

EQ. DIFF. LINEARI DEL 1° ORDINE

← 2ª ISOLA

$$u' + a(t)u = b(t)$$

1° METODO: FATTORE INTEGRANTE

Sia $A(t)$ una primitiva di $a(t)$: $A'(t) = a(t)$

Molt. l'eq. a destra e sinistra per $e^{A(t)}$ ← fattore integrante

$$u' e^{A(t)} + a(t) e^{A(t)} u = b(t) e^{A(t)}$$

$$(u e^{A(t)})' = b(t) e^{A(t)}$$

$$u' e^{A(t)} + u (e^{A(t)})'$$

Posso ricavare

$$u e^{A(t)} = \int b(t) e^{A(t)} dt + c$$

parametro che
ci aspettiamo

Ora basta ricavare u

$$u(t) = e^{-A(t)} \left\{ c + \int b(t) e^{A(t)} dt \right\}$$

FORMULA
PER SOLUZ.
GENERALE

Operativamente: si trova esplicitamente la soluzione a patto di

* saper fare la primitiva di $a(t)$

* " " " " di $b(t) e^{A(t)}$

— o — o —

2° METODO Comportarsi come per le altre eq. lineari:

→ soluzione generale eq. omogenea

↘ + soluzione QUALUNQUE della non omog.

L'eq. omog. diventa

$$u' + a(t)u = 0 \rightarrow \text{lin. + omog., ma No coeff. costanti}$$

→ in realtà è a var. sep. e quindi la posso risolvere

$$u' = -a(t)u$$

1. Separare $\frac{du}{dt} = -a(t)u \Rightarrow \frac{du}{u} = -a(t)dt$

2. Integrare $\int \frac{du}{u} = -\int a(t)dt$

$$\log |u| = -A(t) + C$$

3. Ricavare $|u(t)| = e^{-A(t)+C} = e^{-A(t)} \cdot e^C = k e^{-A(t)}$

$$u(t) = \pm k e^{-A(t)}$$

$$u(t) = k e^{-A(t)}$$

SOL.
GEN.
OMOG.

Mi serve ora una soluz. qualunque della non omog.
e da posso cercare con il metodo di variazione
delle costanti.

La cerco quindi del tipo

$$u(t) = k(t) e^{-A(t)}$$

$$u'(t) = k'(t) e^{-A(t)} - k(t) a(t) e^{-A(t)}$$

Sostituisco nell'eq.

$$\underbrace{k'(t) e^{-A(t)} - k(t) a(t) e^{-A(t)}}_{u'} + \underbrace{a(t) k(t) e^{-A(t)}}_{+ a(t) u} = b(t)$$

$$k'(t) e^{-A(t)} = b(t) \Rightarrow k'(t) = b(t) e^{A(t)}$$

$$\Rightarrow k(t) = \int b(t) e^{A(t)} dt$$

Conclusione:

stessa formula che con il fattore integrante

$$u(t) = k e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int b(t) e^{A(t)} dt$$

sol. gen.
NON omog.

sol. gen.
omog.

soluz. part. eq. NON omog.
trovata con metodo variazioni
costanti

Esempio 1

— o — o —
 $u' = u + t$

$$u' - u = t$$

$$a(t) = -1$$

$$b(t) = t$$

$$A(t) = -t \Rightarrow \text{Fattore integrante: } e^{A(t)} = e^{-t}$$

Moltiplico per e^{-t} :

$$\underbrace{u'e^{-t} - ue^{-t}}_{(ue^{-t})'} = te^{-t}$$

$$\begin{aligned}
 u e^{-t} &= \int \underset{\substack{F \\ t}}{\underset{g}{t}} e^{-t} dt + c = \underset{\substack{F \\ t}}{t} (\underset{G}{-e^{-t}}) - \int \underset{\substack{F \\ 1}}{1} (\underset{G}{-e^{-t}}) dt + c \\
 &= -t e^{-t} + \int e^{-t} + c = -t e^{-t} - e^{-t} + c
 \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto:

$$u(t) e^{-t} = -t e^{-t} - e^{-t} + c \quad \text{e quindi}$$

$$u(t) = -t - 1 + c e^t$$

Solus. generale ottenuta
con il fattore integrante.

In alternativa: $u' - u = t$ lineare a coeff. costanti

Omogenea $u' - u = 0 \rightsquigarrow$ Pol.: $x - 1 = 0$

$\rightsquigarrow$ Radici: $x = 1 \rightsquigarrow$ Base $e^t \rightsquigarrow$ Sol. gen. omog: $u(t) = c e^t$

Calcolo soluz. particolare con il tentativo $u(t) = at + b$

$$u'(t) = a \quad \text{Sostituisco}$$

$$\begin{aligned} a - at - b &= t \\ \text{blue } u' - u &= t \end{aligned} \quad \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \quad a = b = -1$$

Soluz. particolare, $u(t) = -t - 1$

— o — o —

Esempio 2 $\begin{cases} u' + \frac{u}{t} = \cos t \\ u(\pi) = \alpha \end{cases}$ $a(t) = \frac{1}{t}$ $b(t) = \cos t$

FATTO GENER. PER
EQUAZ. LINEARI

Interv. max. di esistenza della soluzione = interv. max. di
esistenza dei coefficienti

$$= (0, +\infty) = \text{perzo dell' insieme di def di } \frac{1}{t} \text{ e } \cos t \text{ che contiene } \pi$$

$$A(t) = \log t$$

↑
so già che
 $t > 0$ dove solus.
"vive"

$$e^{A(t)} = e^{\log t} = t$$

Moltiplico tutto per t :

$$\underbrace{t u' + u}_{(tu)'} = t \cdot \cos(t)$$

$$\begin{aligned} t u &= \int t \cdot \cos(t) dt = t \cdot \sin(t) - \int \sin(t) dt \\ &= t \cdot \sin(t) + \cos(t) + c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(t) = \sin(t) + \frac{\cos(t)}{t} + \frac{c}{t}$$

Determiniamo c in funzione del parametro α

$$u(\pi) = \alpha \quad -\frac{1}{\pi} + \frac{c}{\pi} = \alpha \Rightarrow \frac{c}{\pi} = \alpha + \frac{1}{\pi} \Rightarrow c = \pi\alpha + 1$$

Soluzione del problema di Cauchy è

$$u(t) = \sin(t) + \frac{\cos(t)}{t} + \frac{\pi\alpha + 1}{t}$$

Cosa succede ad $u(t)$ quando $t \rightarrow 0^+$? Riscrivo

$$u(t) = \sin(t) + \frac{\cos(t) + 1 + \pi\alpha}{t} \rightarrow 2 + \pi\alpha$$

$\sin(t) \rightarrow 0$ $t \rightarrow 0^+$

- se $2 + \pi\alpha > 0$, abbiamo che $u(t) \rightarrow +\infty$
 - se $2 + \pi\alpha < 0$, " " $u(t) \rightarrow -\infty$
 - se $2 + \pi\alpha = 0$, che succede? Vuol dire che $\pi\alpha = -2$
- } BLOW-UP

$$u(t) = \sin(t) + \frac{\cos(t) - 1}{t} \rightarrow 0$$

$\frac{\cos(t) - 1}{t} \rightarrow 0$

Esempio 3 (Non è lineare!)

$$\begin{cases} u' = u \log u & \rightarrow \text{VAR. SEP.} \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases} \quad \frac{du}{dt} = u \log u$$
$$\frac{du}{u \log u} = dt$$

$$\int \frac{du}{u \log u} = \int dt$$

$$\log |\log u| = t + c$$

$$|\log u| = e^{t+c} = e^t \cdot e^c = c e^t$$

$$\Rightarrow \log u = \pm c e^t = c e^t \Rightarrow u(t) = e^{c e^t}$$

Determino c in funzione di α

$$u(0) = \alpha$$

$$e^{c e^0} = \alpha$$

$$e^c = \alpha \Rightarrow c = \log \alpha$$

Solut. del probl. di Cauchy

$$u(t) = e^{\log \alpha \cdot t}$$

- Se $\alpha > 1$, cioè $\log \alpha > 0$
- Se $\alpha \in (0, 1)$, cioè $\log \alpha < 0$

