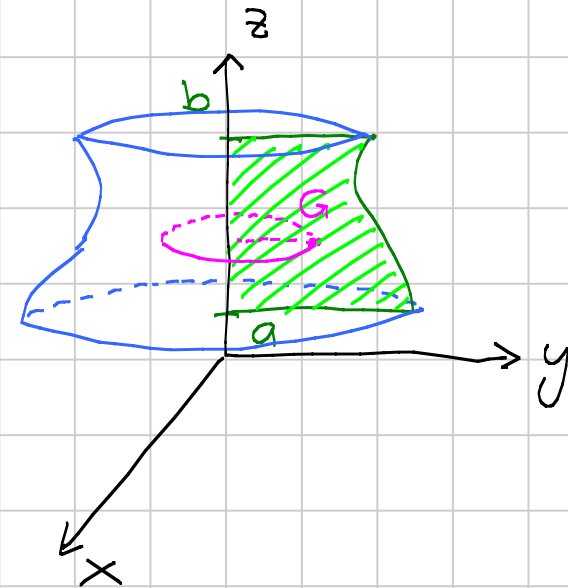


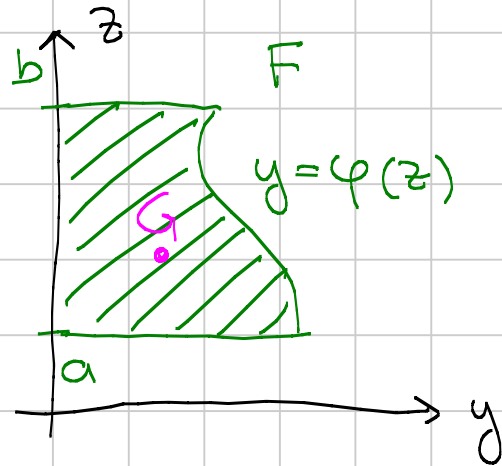
Solidi di rotazione e guldino

Solido di
rotazione



Fissiamo le notazioni

Figura F che ruota



$$F = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : z \in [a, b], 0 \leq y \leq \varphi(z)\}$$

TEO. GULDINO 1

Sia V il solido ottenuto ruotando F intorno all'asse z . Sia G il baricentro della figura F . $G = (y_G, z_G)$. Allora

$$\text{Vol}(V) = \boxed{\text{Area}(F)} \cdot \boxed{2\pi y_G}$$

y_G = distanza di G dall'asse di rotazione

Area figura
che ruota

lunghezza della circonferenza
descritta da G durante la
rotazione.

Def. baricentro di
figura piana

$$y_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F y \, dy \, dz = \frac{1}{\text{Area}(F)} \int_a^b dz \int_0^{\varphi(z)} dy \cdot y$$

insieme
normale
asse z

$$= \frac{1}{\text{Area}(F)} \int_a^b dz \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\varphi(z)} = \frac{1}{2 \text{Area}(F)} \int_a^b \varphi^2(z) \, dz$$

$$\text{Vol}(V) = \iiint_V 1 \, dx \, dy \, dz \stackrel{\substack{\text{sezioni} \\ \downarrow}}{=} \int_a^b dz \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy =$$

$$= \int_a^b \text{area}(S_z) \, dz$$

$S_z =$ cerchio di raggio $\varphi(z)$

$$= \int_a^b \pi \varphi^2(z) \, dz$$

$$\Rightarrow \text{Area}(S_z) = \pi \varphi^2(z)$$

Allora in Guldinus il termine di sinistra è

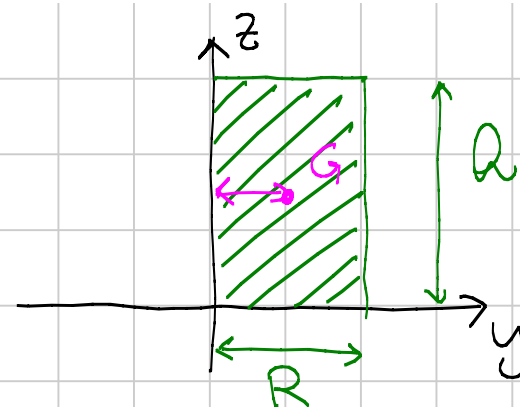
$$\pi \int_a^b \varphi^2(z) \, dz. \quad \text{Il termine di destra è}$$

$$\text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G = \cancel{\text{Area}(F)} \cdot \cancel{2\pi} \frac{1}{\cancel{2 \text{Area}(F)}} \int_a^b \varphi^2(z) \, dz$$

Quindi sono uguali !!!

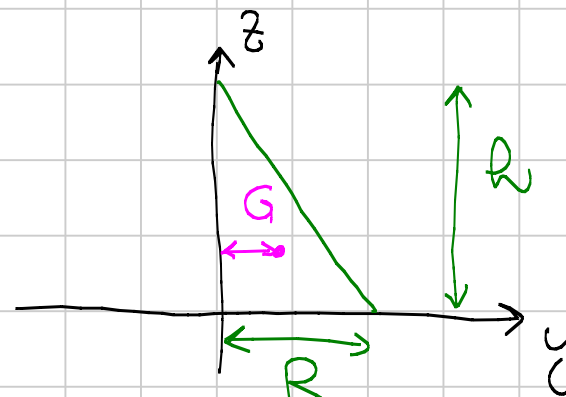
Esempio 1 Cilindro

$$\begin{aligned}\text{Volume} &= \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G \\ &= R \cdot R \cdot 2\pi \frac{R}{2} = \pi R^2 R\end{aligned}$$



Esempio 2 Cono

$$\begin{aligned}\text{Volume} &= \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G \\ &= \frac{R R}{2} \cdot 2\pi \frac{R}{3} \\ &= \pi R^2 \frac{R}{3}\end{aligned}$$



Se i vertici di un Δ hanno coord. (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , allora

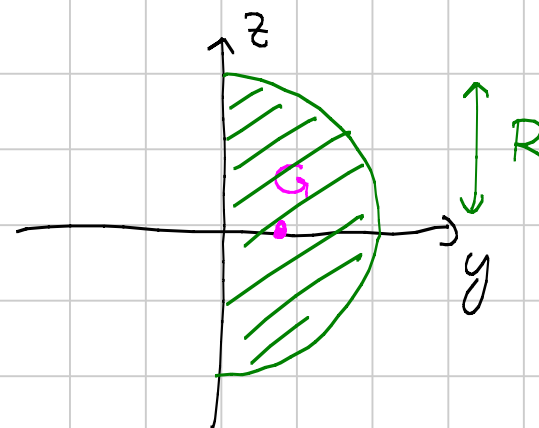
$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

Esempio 3 Sfera

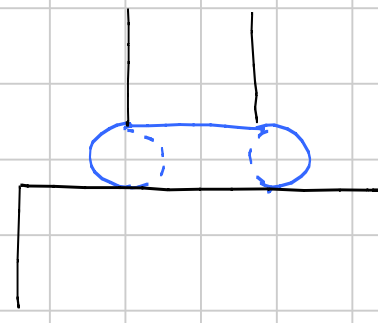
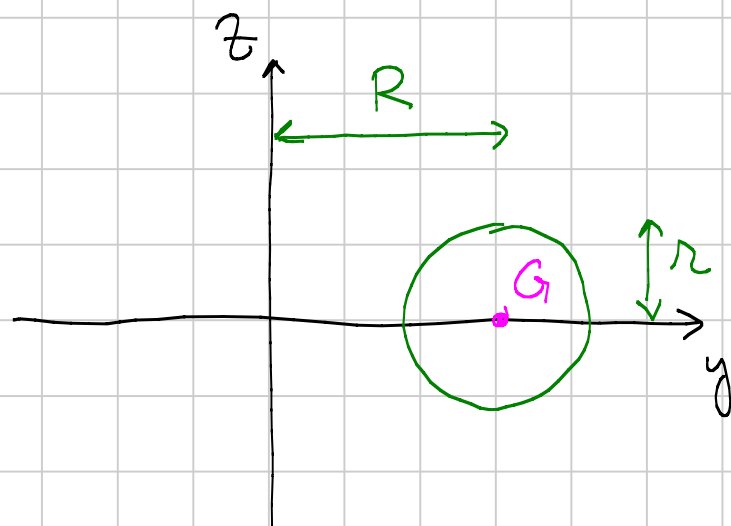
$$Vol = Area(F) \cdot 2\pi y_G$$

$$= \frac{1}{2} \pi R^2 \cdot \cancel{2\pi} \boxed{\frac{4}{3\pi} R} \quad \text{calcolo fatto preced.}$$

$$= \frac{4}{3} \pi R^3$$



Esempio 4 Toro



$$Vol(V) = Area(F) \cdot 2\pi y_G$$

$$= \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R$$

Riconoscere le figure di rotazione.

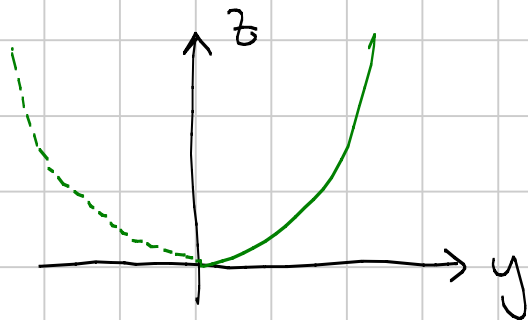
Qual è l'eq. di un solido di rotazione. Nelle ipotesi fatte prima si ha che

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [a, b], \underbrace{x^2 + y^2 \leq \varphi^2(z)} \}$$

la sezione è un cerchio di raggio $\varphi(z)$

Se invece di $\leq$ c'è solo $=$, vuol dire che sto considerando solo la superficie laterale del solido di rotazione.

Esempio 1 $z = x^2 + y^2 \leftarrow$ solido di rotazione con $\varphi(z) = \sqrt{z}$



$y = \varphi(z)$ diventa $y = \sqrt{z}$, cioè $z = y^2$

$z = x^2 + y^2 =$ paraboloido di rotazione,

Doppio cono

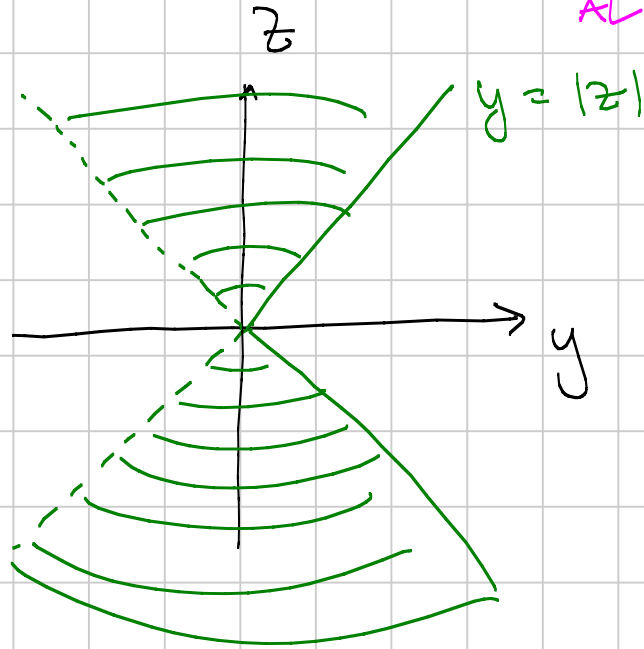
Esempio 2

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

SOLO PARTE
ALTA

Si può scrivere come $x^2 + y^2 = z^2$
solido di rotaz. con $\varphi(z) = |z|$

$$y = |z|$$



Se scrivo $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ho che z
deve essere $z \geq 0$, quindi solo
la parte sopra

Esempio 3

$$x^2 + y^2 = z^2 - 1$$

Solido di rotazione con
 $\varphi(z) = \sqrt{z^2 - 1}$

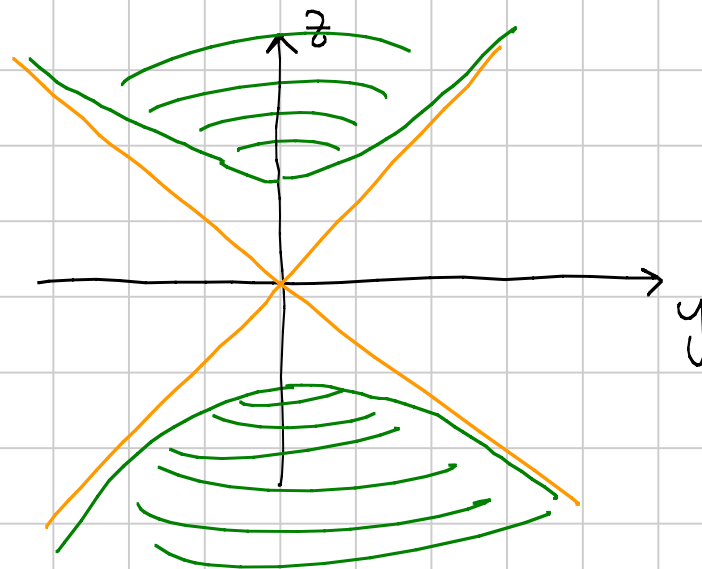
Disegnare

$$y = \varphi(z)$$

$$y = \sqrt{z^2 - 1}$$

$$\leadsto y^2 = z^2 - 1$$
$$z^2 - y^2 = 1$$

iperboloide a 2 FALDE

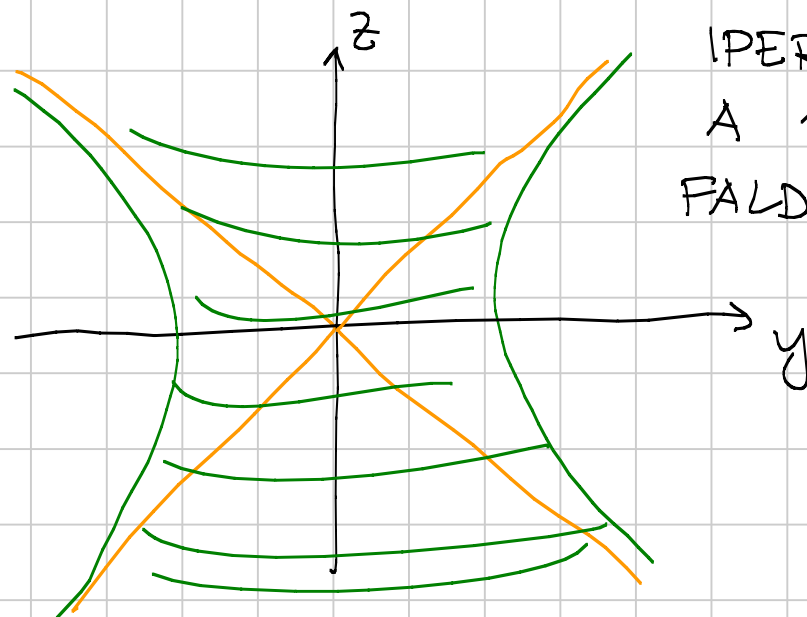


Esempio 4 $x^2 + y^2 = z^2 + 1$

$$\varphi(z) = \sqrt{z^2 + 1}$$

$$y = \varphi(z) \leadsto y = \sqrt{z^2 + 1}$$

$$\leadsto y^2 = z^2 + 1 \leadsto y^2 - z^2 = 1$$



IPERB.
A 1
FALDA