

Baricentri, solidi di rotazione, Teo. Guldino 1, geo. analitica nello spazio.

# BARICENTRI

$n=2$

Data una figura piana  $F \subseteq \mathbb{R}^2$

Matematicamente il baricentro della figura  $F$  è il punto  $G$  di coordinate

$$G = (x_G, y_G)$$

$$x_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F x \, dx \, dy$$

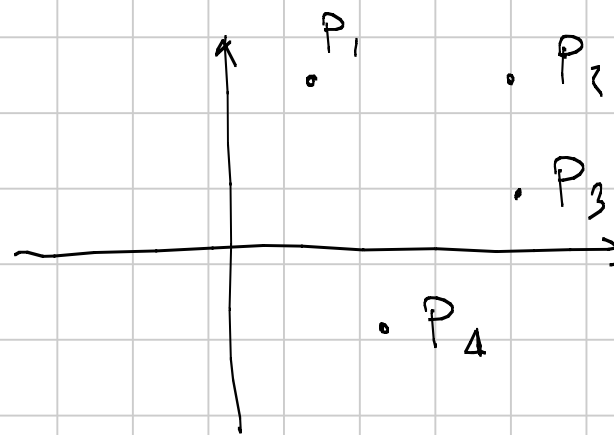
$$y_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F y \, dx \, dy$$

Nelle ipotesi  
che la figura  $F$   
sia fatta di un  
materiale omogeneo



Piccola interpretazione "fisica". Siano dati  $n$  punti  $P_1, \dots, P_n$  tutti con la stessa massa.

Il baricentro del sistema  $P_1, \dots, P_n$  è il punto  $G$  di coordinate  $(x_G, y_G)$



$$P_1 = (x_1, y_1), \dots, P_n = (x_n, y_n)$$

$$x_G = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \quad y_G = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}$$

Se i punti avessero masse  $m_1, \dots, m_n$  (anche diverse tra di loro), allora

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{\boxed{m_1 + \dots + m_n}}$$

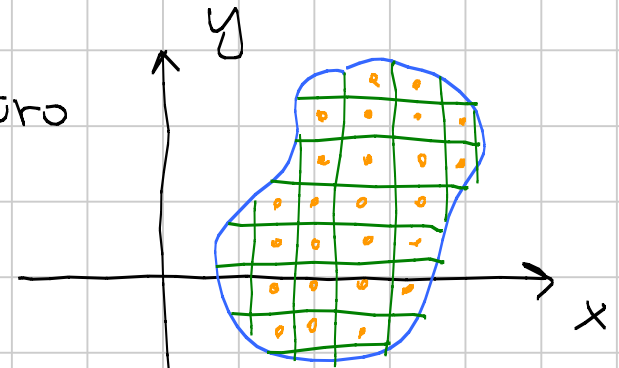
massa totale degli  
 $n$  punti

$$y_G = \frac{m_1 y_1 + \dots + m_n y_n}{m_1 + \dots + m_n}$$

Se invece di avere  $n$  punti abbiamo una figura piana  $F$ , possiamo pensare di suddividerla in tanti "quadrucini", trattare

ogni  $\square$  come fosse un punto (il suo centro) e calcolare il baricentro dei punti così ottenuti.

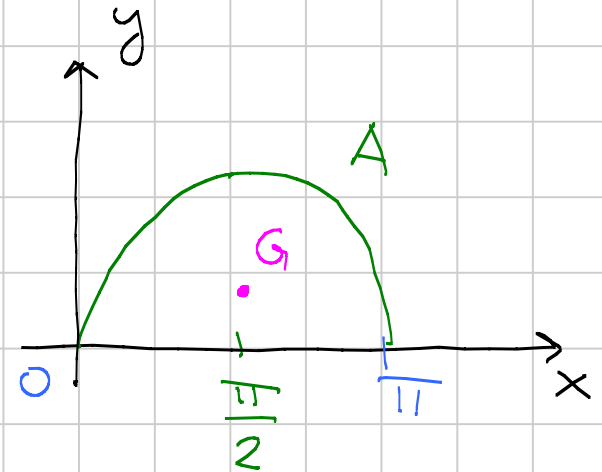
Al limite (lato dei  $\square \rightarrow 0$ ) il baricentro ottenuto tende agli integrali indicati prima.



### Esempio 1

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x \}$$

$$\text{Area}(A) = 2 \quad x_G = \frac{\pi}{2} \quad (\text{per ragioni di simmetria})$$



$$\begin{aligned} \iint_A y \, dx \, dy &= \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} y \, dy = \int_0^\pi dx \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\sin x} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^2 x \, dx \\ &\quad \text{normale asse } x \end{aligned}$$

$$\left[ \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx \text{ per simmetria e sommati danno} \right.$$

$$\left. \int_0^{\pi} (\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx = \int_0^{\pi} 1 \, dx = \pi \right]$$

$$y_G = \frac{1}{\text{Area}(A)} \cdot \iint_A y \, dx \, dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

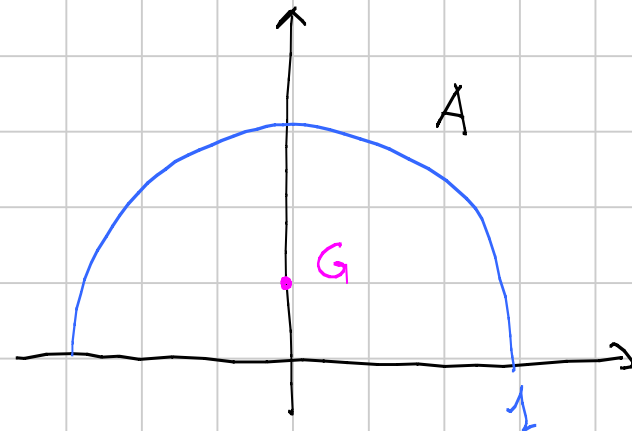
— 0 — 0 —

Esempio 2 Semicirconferenza (posso supporre centro in  $(0,0)$  e raggio  $=1$ )

$$x_G = 0 \text{ (per simmetria)}$$

coord. polari

$$\iint_A y \, dx \, dy \Rightarrow \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{\pi} \overbrace{\rho \sin \theta}^y \, d\theta$$



$$= \int_0^1 \rho^2 \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_2 = 2 \int_0^1 \rho^2 d\rho = 2 \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{2}{3}$$

$$y_G = \frac{1}{\text{Area}(A)} \iint_A y dx dy = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3\pi}$$

Baricentro di un solido  $V \subseteq \mathbb{R}^3$ . Punto  $G = (x_G, y_G, z_G)$  di coordinate

$$x_G = \frac{1}{\text{Vol}(V)} \iiint_V x dx dy dz$$

$$y_G = \frac{1}{\text{Vol}(V)} \iiint_V y dx dy dz$$

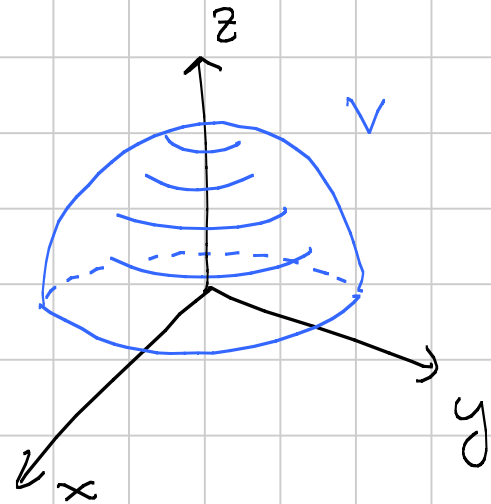
$$z_G = \frac{1}{\text{Vol}(V)} \iiint_V z dx dy dz$$

Sempre nell'ipotesi in cui il solido è costruito con un materiale omogeneo

Motivazione fisica analoga alla dim = 2.

Esempio 1 Semisfera (suppongo centro in  $(0,0,0)$  e raggio 1)

Intanto  $x_G = y_G = 0$  (per simmetria)  
cioè  $G$  sta sull'asse  $z$ .



$$\text{Vol}(V) = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

$\uparrow$   
 $r=1$

$$\iiint_V z \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \underbrace{\rho \sin \varphi}_z \underbrace{\rho^2 \cos \varphi}_J$$

$\uparrow$   
coord.  
sferiche

$$= \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 2\pi \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$$

$\underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi}$

$$\sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sin(2\varphi)$$

$$= \pi \int_0^1 \rho^3 d\rho \left[ -\frac{\cos(2\varphi)}{2} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi \int_0^1 \rho^3 \left[ \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi = \frac{\pi}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \right] d\rho = \pi \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{4}$$

Conclusione:  $z_G = \frac{1}{\text{vol}(V)} \iiint_V z \, dx \, dy \, dz = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3}{8}$

Più basso o più alto rispetto al semicerchio?

$$\frac{3}{8} \stackrel{?}{<} \frac{4}{3\pi}$$

$$\underset{\substack{'' \\ 28, \dots}}{9\pi} \stackrel{?}{<} 32$$

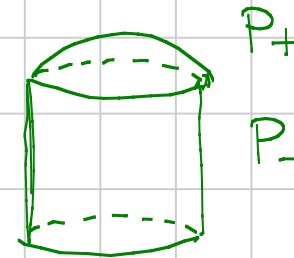
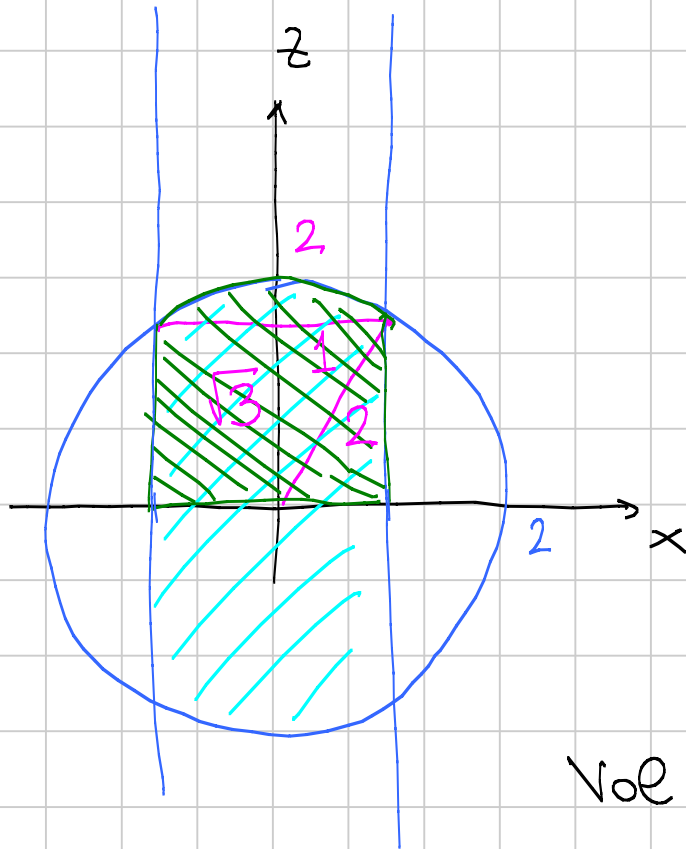
PIÙ BASSO !!!

## Esempio 2 PANETTONE

$$P = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0 \}$$

sfera con centro  
in  $(0,0,0)$  e raggio 2

parte alba  
cilindro infinito con  
asse lungo asse  $z$   
e "base" il cerchio nel  
piano con centro in  
 $(0,0)$  e raggio 1



$$\begin{aligned} \text{Vol}(P_-) &= \text{Area base} \cdot \text{altezza} \\ &= \pi \cdot \sqrt{3} = \pi\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{Vol}(P^+) = \iiint_{P^+} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{\sqrt{3}}^2 dz \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy =$$

↑  
sezioni

$$= \int_{\sqrt{3}}^2 dz \cdot \text{area}(S_z) =$$

$S_z = \text{cerchio di raggio}$   
 $\sqrt{4-z^2}$

$$= \pi \int_{\sqrt{3}}^2 (4-z^2) \, dz$$

$$= \pi \left[ 4z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=\sqrt{3}}^{z=2} = \text{conto} \dots$$

$$\iiint_{P^+} z \, dx \, dy \, dz = \int_{\sqrt{3}}^2 dz \iint_{S_z} z \, dx \, dy = \int_{\sqrt{3}}^2 z \, \text{area}(S_z) \, dz =$$

— o — o —  
↑  
S<sub>z</sub>

$$= \pi \int_{\sqrt{3}}^2 z (4-z^2) \, dz.$$

Ancora + semplice  
su  $P^+$ .