

Osservazione generale. Data un'eq. diff. AUTONOMA, se $u(t)$ è una soluzione, allora

Traslata dx/sx di $u(t)$ $\rightarrow u(t+c)$ è ancora una soluzione per ogni valore di c .

[Verifica per eq. del 1° ORDINE : se l'eq. è $u' = g(u)$

$$u'(t) = g(u(t)) \quad \text{per ogni } t \in \dots$$

ma allora se $v(t) = u(t+c)$

$$v'(t) = u'(t+c) = g(u(t+c)) = g(v(t))$$

$\Rightarrow v$ è una soluzione]

Esempio

$$\begin{cases} u' = e^u \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

$$\frac{du}{dt} = e^u \Rightarrow \frac{du}{e^u} = dt$$

$$\int \frac{du}{e^u} = \int dt = t + c$$

$$\int e^{-u} du = -e^{-u}$$

$$-e^{-u} = t + c \Rightarrow e^{-u} = -t + c \Rightarrow -u = \log(c - t)$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = -\log(c - t)} \quad \text{SOLUZ. GEN.}$$

Determino c :

$$u(0) = 1$$

$$\begin{aligned} &'' \\ &-\log c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \log c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{e}$$

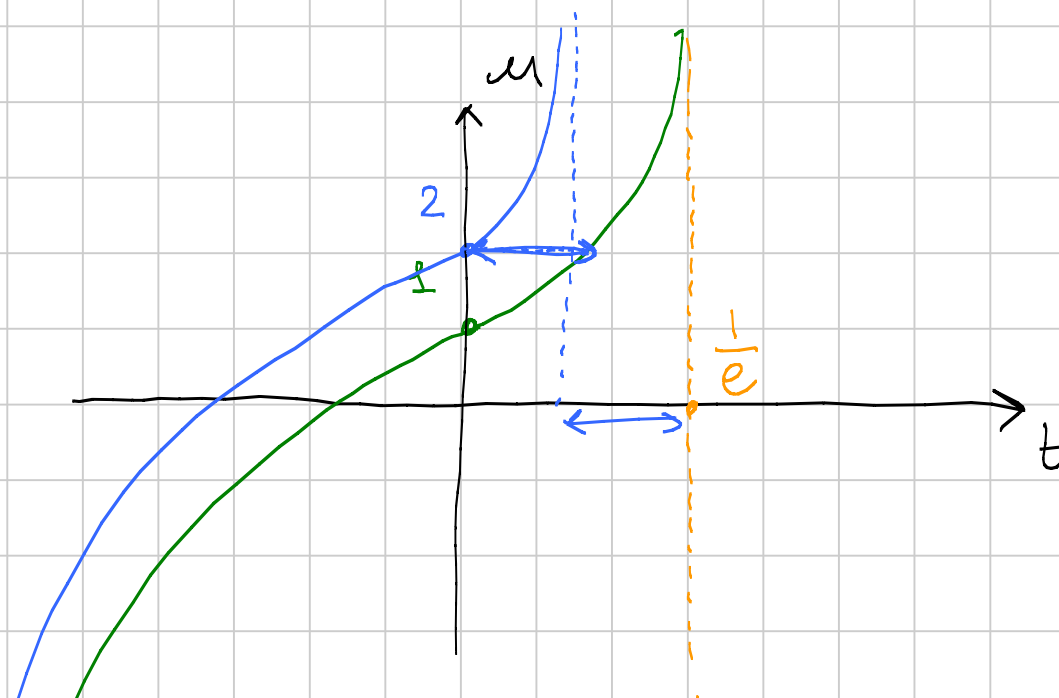
Soluz. problema di Cauchy:

$$\boxed{u(t) = -\log\left(\frac{1}{e} - t\right)}$$

Interv. max. di esistenza : $(-\infty, \frac{1}{e})$

Tempo di vita : $T = \frac{1}{e}$

Blow-up per $T = \frac{1}{e}$



Usando l'osserv. generale

sappiamo che tutte le
soluzioni hanno blow-up

e inoltre più α è grande, più il tempo di vita è vicino
a zero

Per ogni valore $T_0 > 0$ esiste esattamente una soluz. che
sopravvive fino a esattamente T_0 , dove ha blow-up.

Esempio 2

$$u'' + u = \sin(\alpha t)$$

↑ parametro

Domanda: le soluzioni di questa equazione sono funzioni limitate?

Come ci aspettavamo le soluz. ? Eq. lineare.

Omoogenea: $u'' + u = 0 \rightsquigarrow x^2 + 1 = 0 \rightsquigarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$

Sol. gen. omog.: $u(t) = a \cos(t) + b \sin(t)$

Serve poi una soluz. particolare della NON OMOG. che cercheremo del tipo

$$u(t) = \lambda \cos(\alpha t) + \mu \sin(\alpha t)$$

In conclusione la soluz. gen. della non omog. sarà del tipo

$$u(t) = \underbrace{a \cos(t) + b \sin(t)}_{\text{dall' omog.}} + \lambda \cos(\alpha t) + \mu \sin(\alpha t)$$

Indipendentemente dai valori dei vari parametri si tratta di una funzione limitata.

Questa analisi funziona per $\alpha \neq 1$ Cosa succede per $\alpha = 1$?

$$u'' + u' = \cos(t) \leftarrow \text{soluz. dell' omog.}$$

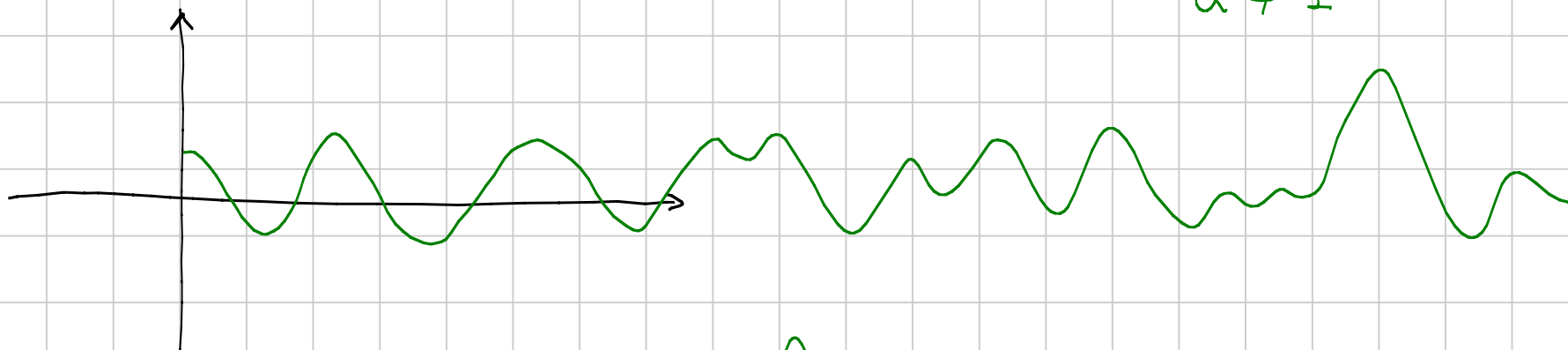
$\Rightarrow$ soluz. particolare non è del tipo $\lambda \sin(t) + \mu \cos(t)$,
ma del tipo

$$\underbrace{\lambda t \sin(t) + \mu t \cos(t)}$$

oscilla come $\sin(t)$ e $\cos(t)$, ma
l'ampiezza delle oscillazioni cresce
con il tempo

Quindi per $\alpha \neq 1$, tutte le soluzioni sono limitate
per $\alpha = 1$, tutte le soluzioni sono illimitate

$\alpha \neq 1$



$\alpha = 1$

