

BARICENTRO DI UNA CURVA

Data una curva

 $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [a, b]$, il suo baricentro è il punto $G = (x_G, y_G)$, dove

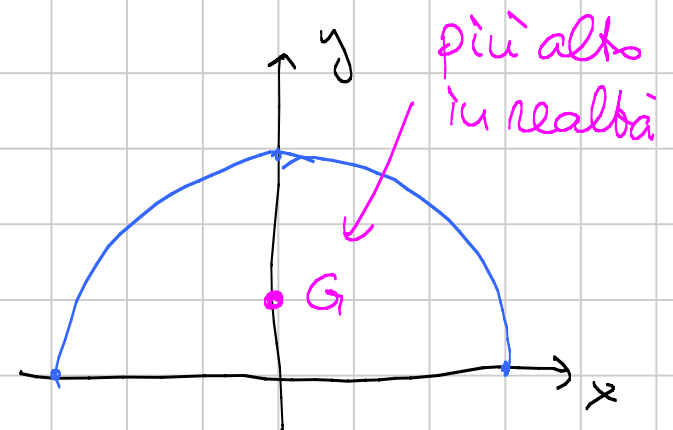
$$x_G = \frac{1}{\text{Lunghezza}(\gamma)} \int_{\gamma} x \, ds;$$

$$y_G = \frac{1}{\text{Lunghezza}(\gamma)} \int_{\gamma} y \, ds$$

Esempio Baricentro di una semicirconferenza
(centro in $(0,0)$ e raggio 1)

Scelgo la parametrizzazione

$$\gamma(t) = (\underbrace{\cos(t)}_{x''(t)}, \underbrace{\sin(t)}_{y''(t)}) \quad t \in [0, \pi]$$



Il risultato sarebbe lo stesso con ogni altra parametrizzazione (ad esempio $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ $t \in [-1, 1]$), ma con sin e cos i calcoli vengono + semplici !!!

$$\text{Speed} : \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = 1 \qquad \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

Lunghezza : π

$$\int_{\gamma} x \, ds = \int_0^{\pi} \cos(t) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DEF}}}{1} dt = 0$$

$\uparrow$
Ho messo $x(t)$ al posto di x

$\Rightarrow x_G = 0$ (come era ovvio per simmetria)

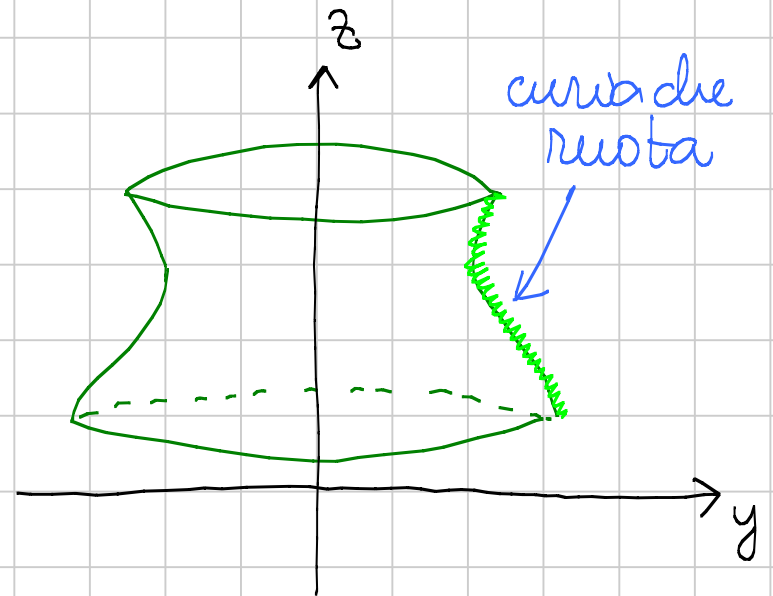
$$\int_{\gamma} y \, ds = \int_0^{\pi} \underset{\substack{\uparrow \\ y(t)}}{\sin(t)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SPEED} = 1}}{dt} = 2$$

$$\Rightarrow y_G = \frac{1}{\text{Lunghezza}} \int y \, ds = \frac{2}{\pi} \quad (\text{SOPRA } \frac{1}{2} !!!)$$

GULDINO 2 L'area della superficie laterale di un solido di rotazione è data da

$$\text{Area} = \text{lunghezza curva che ruota} \cdot 2\pi y_G$$

↑
coordinata y
del baricentro
della curva
che ruota



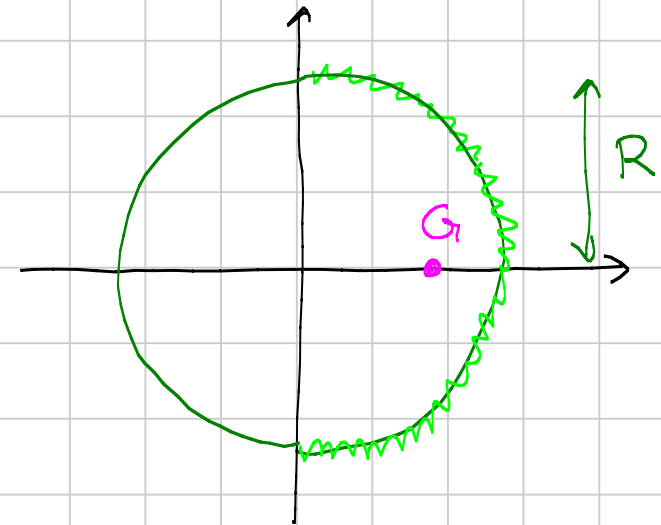
Esempio 1 Sfera

$$\text{Sup. sfera} = \text{lungh. semicirc.} \cdot 2\pi y_G$$

$$= \frac{1}{2} \cancel{2\pi} R \cdot \cancel{2\pi} \cdot \boxed{\frac{2}{\pi} R}$$

calcolo baricentro
fatto prima

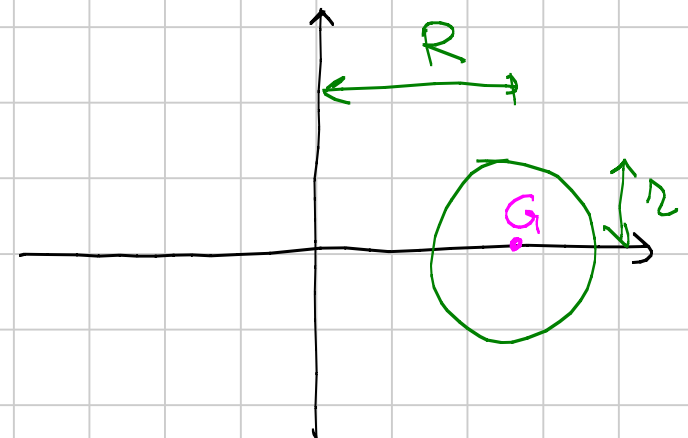
$$= 4\pi R^2$$



Esempio 2 Toro

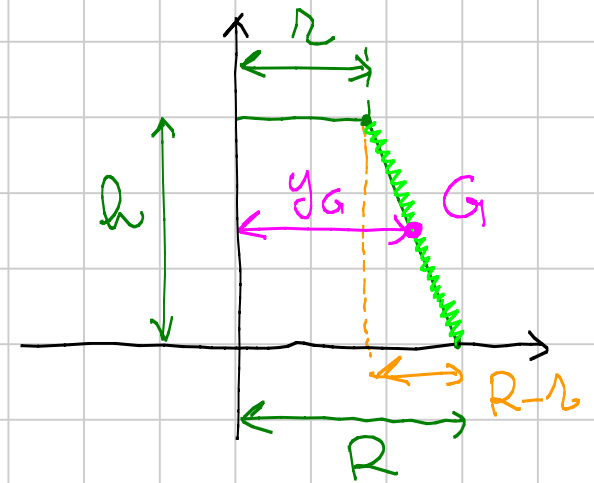
$$\text{Sup.} = \text{lungh. curva} \cdot 2\pi y_G$$

$$= 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 r R$$



Esempio 3 Tronco di cono

$$\begin{aligned}\text{Sup. lat.} &= \text{lungh. curva} \cdot 2\pi y_G \\ &= \sqrt{R^2 + (R-r)^2} \cdot 2\pi \frac{R+r}{2}\end{aligned}$$



Oss. Vol. sfera = $\frac{4}{3}\pi R^3$

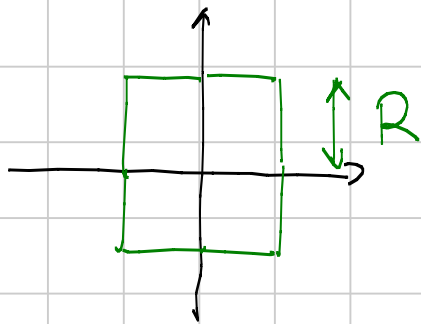
$$\text{Sup. sfera} = 4\pi R^2$$

$$\text{Area cerchio} = \pi R^2$$

$$\text{Lungh. circ.} = 2\pi R$$

$$\text{Area quadrato} = L^2$$

$$\text{Perimetro quadr} = 4L \quad \text{NON FUNZIONA}$$



$$\begin{aligned}\text{Area} &= (2R)^2 \\ &= 4R^2\end{aligned}$$

$$\text{Perimetro} = 8R$$

FUNZIONA !!!

Esercizio Calcolare il volume dell'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1\}$$

È limitato? Sì Dalla 1ª eq, x e z stanno in $[-1, 1]$
Dalla 2ª eq, anche y sta in $[-1, 1]$

$x^2 + z^2 \leq 1 \rightarrow$ cilindro infinito con asse lungo asse y e raggio $= 1$

$y^2 + z^2 \leq 1 \rightarrow$ " " asse lungo asse x

$A =$ intersezione di 2 cilindri infiniti perpendicolari

$=$ volta a crociera

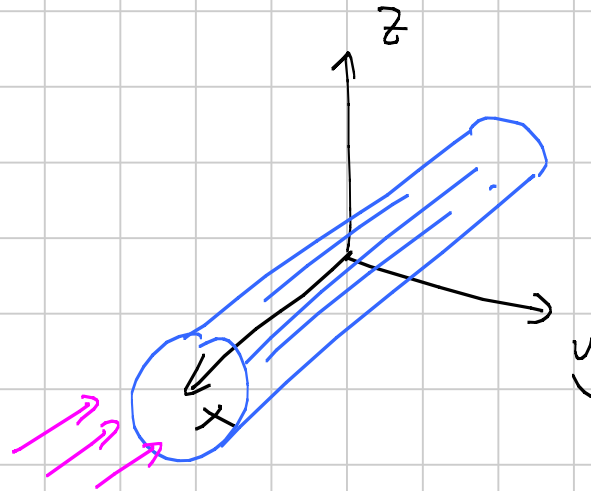
$$\text{Vol}(A) = \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz$$

(sezioni)

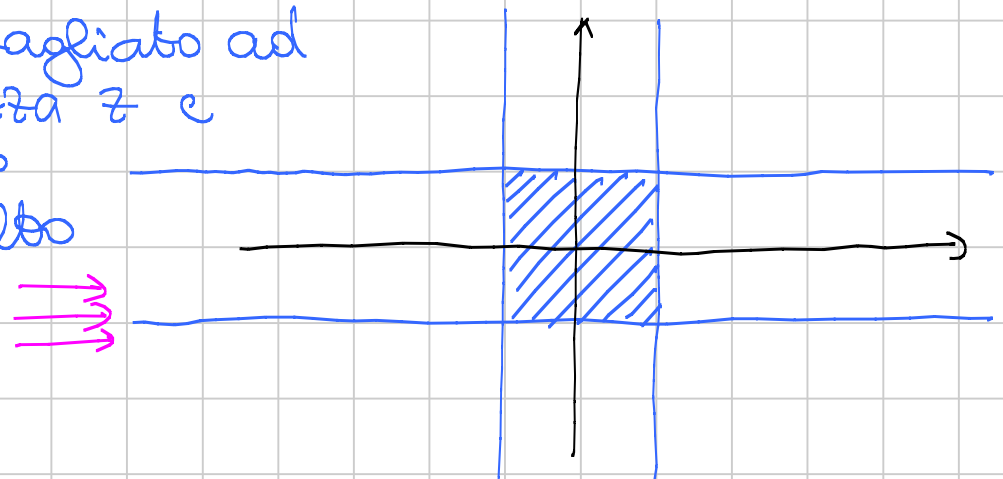
$$= \int_{-1}^1 dz \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \text{Area}(S_z) \, dz$$

Come è fatta la sezione S_z ?

Tagliando con un piano ad altezza $z \in [-1, 1]$ ottengo su ogni cilindro una striscia infinita



Ho tagliato ad
altezza z e
guardo
dall'alto

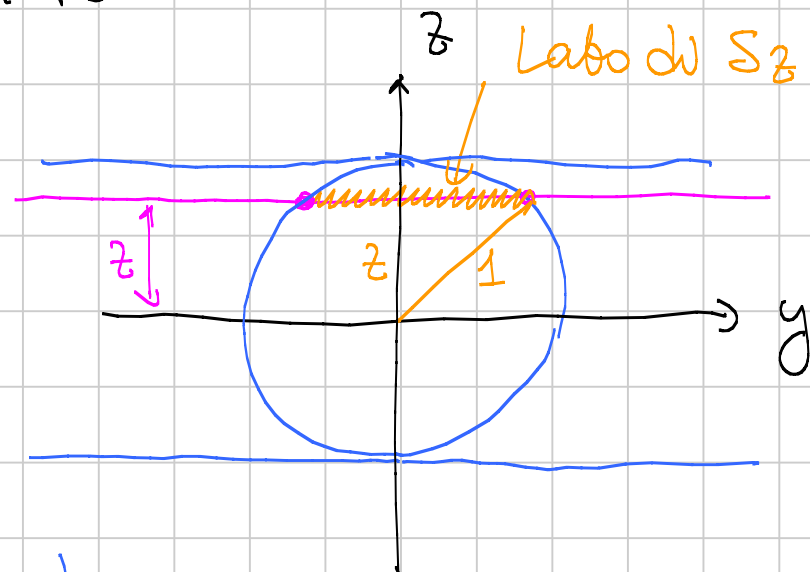


Quanto vale, in
funzione di z , il
lato del quadrato?

Per rispondere guardiamo "di lato"

piano ad
altezza z

$$\Rightarrow \text{Lato } S_z = 2\sqrt{1-z^2}$$



$$\text{Vol} = \int_{-1}^1 \text{Area}(S_z) dz$$

$$= 4 \int_{-1}^1 (1-z^2) dz = 8 \int_0^1 (1-z^2) dz$$

integranda
pari

$$= 8 \left[z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^{z=1} = 8 \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{16}{3}}$$

Cosa accade intersecando con il "terzo cilindro" $x^2 + y^2 \leq 1$?