2$



CONVESSA su  
tutto  $\mathbb{R}$

Esempio 2  $f(x) = \log x$

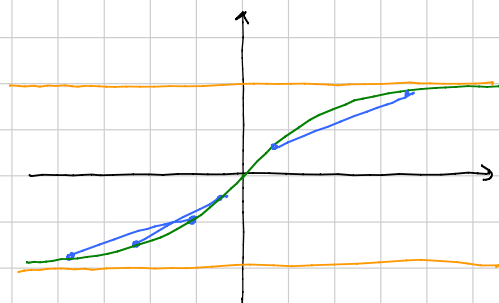
CONCAVA



Esempio 3  $f(x) = \arctan x$

CONVESSA in  $x \leq 0$

CONCAVA in  $x \geq 0$



Esempio 4  $f(x) = 2x + 3$

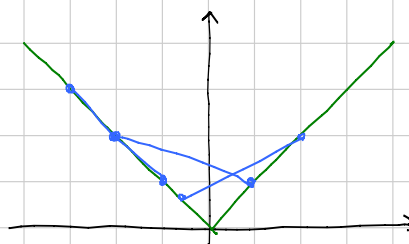
SIA CONVESSA

SIA CONCAVA su tutto  $\mathbb{R}$

Le rette sono tutte e sole le  
funzioni che sono sia  
concave sia convesse

Esempio 5  $f(x) = |x|$

CONVEXA su tutto  $\mathbb{R}$ .



Definizione rigorosa di funzione convessa

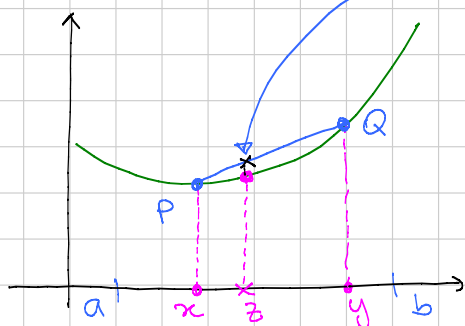
$f: (a,b)$  in  $\mathbb{R}$  è convessa in  $(a,b)$  se

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

$$\forall x \in (a,b)$$

$$\forall y \in (a,b)$$

$$\forall \lambda \in [0,1]$$



$z = \lambda x + (1-\lambda)y$ , quando  $\lambda$  varia tra 0 e 1, rappresenta tutti i pti del segmento  $xy$

Per esercizio: scrivere l'eq. della retta PQ e calcolarne il valore nel p.to z  $\rightarrow$  si ottiene  $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

Formula con disuguaglianza dice che

$$f(z) \leq \text{valore sulla PQ nel p.to } z$$

cioè funzione  $\leq$  segmento

CONVESSITÀ e DERIVATA SECONDA

1° fatto: le funzioni convesse NON sono obbligate ad avere la derivata II, e nemmeno la I  
(esempio  $f(x) = |x|$ )

2° fatto: supponiamo che  $f''(x)$  esista per ogni  $x \in (a,b)$

Allora  $f(x)$  CONVESSA in  $(a,b) \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$  in  $(a,b)$   
 " CONCAVA " "  $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0$  in  $(a,b)$

Estensione : funzioni STRETTAMENTE CONVESSE  
 " CONCAVE

$f(x)$  STRETT. CONV. in  $(a,b) \Leftrightarrow f''(x) > 0$  in  $(a,b)$   
 CONCAVA  $\Leftrightarrow f''(x) < 0$  "

**PUNTI DI FLESSO** " Punti in cui una funzione passa da convessa a concava o viceversa "

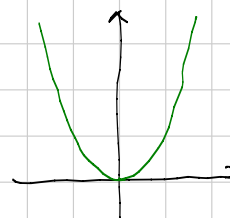
Oss. ① Se la  $f''$  esiste, nei p.ti di flesso vale 0

② I punti in cui  $f''(x) = 0$  sono tutti p.ti di flesso ?  
 ASSOLUTAMENTE NO

Esempio  $f(x) = x^4$

$$f'(x) = 4x^3 \quad f''(x) = 12x^2$$

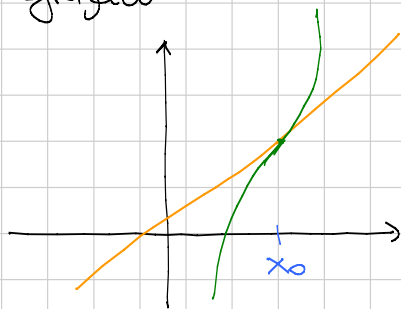
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$



Ma  $x=0$  è un p.to di minimo.  $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)$  è convessa su tutto  $\mathbb{R}$ . (in realtà strett. convessa)

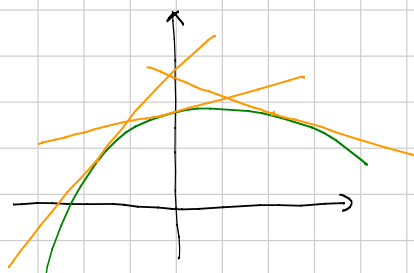
"In un p.to di flesso la retta tangente attraversa il grafico"



### Retta tg. e convessità.

\* Se una funzione è convessa, allora sta sopra le sue rette tangenti

\* se è concava, allora sta sotto le sue rette tangenti



### CONVESSITÀ E DERIVATA PRIMA

CONVESSA  $\Leftrightarrow f'' \geq 0 \Leftrightarrow f'(x)$  debolmente crescente  
 CONCAVA  $\Leftrightarrow f'' \leq 0 \Leftrightarrow f'(x)$  " decrescente

Esempio  $f(x) = \sin x$

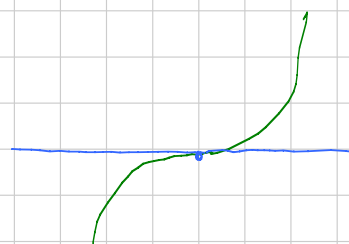
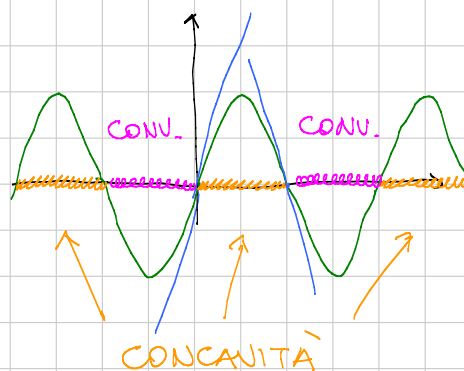
$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\sin x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \leq 0 \Leftrightarrow x \in [\pi, 2\pi] \text{ e traslati}$$

P.ti di flesso:  $x = k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$



## MATEMATICA I

Titolo nota

ORA 46

07/11/2007

## SUCCESIONI PER RICORRENZA

$$a_n = \frac{n+4}{n^2+5} \quad \leftarrow \text{FORMULA ESPlicita}$$

$$a_0 = 2$$

↑  
VALORE  
INIZIALE

$$a_{n+1} = 3a_n - 1$$

↑  
LEGGE PER  
CALCOLARE I  
VALORI SUCCESSIVI

$$a_1 = 3a_0 - 1 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$$

$$a_2 = 3a_1 - 1 = 3 \cdot 5 - 1 = 14$$

$$a_3 = 3a_2 - 1 = 3 \cdot 14 - 1 = 41$$

⋮

USO LEGGE CON  $m=0$

$$a_1 = 3a_0 + 0 = 3 \cdot 2 + 0 = 6$$

$$a_2 = 3a_1 + 1 = 19$$

$$a_3 = 3a_2 + 2 = 59$$

⋮

$$a_0 = 2$$

$$a_{n+1} = 3a_n + n$$

↑  
LA LEGGE DI  
PASSAGGIO  
CAMBIA DI VOLTA IN VOLTA

UNA SUCC. PER RICORRENZA SI DICE **AUTONOMA** SE LA  $n$  compare solo come indice.

Si dice NON AUTONOMA altrimenti

$$a_{n+1} = \arctan(a_n) + e^{a_n}$$

AUTONOMA

$$a_{n+1} = a_n^2 + \sin(a_n)$$

NON AUTONOMA

$$a_{n+1} = 3a_n + 5a_{n-1}$$

In questo caso servono 2 condizioni iniziali per poter partire

$$a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 3a_1 + 5a_0 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = 6$$

$$a_3 = 3a_2 + 5a_1 = 3 \cdot 6 + 5 \cdot 2 = 28$$

Una succ. per ricorrenza si dice **DI ORDINE  $k$**  se un termine dipende dai  $k$  termini precedenti

L'ultimo termine era di ordine 2.

Ci limitiamo alle succ. per ric. di ordine 1

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) & \leftarrow \text{ricorrenza} \\ a_0 = \alpha & \leftarrow \text{termine iniziale} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{CASO} \\ \text{AUTONOMO} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n, n) \\ a_0 = \alpha \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{CASO NON} \\ \text{AUTONOMO} \end{matrix}$$

Domanda: calcolare il limite di  $a_n$  per  $n \rightarrow +\infty$ .

Esempio 1  $a_0 = 1$ ,  $a_{n+1} = 3a_n$

In questo caso si riesce a trovare la formula esplicita.

$$a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 9, a_3 = 27, \dots, \boxed{a_n = 3^n}$$

$[n \Rightarrow n+1]$  si dimostra per induzione

$$a_n = 3^n \Rightarrow a_{n+1} = 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$$

$a_n \rightarrow +\infty$

Esempio 2  $a_1 = 0$   $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n}$

$$a_2 = a_1 + 1 = 1, \quad a_3 = a_2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$a_4 = a_3 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\text{In generale } a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

In questo caso  $a_n$  è una somma parziale della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Poiché la serie diverge, le somme parziali, cioè  $a_n$  tendono a  $+\infty$ .



**Esempio VERO 1**  $a_0 = \frac{1}{2}$   $a_{n+1} = a_n^2$

Volendo si può ricavare la formula esplicita per  $a_n$ .

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{1}{16}, a_3 = \frac{1}{16^2} = \frac{1}{256}$$

SEMBRA che  $a_n$  sia decrescente e  $a_n \rightarrow 0$ .

**PIANO PER DIMOSTRARLO**

(i)  $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii)  $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii)  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(iv)  $l = 0$

**Dim (iii)**

Dal punto (i) e dal punto (ii) sappiamo che  $a_n$  è monotona decrescente e limitata dal basso. Dal teo. sulle succ. monotone segue subito che  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$  (non può essere  $a_n \rightarrow -\infty$  perché  $a_n \geq 0$  sempre)

**Dim. (iv)**

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} = a_n^2 & & \\ \downarrow & \downarrow & \\ l = l^2 & \nearrow l=0 \leftarrow \text{UNICA POSSIBILITÀ} & \\ & \searrow l=1 \leftarrow \text{INCOMPATIBILE} & \\ & & \text{CON } a_n \leq \frac{1}{2} \end{array}$$

**Dim (ii)**

Devo dim. che  $a_{n+1} \leq a_n$ , cioè

$$a_n^2 \stackrel{?}{\leq} a_n \quad a_n^2 - a_n \stackrel{?}{\leq} 0 \quad a_n(a_n - 1) \stackrel{?}{\leq} 0 \quad \text{VALORI INTERNI}$$

vera se  $0 \leq a_n \leq 1 \leftarrow$  VERA se ho dimostrato il punto (i)

Dim. di (i) PER INDUZIONE

$n=0$   $0 \leq a_0 \leq \frac{1}{2}$   $0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$  Ok.

P.I. Ipotesi:  $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$  Tesi:  $0 \leq a_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

Dim. prendo l'ipotesi e applico il quadrato (posso farlo conservando i versi perché  $x^2$  è deb. cresc. per  $x \geq 0$ )

$$\begin{array}{ccc} 0^2 \leq a_n^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ 0 \leq a_{n+1} \leq \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}, \text{ cioè la tesi del } \\ \text{passaggio induttivo.} \end{array}$$

— 0 — 0 —

Esempio 2  $a_0 = 2$   $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$

$a_0 = 2$   $a_1 = 2^2 + 2 = 6$   $a_2 = 6^2 + 6 = 42$

PIANO (i)  $a_n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$   
 (ii)  $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$   
 (iii)  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$   
 (iv)  $l = +\infty$

Dim (iii) Per il p.to (ii) la succ. è deb. cresc.  
 Quindi  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$   
 (abbiamo la limitazione solo dal basso)

Dim (iv)  $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$  SUPPONIAMO  $l \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ l & = & l^2 + l \end{array} \leadsto l=0$$

l'unica possibilità è  $l = +\infty$  ← NO, INCOMPATIBILE CON (i)

Dim (ii)  $a_{n+1} \stackrel{?}{\geq} a_n$   $a_n^2 + a_n \stackrel{?}{\geq} a_n$

$a_n^2 \geq 0$  sempre vera !!!

Dim (i) Per induzione

$n=0$  immediato

P.I. ipotesi:  $a_n \geq 2$  tesi:  $a_{n+1} \geq 2$

Dim prendo l'ipotesi  $a_n \geq 2$

$$a_{n+1} = \underbrace{a_n^2}_{\geq 0} + a_n \geq a_n \geq 2 \quad \leftarrow \text{TESI}$$

$\uparrow$   
uso Hp.

## MATEMATICA I

ORA 47

Titolo nota

07/11/2007

## FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE

Con centro in  $x_0 = 0$ 

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

errore che si commette

Con centro in  $x_0 \neq 0$ approssimando  $f(x)$  con  $P_n(x)$ 

$$f(x_0 + h) = P_n(h) + o(h^n)$$

RESTO DI PEANO

$$f(x) = P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

In queste formule il resto è un "o piccolo", cioè è piccolo  
"al limite"

$$10^{10.000} x^{10} = o(x^{10})$$

QUALITATIVO

Con resto di Lagrange

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

con  $\xi$  compreso tra 0 e  $x$ Con centro in  $x_0 \neq 0$ 

$$f(x_0 + h) = P_n(h) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

con  $\xi$  compreso tra  $x_0$  e  $x_0 + h$ 

## Calcolo approssimato di funzioni

Esempio 1 Voglio calcolare  $\sin\left(\frac{1}{10}\right)$ 

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

Se invece di calcolare  $\sin \frac{1}{10}$ , calcoliamo  $P_3\left(\frac{1}{10}\right)$ , cioè

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10^3} \quad \text{quale errore commettiamo?}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{f^{(5)}(5)}{5!} x^5 \quad \text{Formula con } m=5$$

$$f(x) = \sin x \quad f^{(5)}(x) = \sin x$$

$$\left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| = \left| \frac{\sin 5}{120} x^5 \right| \leq \frac{|x|^5}{120}$$

↑  
ERRORE CHE COMMITTO  
APPROSSIMANDO  $\sin x$  con  $P_3(x)$

Ponendo  $x = \frac{1}{10}$  abbiamo che

$$\left| \sin \frac{1}{10} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6000} \right| \leq \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{10^5} = \frac{1}{12.000.000}$$

$$\left| \sin \frac{1}{10} - \frac{599}{6000} \right| \leq \frac{1}{12.000.000}$$

Conclusione se dico  $\sin \frac{1}{10} \sim \frac{599}{6000}$  commetto un errore

minore di  $\frac{1}{12.000.000}$  QUANTITATIVO

$$\frac{599}{6000} = 0,09983333 \quad \sin \frac{1}{10} = 0,09983334$$

— 0 — 0 —

Esempio 2  $e^{1/10}$

$$e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$e^{1/10} \sim 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{6000} = \frac{6000 + 600 + 30 + 1}{6000} = \frac{6631}{6000}$$

Stimare l'errore commesso

$$e^x = P_3(x) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} x^4 \quad f^{(4)}(\xi) = e^\xi$$

$$\underbrace{|e^x - P_3(x)|}_{\text{ERRORE}} = \left| \frac{e^\xi}{4!} x^4 \right| = \frac{e^\xi x^4}{24}$$

Ponendo  $x = \frac{1}{10}$   $\left| e^{\frac{1}{10}} - \frac{6631}{6000} \right| = \frac{e^\xi}{24} \cdot \frac{1}{10000}$

Dove sta  $\xi$ ? Sta tra  $0$  e  $x = \frac{1}{10}$ , quindi  $e^\xi < e^{\frac{1}{10}} < e^1 < 3$

Quindi  $\text{errore} \leq \frac{1}{80.000}$

$$\frac{6631}{6000} = 1,105166$$

$$e^{\frac{1}{10}} = 1,10517$$

## 2° UTILIZZO Dimostrazione di disuguaglianze

Esempio 1 Dimostrare che  $e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Utilizzo Taylor - Lagrange con  $n=1$

$$f(x) = P_1(x) + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2} x^2$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ e^x = 1 + x + \frac{e^\xi}{2} x^2 \geq 1+x \end{array}$$

Questo è  
sempre  $\geq 0$

Cosa succede se prendo  $n=2$ ?

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{e^\xi}{6} x^3$$

$\geq 0$  per  $x \geq 0$   
 $\leq 0$  per  $x \leq 0$

Quindi

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad \text{per } x \geq 0$$

$$e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad \text{per } x \leq 0$$

Più in generale !

$$e^x \geq P_{2m+1}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^x \geq P_{2m}(x) \\ e^x \leq P_{2m}(x) \end{array} \right. \quad \forall x \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^x \geq P_{2m}(x) \\ e^x \leq P_{2m}(x) \end{array} \right. \quad \forall x \leq 0$$

Esempio 2  $f(x) = \sin x \quad m=1 \quad f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x$

$$\sin x = x + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2} x^2$$

$$\sin x = x - \frac{\sin \xi}{2} x^2$$

$$\begin{array}{c} 0 \quad \xi \quad x \quad \pi/2 \\ | \quad | \quad | \quad | \end{array}$$

Supponiamo  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , allora

$$0 < \xi < \frac{\pi}{2}, \text{ quindi } \sin \xi > 0$$

$$\sin x < x \quad \text{per } x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Per  $x \geq \frac{\pi}{2}$  ho comunque sempre che

$$\sin x \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x$$

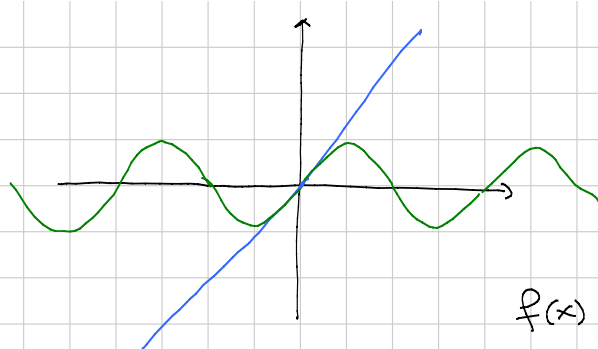
Conclusione :

$$\sin x \leq x \quad \forall x \geq 0$$

$$\sin x \geq x \quad \forall x \leq 0$$

vale il seguito di =  
se e solo se  $x=0$

↑ segue da quella sopra dopo aver  
osservato che  $\sin x$  e  $x$  sono DISPARI



Altro modo di dimostrare  
la disuguaglianza:

$$\sin x \stackrel{?}{\leq} x$$

$$f(x) = x - \sin x \stackrel{?}{\geq} 0$$

Studio  $f(x)$ . ①  $f(0) = 0$

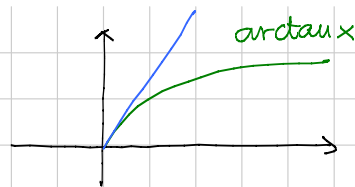
$$\textcircled{2} f'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \quad \text{e} \quad f'(x) = 0 \text{ se e solo se} \\ \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Monotonia 3  $\Rightarrow f$  è strettamente crescente.

$$\begin{aligned} \text{Quindi } f(x) > 0 \text{ per } x > 0 &\leadsto \sin x < x \text{ per } x > 0 \\ f(x) < 0 \text{ per } x < 0 &\leadsto \sin x > x \text{ per } x < 0 \end{aligned}$$

**Esempio 2**

$$\begin{aligned} \arctan x &< x && \text{per } x > 0 \\ \arctan x &> x && \text{per } x < 0 \end{aligned}$$



Studio la funzione  $f(x) = x - \arctan x$

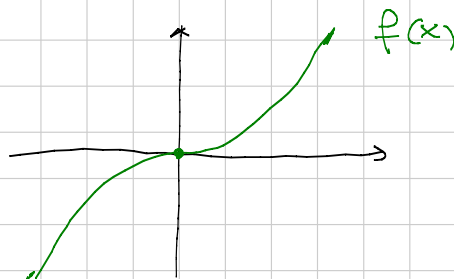
$$\textcircled{1} f(0) = 0$$

$$\textcircled{2} f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{\cancel{1+x^2}-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (\text{annullamento sporadico})$$

$\Rightarrow$  per Monotonia 3  $f(x)$  è strett. cresc.

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &> 0 \text{ per } x > 0 \\ f(x) &< 0 \text{ per } x < 0 \end{aligned}$$





## MATEMATICA I

ORA 48

Titolo nota

07/11/2007

"Dim" Taylor-Lagrange

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}, \text{ cioè } -$$

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Chiamo  $g(x) = f(x) - P_n(x)$ . Si verifica "agevolmente" che

$$g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n)}(0) = 0 \quad \text{e} \quad g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{x^{n+1}} &= \frac{g(x) - g(0)}{x^{n+1} - 0^{n+1}} = \frac{g'(\xi_1)}{(n+1)\xi_1^n} = \frac{g'(\xi_1) - g'(0)}{(n+1)\xi_1^n - (n+1)0^n} = \\ &= \frac{g''(\xi_2)}{(n+1)n\xi_2^{n-1}}. \quad \square \end{aligned}$$

LIPSCHITZIANITA'  $\rightarrow$  Domani

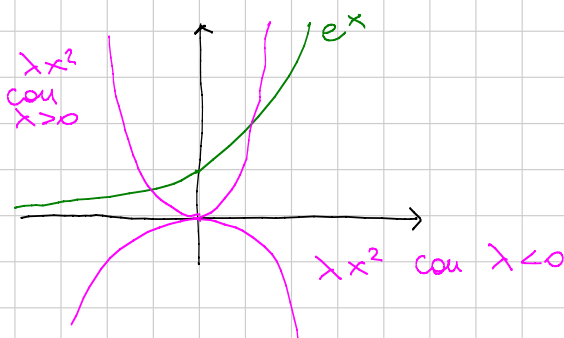
**Esercizio 1** Determinare, al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$ , il numero di soluzioni dell'equazione

$$e^x = \lambda x^2$$

Modo più corretto

$$\frac{e^x}{x^2} = \lambda$$

$f(x)$

Studio la funzione  $f(x)$ . Problemi per  $x=0$ 

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

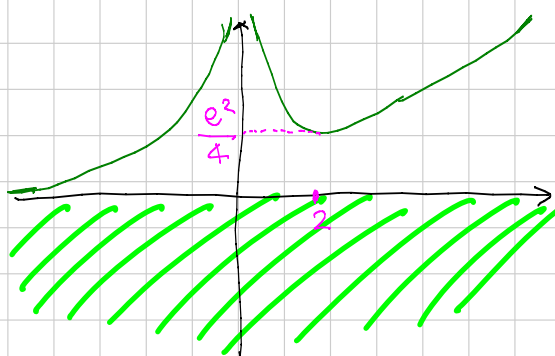
$$f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

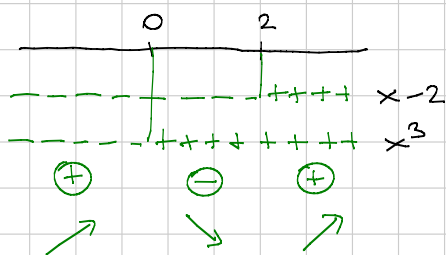
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x}{x^4}$$

$$= \frac{e^x \cdot x - 2e^x}{x^3} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$



Segno di  $f'(x)$  dipende dal segno di  $\frac{x-2}{x^3}$



Risolvere  $e^x = \lambda x^2$  è equivalente a risolvere  $f(x) = \lambda$ , cioè intersecare il grafico di  $f(x)$  con rette // asse  $x$

Quindi:  $\lambda \leq 0 \rightsquigarrow 0$  soluz.

$0 < \lambda < \frac{e^2}{4} \rightsquigarrow 1$  soluz.

$\lambda = \frac{e^2}{4} \rightsquigarrow 2$  soluz.

$\lambda > \frac{e^2}{4} \rightsquigarrow 3$  soluz.

**Esercizio 2-3**

ELENCO

$$\max \{ x^2 : x \in [-2, 1] \}$$

$$= 4$$

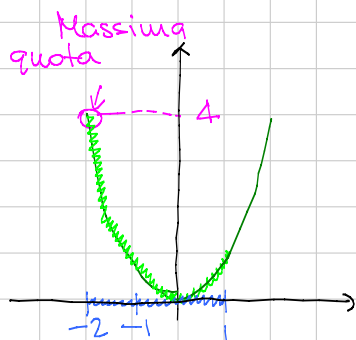
MONDO  
y

$$\max \{ x \in [-2, 1] : x^2 \leq \frac{1}{4} \} = \frac{1}{2}$$

MONDO  
x

↑  
PROPRIETÀ

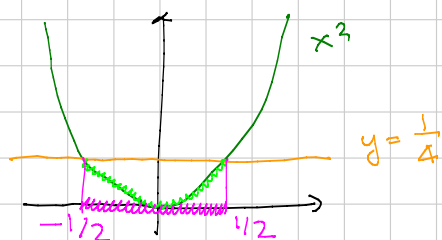
$\text{Max} \{x^2 : x \in [-2, 1]\} =$  massimo valore assunto dalla funzione  $x^2$  quando  $x$  varia in  $[-2, 1]$



$$\text{max} \{x \in [-2, 1] : x^2 \leq \frac{1}{4}\} =$$

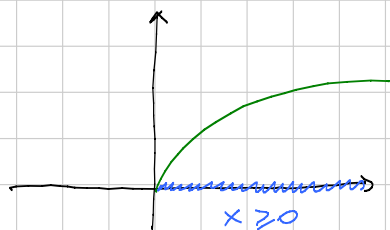
= risolvere nell'intervallo  $[-2, 1]$  la disequazione  $x^2 \leq \frac{1}{4}$ . Prendere poi il max dell'insieme delle soluzioni

$$x^2 \leq \frac{1}{4} ; x^2 - \frac{1}{4} \leq 0, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad \text{Max}$$



$$\min \{\arctan x : x \geq 0\} = 0 \quad \text{MONDO } y$$

$$\min \{x \in \mathbb{R} : \arctan x \geq 0\} = 0 \quad \text{MONDO } x$$

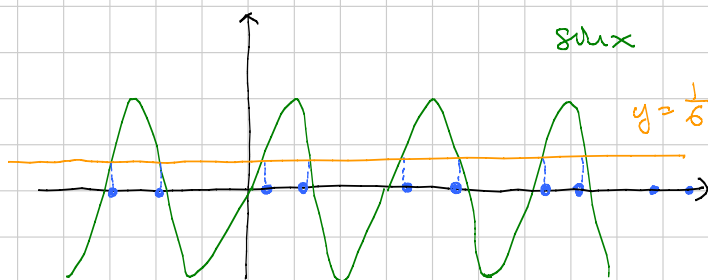


minima quota raggiunta: 0

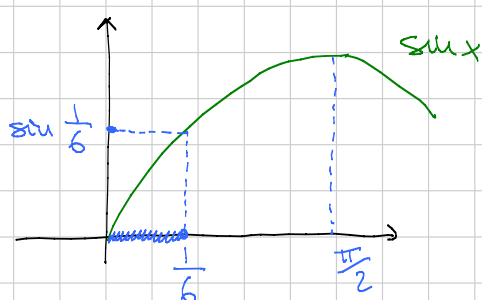
$x \in \mathbb{R} : \arctan x \geq 0 \rightarrow$  risolvere la diseq.  $\arctan x \geq 0$  e prendere il minimo dell'insieme delle soluzioni

$$\arctan x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \leadsto \text{il minimo è } 0$$

$$\sup \{ x \in \mathbb{R} : \sin x = \frac{1}{6} \} = +\infty \quad \text{MONDO } x$$



$$\sup \{ \sin x : 0 \leq x \leq \frac{1}{6} \} = \sin \frac{1}{6} \quad \text{MONDO } y$$



è anche Max

In questo caso max e min esistono per W

$$\sup \{ \underbrace{x^8 - \log(1+x^6) + \sin x^7}_{f(x)} : x \in \mathbb{R} \} = +\infty \quad \text{MONDO } y$$

Basta vedere che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Domanda: esiste  $\min \{ x^8 - \log(1+x^6) + \sin x^7 : x \in \mathbb{R} \}$  ?

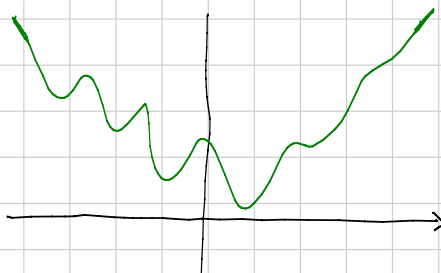
Non posso applicare W perché non sono su un intervallo  $[a,b]$

Per dimostrare che il minimo esiste, basta osservare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

+  $f$  continua



$$\max \{ m \in \mathbb{N} : \underbrace{m^2 \leq 7m+2}_{\substack{\downarrow \\ \text{risolvere su } \mathbb{N}}} \} = 7$$

$$m=0 \text{ vera} \quad m=1 \text{ vera} \quad m=2 \text{ V} \quad m=3 \text{ V} \quad \dots \quad m=7 \text{ V}$$

$$m=8 \text{ FALSA}$$

$$\max \{ m \in \mathbb{N} : \underbrace{\left| \underbrace{e^m}_{\substack{\downarrow \\ 0}} - \underbrace{\sin m!}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \right|}_{f(x)} (17-u^2) \geq 0 \} = 4$$

$$\min \{ \lambda \in \mathbb{R} : \underbrace{\arctan(7x+e^x)}_{f(x)} \leq \lambda \quad \forall x \in \mathbb{R} \} = \frac{\pi}{2}.$$

MODO STRANO DI CHIEDERE IL MAX (ANZI IL SUP)  
DELLA  $f(x)$

## MATEMATICA I

ORA 49

Titolo nota

08/11/2007

## FUNZIONI LIPSCHITZIANE

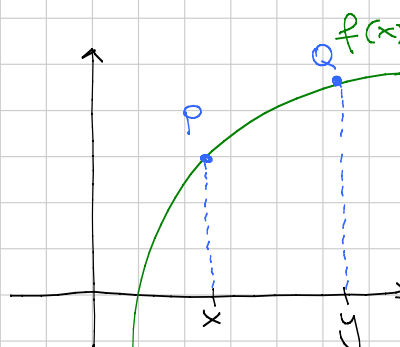
Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  e sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dice che  $f$  è Lip. in  $A$  con costante  $L$  se

$$|f(y) - f(x)| \leq L |y - x| \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A$$

Significato geom.

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq L$$

$\uparrow$   
-L coeff. angolare retta PQ  $\leq L$



Detto brutalmente: funzione Lip.  $\Leftrightarrow$  il grafico ha pendenza limitata

**Fatto 1** Sia  $f(x)$  Lip. e derivabile. Allora  $|f'(x)| \leq L$

Dim.  $\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| = \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} \right| \leq L$

Passando al limite per  $h \rightarrow 0$  si ottiene  $|f'(x_0)| \leq L$

**Fatto 2** Sia  $f(x)$  una funzione  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .  
Supponiamo  $f(x)$  derivabile in  $(a, b)$  e sia

$$M = \max \{ |f'(x)| : x \in (a, b) \} \leftarrow \text{supponiamo che esista}$$

Allora  $f(x)$  è Lip. in  $[a, b]$  con costante  $M$ .

Dim.  $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x)$

↑  
Teo. Lagrange nell'intervallo  $[x,y]$

$$\Rightarrow |f(y) - f(x)| = |f'(\xi)| \cdot |y-x| \leq M |y-x|$$

↑  
sta tra  $x$  e  $y$ , dunque  
in particolare in  $(a,b)$

$\Rightarrow f$  è Lip. con costante  $M$

(in realtà basta che  $M$  sia  $\sup \{ |f'(x)| : x \in (a,b) \} \in \mathbb{R}$ )

Esempio 1  $f(x) = x^2$   $f$  è lip. in  $\mathbb{R}$ ?

Intuitivamente NO! Sappiamo che essendo  $f$  derivabile si ha

lip.  $\Leftrightarrow$  derivata limitata

$f'(x) = 2x$  non è limitata su tutto  $\mathbb{R}$

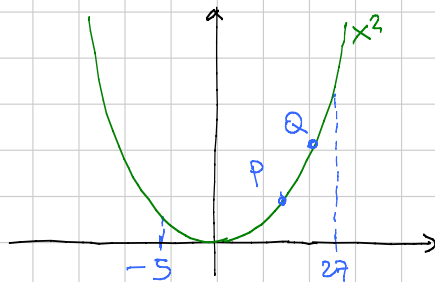
Esempio 2  $f(x) = x^2$   $f$  è Lip. in  $[-5, 27]$ ?

Essendo derivabile: lip  $\Leftrightarrow$  derivata limitata

$f'(x) = 2x$  è limitata per  $x \in [-5, 27]$

$$M = \max \{ |2x| : x \in [-5, 27] \} = 54$$

in particolare  $|f(y) - f(x)| \leq 54 |y-x|$   $\forall x \in [-5, 27]$   
 $\forall y \in [-5, 27]$

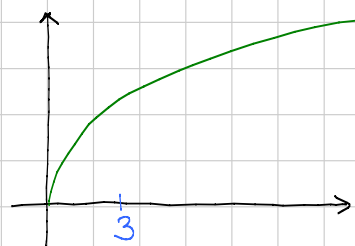
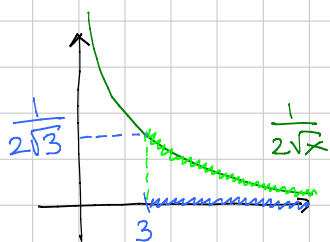


↑  
ogni retta PQ ha coeff.  
angolare minore di 54  
e maggiore di -54

**Esempio 3**  $f(x) = \sqrt{x}$   $f$  è lip. in  $[3, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{dunque per } x \geq 3 \text{ è limitata}$$

$$M = \max \{ |f'(x)| : x \geq 3 \} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$



**Esempio 4**  $f(x) = \sqrt{x}$  è lip. in  $[0, 3]$ ? NO!

Se fosse lipschitziana la sua derivata, dove esiste, sarebbe limitata. Ma

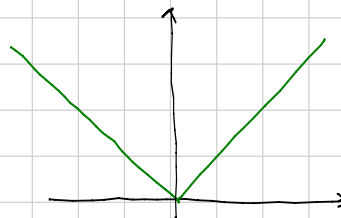
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{non è limitata quando } x \rightarrow 0^+$$

**Esempio 5**  $f(x) = |x|$  è lip. su  $\mathbb{R}$ ? SI

Algebricamente si ha la disuguaglianza.

$$||y| - |x|| \leq |y - x|$$

↑ Proprietà del valore assoluto  
(si dimostra distinguendo i casi  $x \geq 0, y \geq 0$ )



In questo caso la costante di Lipschitz è 1.

↓ più piccolo valore di  $L$  che va bene nella definizione

**Esempio 6**  $f(x) = \sin x$  è lip. su  $\mathbb{R}$ ? SI

$$f'(x) = \cos x \quad |f'(x)| \leq 1 \Rightarrow \text{lip. con costante 1}$$



$$\Rightarrow | \sin y - \sin x | \leq |y - x|$$

Stessa cosa per  $\cos x$ , quindi

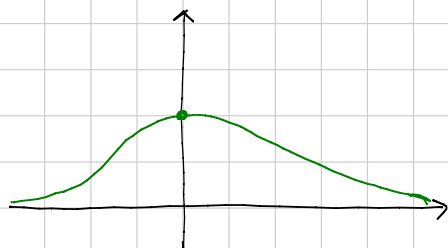
$$| \cos y - \cos x | \leq |y - x|$$

**Esempio 7**  $f(x) = \arctan x$  è lip. su  $\mathbb{R}$ ?

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\sup_{\max} \{ |f'(x)| : x \in \mathbb{R} \} = 1$$

$x=0$  è il p.to di max

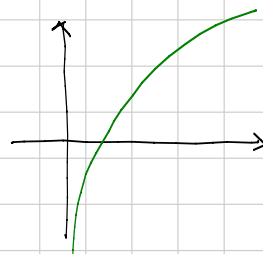


$$| \arctan y - \arctan x | \leq |y - x|$$

**Esempio 8**  $f(x) = \log x$  è lip. in  $(0, +\infty)$ ? No

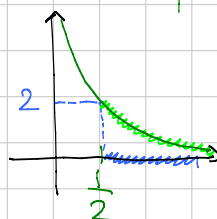
$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ non è limitata per } x \rightarrow 0^+$$

$f(x) = \log x$  è lip. in  $(\frac{1}{2}, +\infty)$ ? Sì



$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ è limitata per } x > \frac{1}{2}$$

$$\sup_{\max} \{ |f'(x)| : x > \frac{1}{2} \} = \frac{2}{1} = 2$$



**Esempio 9**  $\frac{\sin x^4}{x}$  è lip. per  $x \geq 1$ ?

$$-1 \leq \sin x^4 \leq 1$$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x^4}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Non è Lipschitziana !!!

$$f(x) = \frac{\sin x^4}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x^4 \cdot 4x^3 \cdot x - \sin x^4}{x^2}$$

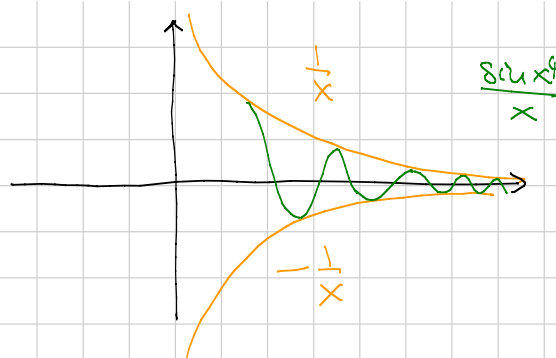
$$= \boxed{4x^2 \cos x^4} - \boxed{\frac{\sin x^4}{x^2}}$$

PEZZO

NON LIMITATO

(prendo  $x$  enorme  
con  $\cos x^4 = 1$ )

PEZZO LIMITATO per  $x \geq 1$



## MATEMATICA I

ORA 50

Titolo nota

08/11/2007

**Esempio 1**  $f(x) = x \cos x$ 

$$x \cos x = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ opp. } \cos x = 0$$

$$\cos x = 0$$

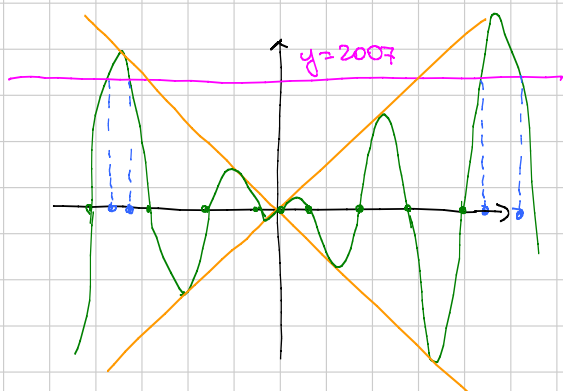
↑

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\sup \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \} = +\infty \quad \text{MONDO } y$$

$$\inf \{ x \in \mathbb{R} : f(x) = 2007 \} = \text{MONDO } x =$$



= risolvi l'eq.  $x \cos x = 2007$   
e prendi l'inf. delle solus.  
ottenute

$$= -\infty$$

**Esempio 2**  $f(x) = \cos x^2$ 

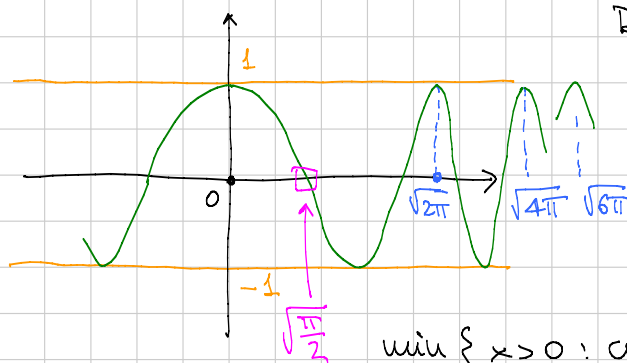
$$\text{PARI} \quad f(-x) = \cos(-x)^2 = \cos x^2 = f(x)$$

$$\sup \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \} = 1 \quad \text{MONDO } y$$

$$\max \{ \quad \} = 1$$

$$\sup \{ x \in \mathbb{R} : \cos x^2 = 1 \} = +\infty \quad \text{MONDO } x$$

$$\min \{ x > 0 : \cos x^2 = 1 \} = \sqrt{2\pi} \quad \text{MONDO } x$$



Dove vale 1?

$$\cos x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

⇕

$$x = \sqrt{2k\pi} \quad k \in \mathbb{N}$$

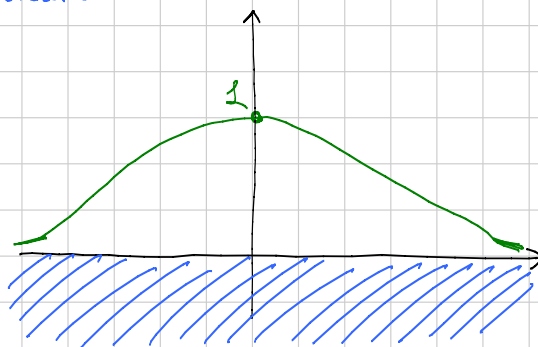
$$\min \{ x > 0 : \cos x^2 = 1 \} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

**Esempio 3** Studiare la funzione  $f(x) = \frac{\arctan x}{x}$

**PARI**

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\arctan(-x)}{-x} = \\ &= \frac{-\arctan x}{-x} = \\ &= \frac{\arctan x}{x} = f(x) \end{aligned}$$

uso che  $\arctan$  è  
DISPARI



Problemi per  $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\max_{\sup} \{ f(x) : x > 0 \}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\arctan x)' \cdot x - 1 \cdot \arctan x}{x^2} = \\ &= \frac{\frac{x}{1+x^2} - \arctan x}{x^2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  il segno di  $f'(x)$  dipende dal segno di  $\frac{x}{1+x^2} - \arctan x$

$$\boxed{\frac{x}{1+x^2} - \arctan x} \geq 0$$

$= g(x)$

non è una diseq.  
elementare!

Nuovo inizio!! studio  $g(x)$

DISPARI:  $g(-x) = -g(x)$

$$g(0) = 0$$

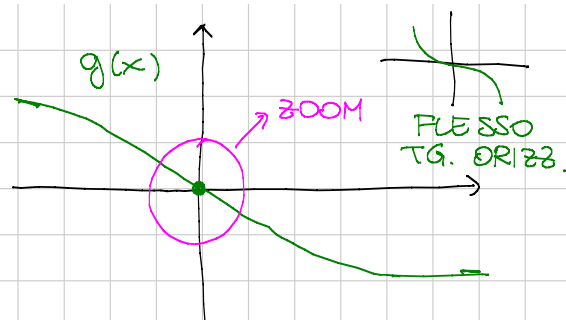
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Provo a calcolare  $g'(x)$

$$g'(x) = \frac{1+x^2-2x \cdot x}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{\cancel{1-x^2}-\cancel{1-x^2}}{(1+x^2)^2} = -\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$$



$g'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  inoltre  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (annullamento sporadico)

Monotonia  $\Rightarrow g(x)$  strett. decrescente

$g(0) = 0 \begin{cases} \nearrow g(x) < 0 & \text{per } x > 0 \\ \searrow g(x) > 0 & \text{per } x < 0 \end{cases}$

Tornando alla  $f(x)$  iniziale abbiamo dimostrato che

$f'(x) < 0$  per  $x > 0$  e  $f'(x) > 0$  per  $x < 0$ ,

quindi il grafico è quello disegnato all'inizio.

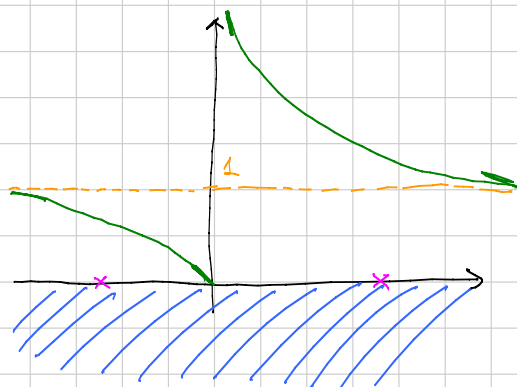
**Esempio 4**  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{0^+} = 1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e^{0^-} = 1^-$$



Errore fondamentale :  $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$  decrescente

↑  
ABUSIVA IN GENERALE  
(vale se la zona di definizione  
è "senza buchi")

$f(x)$  ha problemi per  $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$

La zona di definizione  
della funzione è  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$   
dunque fatta da 2 pezzi:

$$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Monotonia NON abusivo : in ciascuno dei 2 pezzi la funzione  
è DECRESCENTE (STRETT.)

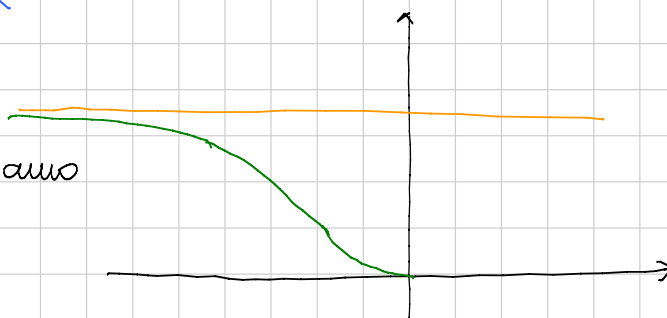
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} -y^2 e^y = 0$$

↑  
 $y = \frac{1}{x}$

comuto  $z = -y$

Da questo ci aspettiamo  
un pto di flesso  
negativo.



Esercizio : confermare  
calcolando  $f''(x)$ .

## MATEMATICA I

ORA 51

Titolo nota

09/11/2007

Esempio  $a_{n+1} = e^{a_n}$   $a_0 = 0$

PIANO

- (i)  $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (ii)  $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (iii)  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
- (iv)  $l = +\infty$

Dim (i)  $m=0$  è vero  $a_{n+1} = e^{a_n} > 0$

Dim (ii)  $a_{n+1} \stackrel{?}{\geq} a_n$   $e^{a_n} \stackrel{?}{\geq} a_n$  questo si riduce alla disequazione  $e^x \geq x$

2 modi per affrontare la disequazione

1° modo: studio la funzione  $f(x) = e^x - x$

2° modo: usare la disug. classica  $e^x \geq 1+x$  (dimostrata a

suo tempo con Taylor - Lagrange) e vera  $\forall x \in \mathbb{R}$

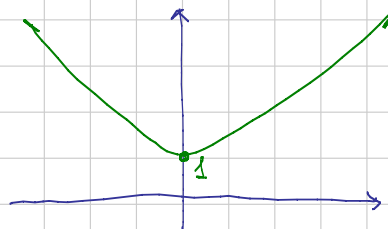
1° modo  $f(x) = e^x - x$

$f(0) = 1$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = e^x - 1$

$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x > 0 \\ = 0 & \text{per } x = 0 \\ < 0 & \text{per } x < 0 \end{cases}$



(Commento:  $a^x$  cresce esponenzialmente,  $a^x$  cresce linearmente (anzi  $y = -x$  è asint. obliquo))

Conclusione  $e^x - x > 0$  sempre, anzi  $e^x - x \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$e^x \geq x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{a_n} \geq a_n$  sempre  $\Rightarrow a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**Dim (iii)** Segue dal (ii) e dal teo. sulle succ. monotone

**Dim (iv)** Supponiamo per assurdo che  $l \in \mathbb{R}$ . Allora

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & e^{a_n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & e^l \end{array} \quad \text{otteniamo l'eq. } l = e^l, \text{ cioè}$$

$$e^l - l = 0 \rightarrow \text{IMPOSSIBILE perché}$$

$$f(x) = e^x - x \text{ non si annulla mai}$$

$\Rightarrow$  l'unica poss. è  $l = +\infty$

— 0 — 0 —

Esercizio 2       $a_0 = 0$        $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12}$

**PIANO**

- (i)  $0 \leq a_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (ii)  $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (iii)  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
- (iv)  $l = 4$

**Dim (i)**  $a_n \geq 0$  banale (la radice quadrata fornisce in OUTPUT solo valori  $\geq 0$ )

Resta da dimostrare che  $a_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow$  INDUZIONE

**[n=0]**  $a_0 \stackrel{?}{\leq} 4 \quad 0 \leq 4 \quad \text{Ok}$

**[P.I]** Ipotesi:  $a_n \leq 4$       Tesi:  $a_{n+1} \leq 4$

Considero l'ipotesi e applico la funzione  $f(x) = \sqrt{x+12}$



$$a_n \leq 4 \Rightarrow \text{(Posso farlo perché } f(x) \text{ è strett. crescente)}$$

$$\sqrt{a_n + 12} \leq \sqrt{4 + 12}$$

$$a_{n+1} \leq 4$$

Partendo dall'ipotesi e applicando  $f$  trovo la tesi

**Dim (ii)**

(i) + (ii) + Teo. succ. monotone

← serve  $a_n \leq 4$  per avere limite reale

**Dim (i)**

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

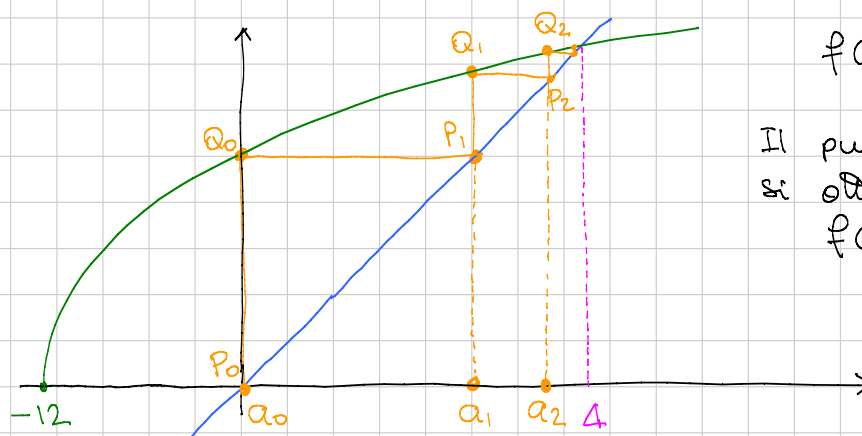
$$l = \sqrt{l + 12}$$

Devo risolvere l'eq.  $l^2 = l + 12$ ,  $l^2 - l - 12 = 0$ ,  $(l - 4)(l + 3) = 0$

$$l = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases} \leftarrow \text{UNICO POSSIBILE LIMITE}$$

← NON ACCETTABILE COME SOL. DELL'EQ.

Interpretazione grafica della succ. per ricorrenza



$$f(x) = \sqrt{x+12}$$

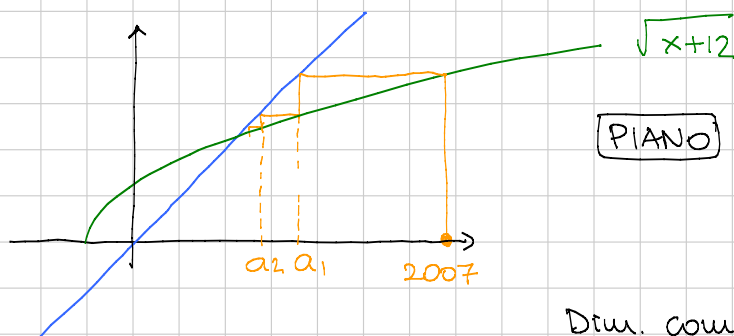
Il punto di incontro  
si ottiene risolvendo  
 $f(x) = x$

SLOGAN: "verticale alla funzione, orizzontale alla bisettrice"

$$P_0 = (a_0, 0); \quad Q_0 = (a_0, f(a_0)) = (a_0, a_1); \quad P_1 = (a_1, a_1)$$

$$Q_1 = (a_1, f(a_1)) = (a_1, a_2); \quad P_2 = (a_2, a_2)$$

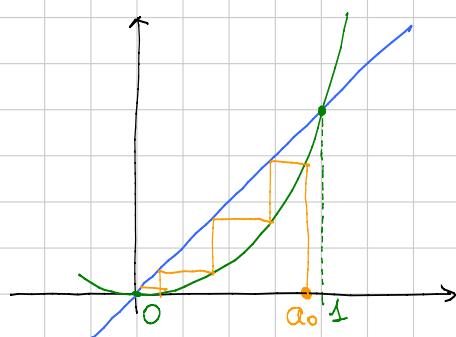
**Esempio 3**  $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12}$   $a_0 = 2007$



**PIANO** (i)  $a_n \geq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$   
 (ii)  $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$   
 (iii)  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$   
 (iv)  $l = 4$

Dm. come prima.

**Esempio 4**  $a_{n+1} = a_n^2$   $a_0 = \frac{99}{100}$

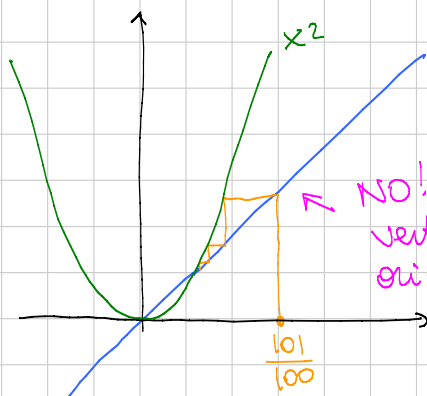


**PIANO** (i)  $0 \leq a_n \leq \frac{99}{100} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

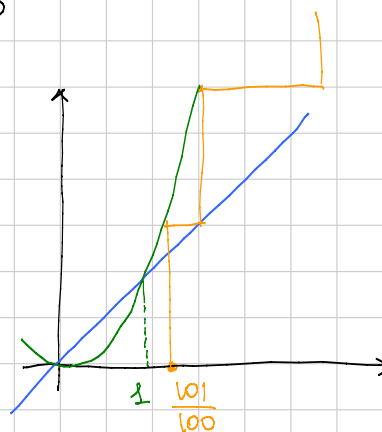
Permette di escludere  
 il come possibile  
 limite

(ii)  $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$   
 (iii)  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$   
 (iv)  $l = 0$

**Esempio 5**  $a_{n+1} = a_n^2$   $a_0 = \frac{101}{100}$



NO!!! ho fatto  
 verticale alla bis.  
 orizz. alla funz. !!



**PIANO**: (i)  $a_n \geq \frac{101}{100} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii)  $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$   
 (iii)  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$   
 (iv)  $l = +\infty$

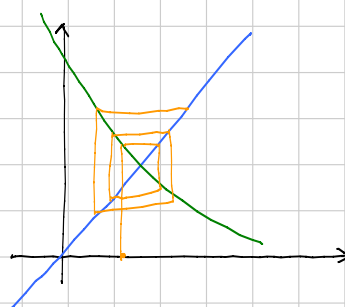
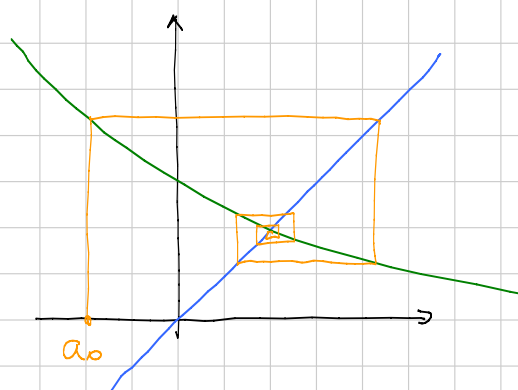
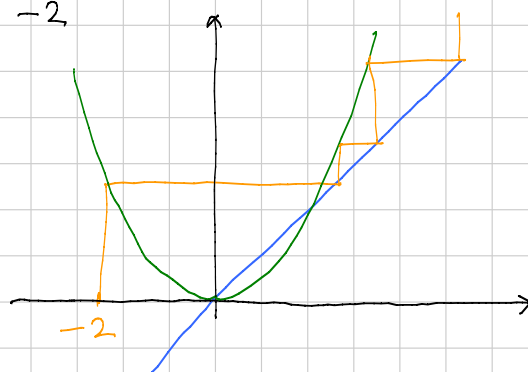
Esempio 6

$$a_{n+1} = a_n^2$$

$$a_0 = -2$$

**PIANO**

- (i)  $a_n \geq 4 \quad \forall n \geq 1$
- (ii)  $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (iii)  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
- (iv)  $l = +\infty$



## MATEMATICA I

ORA 52

Titolo nota

09/11/2007

## SUCC. PER RICORRENZA SPIRALEGGIANTE

Esempio

$$a_{n+1} = \frac{2}{a_n + 1} \quad a_0 = 2$$

$$f(x) = \frac{2}{x+1}$$

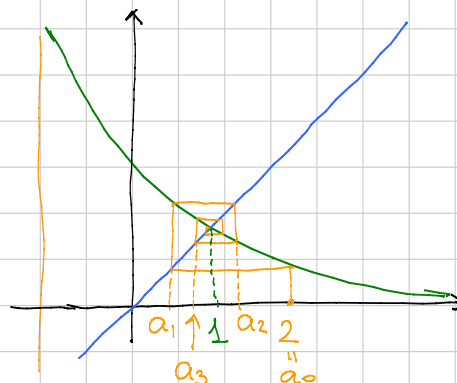
$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{2}{x+1} = x$$

↓  
Serve a det.  
intersezioni  
con bisettrice

$$\begin{aligned} x^2 + x &= 2 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x+2)(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

Idea:  $a_n \rightarrow 1$  "spiraleggiando"



2 tipi di piano  $\rightarrow$  CON LE 2 SOTTOSUSSIONI  
 $\rightarrow$  CON LA DISTANZA

Piano 1° tipo Esaminio separatamente i pari e i dispari

$$(i) a_{2n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) a_{2n+2} \leq a_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(iii) a_{2n} \rightarrow l \in \mathbb{R}$$

$$(i') a_{2n+1} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(ii') a_{2n+3} \geq a_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(iii') a_{2n+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$$

$$l = m = 1$$

Dim. punti (i), (ii), (i'), (ii')

$$a_0 = 2 \quad a_1 = \frac{2}{3}$$

$$a_2 = \frac{2}{1+a_1} = \frac{2}{1+\frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{5}{3}} = \frac{6}{5}$$

Così abbiamo verificato che

$$1 \leq a_2 \leq a_0$$

Poichè  $f$  è strett. decrescente, posso applicare  $f$  INVERTENDO le disuguaglianze ottengo

$$f(1) \geq f(a_2) \geq f(a_1)$$

$$1 \geq a_3 \geq a_1 \quad \text{riapplico } f$$

$$f(1) \leq f(a_3) \leq f(a_1)$$

$$1 \leq a_4 \leq a_2 \quad \text{applico } f$$

$$f(1) \geq f(a_4) \geq f(a_2)$$

$$1 \geq a_5 \geq a_3$$

Formalmente: dimostro per induzione CONTEMPORANEAMENTE

|                               |   |                                 |                  |
|-------------------------------|---|---------------------------------|------------------|
| $1 \leq a_{2m+2} \leq a_{2m}$ | e | $a_{2m+1} \leq a_{2m+3} \leq 1$ | FARE<br>VERIFICA |
|-------------------------------|---|---------------------------------|------------------|

Punti (iii) e (iii'): seguono dalle monotoniche e limitatezza

Punto (iv)

$$a_{m+1} = \frac{2}{a_m + 1} \quad \text{Però non conosco se esiste il limite di } a_n$$

$$a_{2m+1} = \frac{2}{a_{2m} + 1}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$m = \frac{2}{l+1}$$

$$a_{2m+2} = \frac{2}{a_{2m+1} + 1}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$l = \frac{2}{m+1}$$

$$\begin{cases} m = \frac{2}{l+1} \\ l = \frac{2}{m+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ml + m = 2 \\ ml + l = 2 \end{cases}$$

SOTTRAGGO

$$m - l = 0 \Rightarrow m = l$$

$$\downarrow$$

$$l = 1 \Leftrightarrow l = \frac{2}{l+1}$$

### 2° PIANO (CON LA DISTANZA)

Idea:  $a_n$  salta a dx e sx di 1, ma si avvicina sempre a 1, cioè la distanza tra  $a_n$  e 1 diminuisce.

Distanza tra  $a_n$  e 1 è  $d_n = |a_n - 1|$

Considero  $d_n$ . Vorrei dimostrare che  $d_n \rightarrow 0$ . Questo dimostrerebbe che  $a_n \rightarrow 1$

PIANO SBAGLIATO

(i)  $d_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

BANALE

(ii)  $d_{n+1} \leq d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

POI SI FA

(iii)  $d_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

BANALE

(iv)  $l = 0$

NON SI RIESCE

### DIM. PUNTO (ii)

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 1| = \left| \frac{2}{a_{n+1}} - 1 \right| = \left| \frac{2 - a_{n+1}}{a_{n+1}} \right| =$$

$$= \left| \frac{1 - a_n}{1 + a_n} \right| = \frac{|1 - a_n|}{|1 + a_n|} = \frac{d_n}{\underbrace{|1 + a_n|}_{\uparrow}}$$

basta sapere che  
 $a_n \geq 0$

perché  
denom.  $\geq 1$

$\rightarrow \leq d_n$

Senza grossa fatica abbiamo dim. che  $d_{n+1} \leq d_n$

### SBAGLIATO

Dire che  $d_n \geq 0$  sempre e  $d_n$  decr.

$\Rightarrow d_n \rightarrow 0$  (potrebbe tendere a  $\frac{1}{2}$ )

Abbiamo dim. che

$$d_{n+1} = \frac{d_n}{1+a_n}$$

In realtà il valore + piccolo assunto da  $a_n$  non è 0, ma  $a_1 = \frac{2}{3}$ , quindi il denominatore

$$\text{è } \geq 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \text{ e di conseguenza}$$

$$d_{n+1} \leq \frac{d_n}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} d_n$$

PIANO VERO CON DISTANZA

$$(i) \quad \frac{2}{3} \leq a_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad d_{n+1} \leq \frac{3}{5} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(iii) \quad d_n \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(iv) \quad d_n \rightarrow 0$$

PUNTO (i) Si dimostra come prima. INDUZIONE

$$[n=0] \quad \frac{2}{3} \leq a_0 \leq 2 \quad \text{Vera perché } a_0 = 2$$

$$[P.I.] \quad \text{Ipotesi: } \frac{2}{3} \leq a_n \leq 2 \quad \text{tesi: } \frac{2}{3} \leq a_{n+1} \leq 2$$

Prendo l'ipotesi e applico  $f(x)$  inserendo i versi perché  $f(x)$  è decresc. nell'intervallo dato

$$\begin{array}{ccccc} f\left(\frac{2}{3}\right) & \geq & f(a_n) & \geq & f(2) \\ \text{"} & & \text{"} & & \text{"} \\ 2 & \geq & \frac{5}{6} & \geq & a_{n+1} & \geq & \frac{2}{3} \end{array}$$

$$[PUNTO (ii)] \quad \text{Fatto prima: } d_{n+1} = \frac{d_n}{1+a_n} \leq \frac{d_n}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5} d_n$$

**PUNTO (iii)**  $d_1 \leq \frac{3}{5} d_0$  ;  $d_2 \leq \frac{3}{5} d_1 \leq \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} d_0 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 d_0$

$$d_3 \leq \frac{3}{5} d_2 \leq \frac{3}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^2 d_0 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 d_0$$

Formalmente: per indutt. si dim. che  $d_{n+1} \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n d_0$

**PUNTO (iv)**

$$0 \leq d_n \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n d_0$$



e qui è fondamentale  
che  $\frac{3}{5} < 1$

Oss.  $d_{n+1} = |a_{n+1} - 1| = |f(a_n) - f(1)|$   
 $= |f'(\xi)| \cdot |a_n - 1|$   
 $= |f'(\xi)| \cdot d_n$



## MATEMATICA I

ORA 53

Titolo nota

13/11/2007

SUCC. PER RICORRENZA **NON** AUTONOME

**Esempio 1**  $a_1 = 2007$   $a_{n+1} = \frac{a_n}{n}$

$$a_1 = 2007 \quad a_2 = \frac{a_1}{1} = 2007 \quad a_3 = \frac{2007}{2}, \dots$$

Idea:  $a_n \rightarrow 0$  (in realtà si può anche scrivere la formula esplicita per  $a_n$ : TROVARLA !!!)

- PIANO 1**
- (i)  $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
  - (ii)  $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
  - (iii)  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
  - (iv)  $l = 0$

PIANO CON LA  
MONOTONIA

**Dim. (i)** Induzione:  $n=1$   $a_1 \geq 0$   $2007 \geq 0$  OK

**P.I.** Ipotesi:  $a_n \geq 0$  Tesi:  $a_{n+1} \geq 0$

**Dim.**  $a_{n+1} = \frac{a_n}{n} \geq 0$

**Dim (ii)**  $a_{n+1} \leq a_n$  ;  $\frac{a_n}{n} \leq a_n$   $a_n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \geq 0$

Segue dal punto (i)

**Dim (iii)** (i) + (ii) +  
Teo. succ. monotone

**Dim. (iv)**  $a_{n+1} = \frac{a_n}{n}$

$\downarrow$   $\rightarrow l$   $\rightarrow +\infty$   
 $l = 0$

NOOOO!!!!  
limite metà  
per volta

**PIANO 2** (i)  $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  ← COME PRIMA } PIANO CON RAPPORTO  
 (ii)  $a_n \rightarrow 0$

Dim (ii) Uso il criterio del rapporto per le successioni  
 (lo posso fare perché  $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ )

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a_n}{n}}{a_n} = \frac{a_n}{n} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 < 1$$

Limite del rapporto  $< 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$ .

**PIANO 3** (i)  $0 \leq a_n \leq 2007 \quad \forall n \in \mathbb{N}$   
 (ii)  $a_n \rightarrow 0$

PIANO CON I CARABINIERI

Dim (i)  $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  COME PRIMA

$a_n \leq 2007$  lo dimostro per induzione

**[m=1]**  $a_1 \leq 2007$  VERO

**[P.I.]** Ipotesi:  $a_n \leq 2007$  Tesi:  $a_{n+1} \leq 2007$

$$\text{Dim. } a_{n+1} = \frac{a_n}{n} \leq \frac{2007}{n} \leq \frac{2007}{1} = 2007$$

$\uparrow$  uso Hp                       $\uparrow$  Den. + piccolo  
 $\Rightarrow$  frast. + grande

Dim (ii) Sappiamo dal pto (i) che  $0 \leq a_n \leq 2007$   
 Divido tutto per n

$$0 \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{2007}{n}$$

$$\boxed{0} \leq \boxed{a_{n+1}} \leq \boxed{\frac{2007}{n}}$$

$\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$   
 0                      0                      0

Se  $a_{n+1} \rightarrow 0$ , anche

$a_n \rightarrow 0$ .

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + \arctan a_n}{a_n + n + 5}$$

$$a_0 = 2007$$

(i)  $0 \leq a_n \leq 10,000$

(ii)  $a_n \rightarrow 0$

$m=0$      $2007 \geq 0$     Ok

(P.I.) ipotesi:  $a_n \geq 0$

$$\text{fesi } a_{n+1} \geq 0$$

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + \arctan a_n}{a_n + n + 5} \quad \frac{\text{Num} \geq 0}{\text{Den} > 0} \Rightarrow \text{Fraktion} \geq 0$$

Demostramos que  $a_n \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$n \geq 0$     $a_0 \leq 10.000$     $2007 \leq 10.000$    ok.

Tesi:  $a_{n+1} \leq 10.000$

$$a_{m+1} = \frac{2a_m + \arctan m}{a_m + m + 3} \leq \frac{20.000 + 14}{m+3} \leq \frac{20.014}{5} = 4.000 + \text{poco} \leq 10.000$$

Ho usato che  $2am \leq 20.000$  (ipotesi  
induttiva)  
anchora  $m \leq 14$

Al posto del deu. ho scritto roba + piccola

Điểm cũ)

Diagram illustrating the simplification of the fraction  $\frac{2a_m + a_{m+1}}{a_m + m + 5}$  to  $\frac{20.014}{m}$  using the Euclidean algorithm:

- Initial fraction:  $\frac{2a_m + a_{m+1}}{a_m + m + 5}$
- Step 1:  $2a_m + a_{m+1} = 2(a_m + m + 5) + 20.014$  (Note:  $20.014$  is the remainder, labeled "Num. + grande den. + piccolo")
- Simplified fraction:  $\frac{20.014}{m}$

$a_{m+1} \rightarrow 0$ , quindi anche  $a_m \rightarrow 0$ .

**Esempio 3**  $a_1 = 2$   $a_{n+1} = \frac{n^4}{2^n} a_n$

$$a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{1}{2^1} a_1 = 1, \quad a_3 = \frac{2^4}{2^2} a_2 = 4$$

$$a_4 = \frac{3^4}{2^3} a_3 = \frac{81}{8} \cdot 4 = \frac{81}{2} = 40,5$$

$$a_5 = \frac{4^4}{2^4} a_4 = 16 \cdot a_4 = 16 \cdot 40,5 = +di\ 600$$

Idea:  $a_n \rightarrow +\infty$  crescendo.

Invece:  $a_n \rightarrow 0$

**PIANO CON RAPPORTO** (i)  $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  INDUZIONE  
(ii)  $a_n \rightarrow 0$

Dim (ii) Uso criterio rapporto:  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\overset{a_{n+1}}{n^4}}{2^n} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{n^4}{2^n} \rightarrow 0$

Rapporto  $\rightarrow 0 < 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$

**Esempio 4**  $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n}$   $a_1 = 3$

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n}} \rightarrow \begin{matrix} a_n^2 \rightarrow l^2 \\ n \rightarrow +\infty \\ \downarrow \\ l = 0 \end{matrix}$$

NO!!!!!!

ANDREBBE BENE  
SE UNO GIÀ SAPESSSE  
CHE  
 $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

**PIANO** (i)  $a_n \geq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$   
(ii)  $a_n \rightarrow +\infty$

Supponiamo di aver dimostrato il pto (i). Allora

$$\boxed{a_{n+1}} = \frac{a_n^2}{n} \geq \frac{(2^n)^2}{n} = \boxed{\frac{4^n}{n}}$$

$\downarrow$  per confronto a 2       $\uparrow$  uso pto (i)       $\downarrow$   $+\infty$

Visto che  $a_{n+1} \rightarrow +\infty$ , anche  $a_n \rightarrow +\infty$

Dim. ci) Induzione  $\boxed{n \geq 1}$   $a_1 \geq 2^1$   $3 \geq 2$  ok.

P.I. Ipotesi:  $a_n \geq 2^n$  Tesi:  $a_{n+1} \geq 2^{n+1}$

Dim.  $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n} \geq \frac{4^n}{n} \geq 2^{n+1}$

↑  
Uso ipotesi come  
prima

← SPERO

$$\frac{4^n}{n} \stackrel{?}{\geq} 2^{n+1} \quad \frac{\cancel{2^n} \cdot 2^n}{n} \stackrel{?}{\geq} \cancel{2^n} \cdot 2 \quad 2^n \stackrel{?}{\geq} 2n$$

$$2^{n-1} \stackrel{?}{\geq} n$$

Risposta: SI! Dimostrata a suo tempo per induzione

$(1+x)^n \geq 1+nx$  la applico con  $x=1$

$$2^n \geq 1+n$$

## MATEMATICA I

ORA 54

Titolo nota

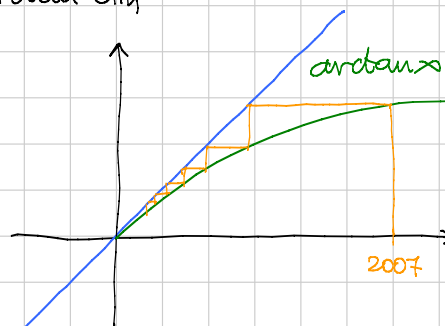
13/11/2007

Esempio 1

$a_0 = 2007$

$a_{n+1} = \arctan a_n$

- PIANO**
- (i)  $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
  - (ii)  $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
  - (iii)  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
  - (iv)  $l=0$

**Dim (i)** INDUZIONE ...**Dim (ii)** 1° modo: risolvendo la disequazione

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \arctan a_n \leq a_n \quad \text{Ci si riduce alla disequazione}$$

$\arctan x \leq x$  risolta precedentemente studiando la  
funzione  $x - \arctan x$

Avremo trovato che  $\arctan x \leq x \Leftrightarrow x \geq 0$   
Quindi  $\arctan a_n \leq a_n \Leftrightarrow a_n \geq 0$  (vero perché dim.  
al pto (i))

**2° modo**: per induzione a sua volta

$$n=0 \quad a_1 \leq a_0 \quad a_1 = \arctan a_0 = \arctan 2007 \leq \frac{\pi}{2} \leq 2007 = a_0$$

È vero che  $a_1 \leq a_0$ **P.I.** Ipotesi:  $a_{n+1} \leq a_n$  Tesi:  $a_{n+2} \leq a_{n+1}$ 

Dim. parto dall'ipotesi  $a_{n+1} \leq a_n$  e applico la funzione  
 $\arctan x$  che è strettamente crescente e quindi conserva i versi  
Otengo:

$$\begin{array}{ccc} \arctan a_{n+1} & \leq & \arctan a_n \\ \text{"} & & \text{"} \\ a_{n+2} & \leq & a_{n+1} \end{array}$$

Dim (iii) : (i) + (ii) + Teo. succ. monotone

Dim (iv)

$$\boxed{a_{n+1}} = \boxed{\arctan a_n}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$l = \arctan l$$

L'unica solus. dell'eq.  $x = \arctan x$  è  $x = 0$  (dimostrato sempre con studio di funzione).

Esercizio (HARD) Abbiamo appena dimostrato che  $a_n \rightarrow 0$

Domanda: come si comporta  $\sum a_n$  ?

Esercizio 2  $a_0 = 2007$   $a_{n+1} = \frac{a_n + n}{2n+7}$

PIANO

(i)  $0 \leq a_n \leq 10.000$

(ii)  $l = \frac{1}{2}$

Dim. di (ii) dando per buono (i)

$$\boxed{\frac{n}{2n+7}} \leq \boxed{\frac{a_n + n}{2n+7}} \leq \boxed{\frac{10.000 + n}{2n+7}}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\frac{1}{2} \qquad \qquad \frac{1}{2} \qquad \qquad \frac{1}{2}$$

Visto che  $a_{n+1} \rightarrow \frac{1}{2}$ , anche  $a_n \rightarrow \frac{1}{2}$ .

Dim (i)  $a_n \geq 0$  FACILE INDUZIONE

$a_n \leq 10.000$  INDUZIONE PURE  $\boxed{n=0}$  OK

P.I ipotesi :  $a_n \leq 10.000$  Tesi :  $a_{n+1} \leq 10.000$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + n}{2n+7} \leq \frac{10.000 + n}{2n+7} = \frac{10.000}{2n+7} + \frac{n}{2n+7}$$

$$\uparrow$$

uso ipotesi

$$\leq \frac{10.000}{7} + \frac{n}{2n} = \frac{10.000}{7} + \frac{1}{2} \leq 10.000 \quad \square$$

**Esercizio 3**

$$a_{n+1} = \frac{\sin(7a_n)}{10}$$

$$a_0 = \frac{1}{7}$$

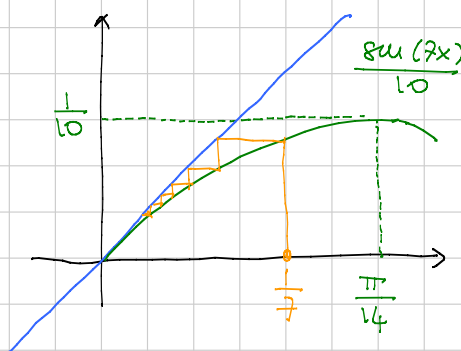
$$f(x) = \frac{\sin(7x)}{10}$$

Per  $x > 0$  abbiamo che  $f(x) < x$ .

Motivo  $f(x) = \frac{\sin(7x)}{10} \leq \frac{7x}{10} \leq x$

per disug.  
classica  
 $\sin y \leq y$   
per ogni  $y \geq 0$

VERIFICARE  
PER  
ESERCIZIO

**PIANO CON MONOTONIA**

- (i)  $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (ii)  $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (iii)  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
- (iv)  $l = 0$

**PIANO CON DISTANZA**

Pougo  $d_n = |a_n - 0| = |a_n|$

(i)  $d_{n+1} \leq \frac{7}{10} d_n$

(ii)  $d_n \leq \left(\frac{7}{10}\right)^n d_0$  (i) + INDUZIONE

(iii)  $d_n \rightarrow 0$  (ii) + carabinieri

$$0 \leq \boxed{d_n} \leq \underbrace{\left(\frac{7}{10}\right)^n d_0}_{\downarrow 0}$$

$\downarrow 0$        $\downarrow 0$

Il p.to fondamentale da dimostrare è il p.to (i)

$$d_{n+1} = |a_{n+1}| = |a_{n+1} - 0| = |f(a_n) - f(0)|$$

Ho usato che

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) \quad \leftarrow = |f'(\xi)| |a_n - 0|$$

$$= |f'(\xi)| \cdot d_n$$



Ho quindi dimostrato che

$$d_{n+1} = |f'(\xi)| \cdot d_n$$

il problema è che non conosco  $\xi$ . Tuttavia

$$f'(x) = \frac{7 \cos(7x)}{10}, \text{ quindi } |f'(\xi)| \leq \frac{|7 \cos(7\xi)|}{10} \leq \frac{7}{10}$$

quindi in ogni caso  $d_{n+1} \leq \frac{7}{10} d_n$ , che è quello che volevo dimostrare. — o — o —

**Oss. 1** Ho in realtà dim. che  $f(x)$  è Lipschitziano con costante  $7/10 < 1$ .

**Oss. 2** Il piano con la distanza vale qualunque sia il dato iniziale

**Oss. 3** Nell'esempio dato, come si comporta  $\sum a_n$  ?

Sappiamo che  $a_n \rightarrow 0$ , dunque può convergere.

Applico CRITERIO RAPPORTO (se  $a_n > 0$ )

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{\sin(7a_n)}{10}}{a_n} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{1}{10} \frac{\sin(7a_n)}{7a_n} \cdot 7 \rightarrow \frac{7}{10} < 1$$

$\underbrace{\frac{\sin(7a_n)}{10}}_{a_{n+1}}$ 
 $\frac{\sin(7a_n)}{7a_n}$  è come  $\frac{\sin x}{x}$  con  $x \rightarrow 0$

$\Rightarrow$  la serie converge. — o — o —

**Esempio 4**  $a_{n+1} = \cos a_n$   $a_0 = 2007$

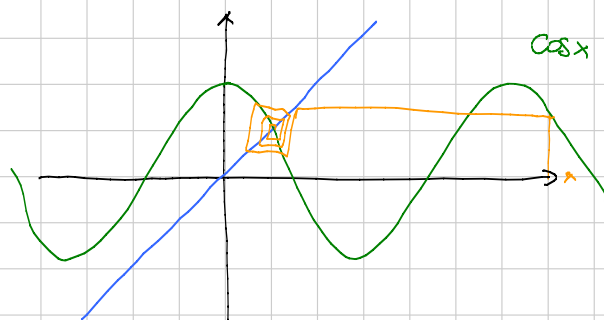
Equival. a scrivere 2007 sulla calcolatrice e poi continuare a schiacciare "cos".

Idea:  $a_n \rightarrow l$ , dove  $l$   
 è l'unica soluzione  
 dell'equazione

$$a_{n+1} = \cos(a_n)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$l = \cos(l)$$



Cose da dim.: (i) l'eq.  $\cos x = x$  ha un'unica sol. reale  
 (si dimostra studiando  $x - \cos x = 0$ )

(ii)  $a_n \rightarrow l$  (si dimostra mediante un  
 piano con la distanza)

IN QUESTO CASO UNA SUCC. PER RICORRENZA  
 SI PUÒ USARE PER APPROSSIMARE LA SOL. DI  
 UN'EQUAZIONE