

MAT I TLC

LAST (BUT NOT LEAST ???)

ORA 100

$$f(x) = x - \int_0^x e^{-t^2} dt$$

primitiva di e^{-t^2}

→ No forma esplicita
in termini di funzioni
elementari

$$f(x) = 2006 \quad \text{Quante soluz. ?}$$

Studio la funzione $f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

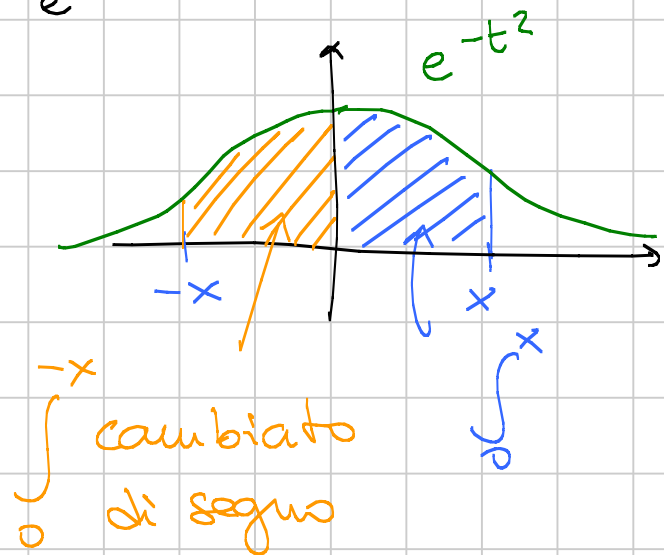
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\begin{array}{c} \textcircled{x} - \int_0^x e^{-t^2} dt \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ +\infty \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \end{array}$$

Numero perché
l'int. impr.
converge

$f(x)$ è dispari, perché x è dispari e

$$\int_0^{-x} e^{-t^2} dt = - \int_0^x e^{-t^2} dt$$



Dai limiti per $x \rightarrow \pm\infty$ possiamo dedurre che l'eq. ha
ALMENO una soluz.

Per sapere se è unica studiamo la monotonia di $f(x)$

$$f'(x) = 1 - e^{-x^2} \geq 0 \text{ sempre e } = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Monotonia 3 $\Rightarrow f$ strett. crescente $\Rightarrow$ iniettiva $\Rightarrow$ al +
una soluzione.

Conclusione : f è iniettiva e surgettiva
 $\nearrow$ dai limiti

$\Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'eq.

$f(x) = \lambda$ ha esattamente una soluzione.

② Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\left[\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Hôpital} \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x^2}) = 1$$

③ Studiare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$

$\left[\text{Già sappiamo che } f(n) \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{f(n)} \rightarrow 0 \right]$

Perché $f(n) > 0$ per $n \geq 1$?

Perché $f(0) = 0$ e f è

strett. cresc.

$\Rightarrow$ cond. nec. ok $\Rightarrow$ la serie
può convergere

La serie diverge per C.A. con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{f(n)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{f(n)} = 1$$

limite del
punto 2

④ Studiare $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx}_{a_n}$

$a_n \geq 0$ sempre perché
 $f(x) \geq 0$ sui positivi

Confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2}$$

cambio
variabili $x = \frac{1}{n}$

$$\left[\frac{0}{0} \Rightarrow \text{H\ddot{o}p} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x}$$

$$\left[\frac{0}{0} \Rightarrow \text{H\ddot{o}p} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2} = \frac{1}{2} f'(0) = 0 \quad [\text{caso limite}]$$

$$\left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \text{ defiu.} \Rightarrow a_n \leq b_n \text{ defiu.} \right]$$

$$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2} \text{ conv.} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

Domanda semi-Hard : per quali α converge $\sum (a_n)^\alpha$

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = 2006 \end{cases} \quad \text{\textit{\textbf{E' autonoma !!!}}}$$

Devo risolvere

$$f(x) = x, \quad f(x) \leq x$$

$$f(x) \stackrel{?}{\leq} x \quad \text{diventa}$$

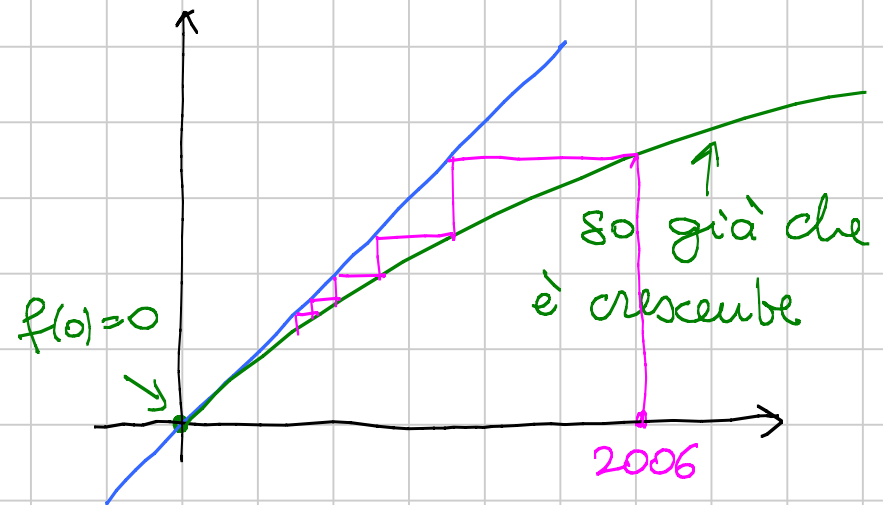
$$\cancel{x} - \int_0^x e^{-t^2} dt \stackrel{?}{\leq} \cancel{x}$$

$$\int_0^x e^{-t^2} dt \stackrel{?}{\geq} 0$$

vero se $x \geq 0$ (perché l'integranda è > 0)
falso se $x < 0$ (perché gli estremi sono
nell'ordine sbagliato)

Conclusione: $f(x) \leq x$ per ogni $x \geq 0$ con uguaglianza
 $\Leftrightarrow x = 0$

Idea: $a_n \rightarrow 0$



PIANO (i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\leftarrow$ INDUZIONE

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ $\leftarrow$ SOLITO (i) + (ii) + teo. astratto

(iv) $l = 0$

(iv) si riduce all'eq. $f(l) = l$ che già sappiamo avere $l=0$ come unica soluz.

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ è come dire $f(a_n) \leq a_n \Rightarrow$ si riduce alla diseq. $f(x) \leq x$, che sappiamo essere vera $\forall x \geq 0$

Se, data a_n definita per ricorrenza, vogliamo studiare la serie

$$\sum a_n$$

possiamo usare il criterio del rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(a_n)}{a_n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$\uparrow$
 cambio
 variabili
 $x = a_n$

$\uparrow$
 FATTO
 PRIMA

LAST Primi termini di Taylor di $f(x)$ con centro in $x=0$?

$$f(x) = x - \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 - e^{-x^2} = 1 - \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + o(x^7) \right) \\
 &= \cancel{1} - \cancel{1} + x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + o(x^7)
 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} + \frac{x^7}{42} + o(x^8)$$

