

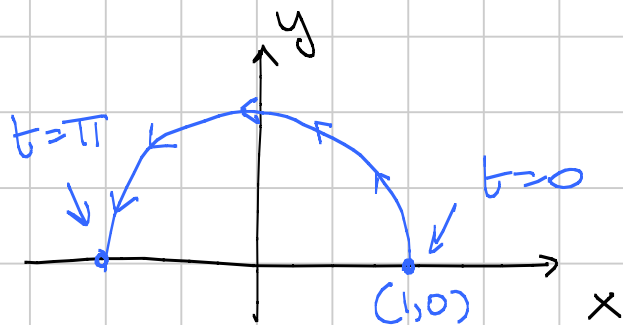
CURVE, LUNGH. CURV., INTEGRALI CURVILINEI

Curva in $\mathbb{R}^2$: funzione $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (x(t), y(t))$$

2 componenti di un punto P nel piano
che varia con il parametro t (tempo)

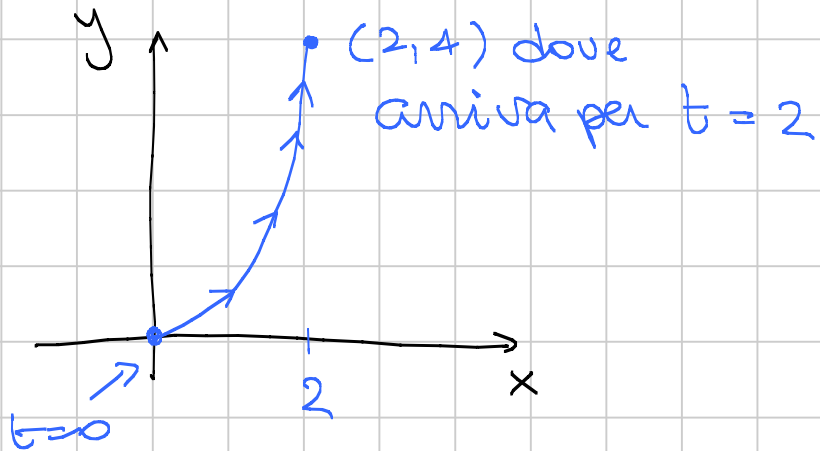
Esempio 1 $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \quad t \in [0, \pi]$



Esempio 2

$$\gamma(t) = (t, t^2)$$

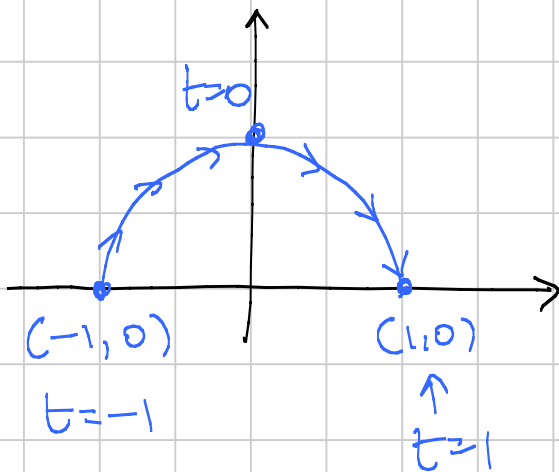
$$t \in [0, 2]$$



Esempio 3

$$\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$$

$$t \in [-1, 1]$$

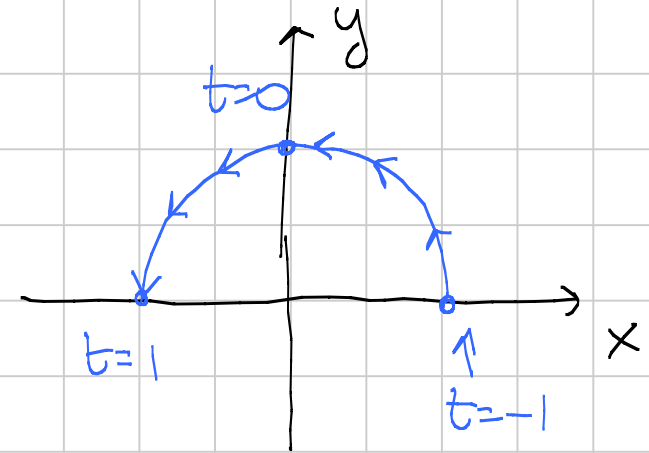


$$y = \sqrt{1-x^2}$$

$$y^2 = 1-x^2$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

Esempio 4

$$\gamma(t) = (-t, \sqrt{1-t^2})$$
$$t \in [-1, 1]$$



Esempio 5-6

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

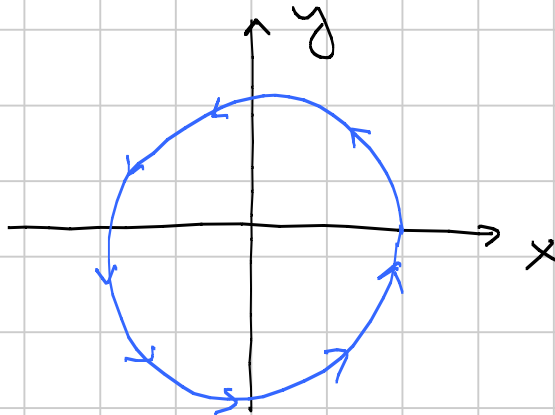
$$t \in [0, 2\pi]$$

1 GIRO

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$t \in [0, 4\pi]$$

2 GIRI



LUNGHEZZA DI UNA CURVA

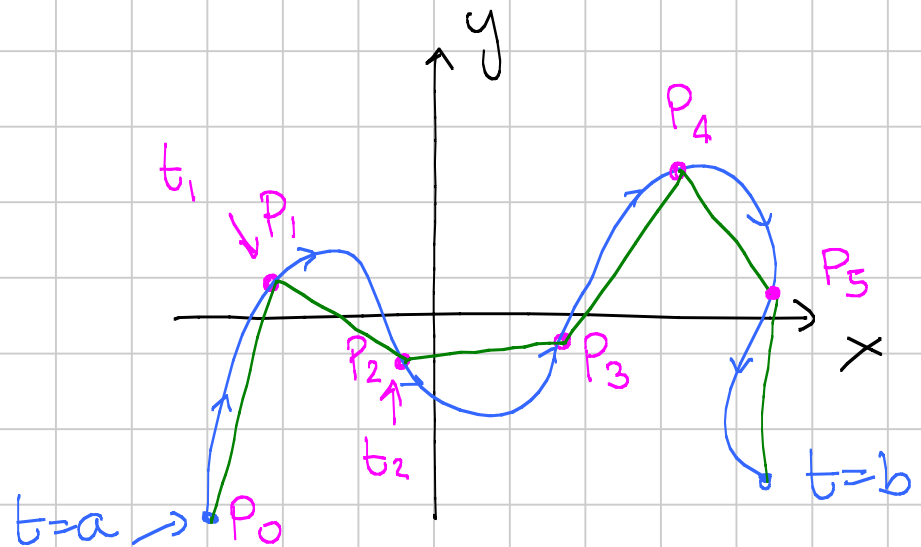
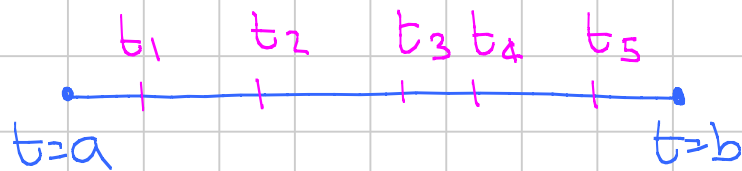
1. significato geometrico $\rightarrow$ INTUITIVO

2. Come si definisce

3. Come si calcola

$$\boxed{2} \quad \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$t \in [a, b]$$



Con la procedura descritta approssimiamo la traiettoria percorsa "dalla curva" con una spezzata (unione di segmenti).

E' intuitivo che l'approssimazione migliora quando aumento il numero dei punti del campionamento.

Si definisce lunghezza della curva l'estremo superiore delle lunghezze delle poligoni (spezzate) approssimanti.

Caso banale: segmento

Caso semi-banale: spezzata

Caso generale: approssimazione con spezzate $\leadsto$ sup.

3. COME SI CALCOLA Si può dimostrare che per una curva

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [a, b]$$

con $x(t)$ e $y(t)$ decenti (ad esempio con derivata continua)

si ha che

$$\text{Lunghezza curva} = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

Esempio $\gamma(t) = (\underbrace{\cos(t)}_{x'(t)}, \underbrace{\sin(t)}_{y'(t)}) \quad t \in [0, \pi]$

$$x'(t) = -\sin(t)$$

$$y'(t) = \cos(t)$$

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$$

$$\text{Lunghezza} = \int_0^\pi \sqrt{\dots} dt = \int_0^\pi 1 dt = \pi$$

Teorema Se due curve percorrono lo stesso insieme del piano una sola volta, allora la loro lunghezza è la stessa.

Brutalmente: lungh. di una curva = quello che segna il contakilometri.

Commenti fisici

$(x(t), y(t))$ rappresenta la posizione al tempo t di un punto che si muove nel piano

VELOCITY: velocità come vettore $(x'(t), y'(t))$



SPEED: velocità come scalare, cioè la norma della velocity

$$\text{speed} = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

Lunghezza = integrale risp. al tempo della speed

Spazio = velocità · tempo
— o — o —

INTEGRALE CURVILINEO

Ingredienti: * una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $t \in [a, b]$

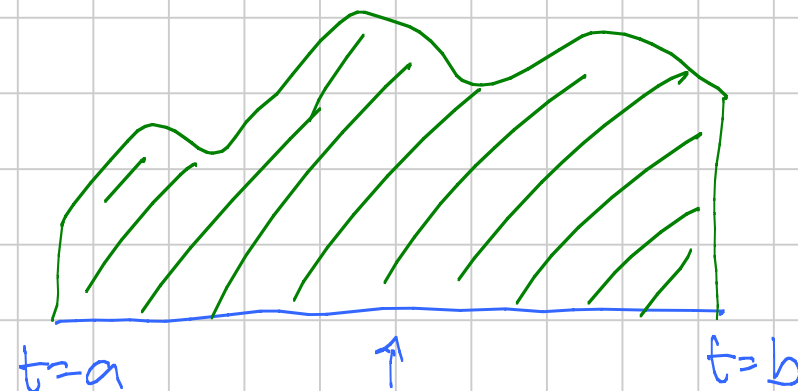
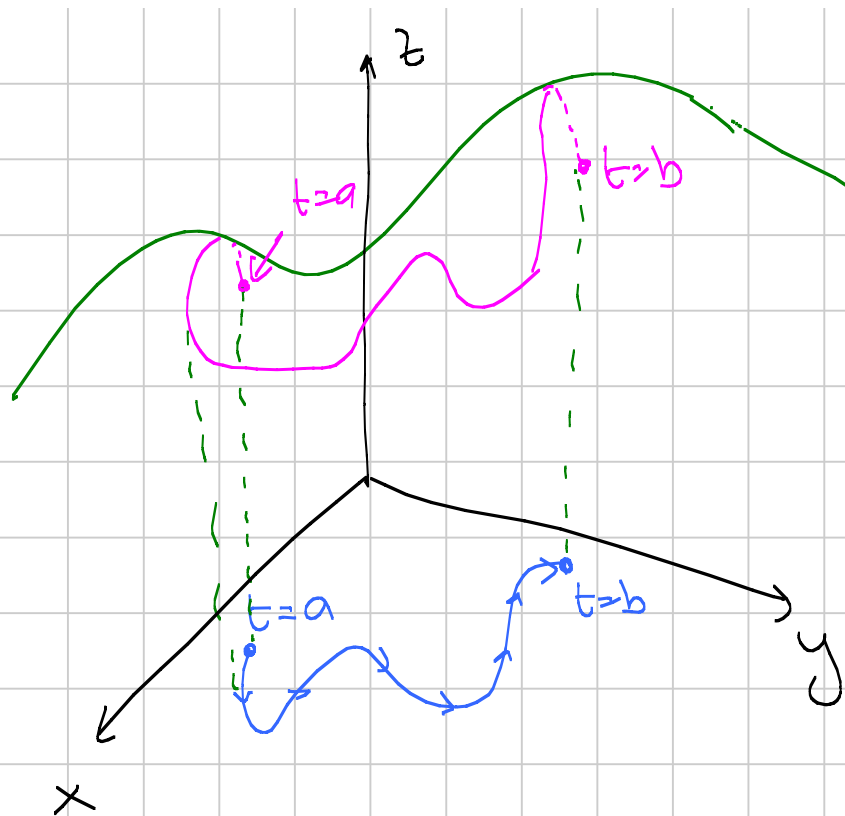
* una funzione $f(x, y)$ di 2 variabili definita su $\mathbb{R}^2$ (o almeno dove passa la curva) a valori reali

Si definisce integrale di f lungo la curva γ il numero

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

↑ curva

↑ integr. curvilineo



curva
"raddrizzata"

Integrale curvilineo = area
sotto il profilo altimetrico
della tappa.