

Esempio 5 $u'' + 4u' + 3u = t^2 + 1$ $\leftarrow$ polinomiale

Provo con $u(t) = at^2 + bt + c$ $\leftarrow$ polinomio di II grado completo (a, b, c sono da trovare)

$$u'(t) = 2at + b \quad u''(t) = 2a$$

$$\underbrace{2a}_{u''} + \underbrace{8at}_{4u'} + \underbrace{4b}_{+3u} + 3at^2 + 3bt + 3c = t^2 + 1$$

$$\begin{cases} 3a = 1 & \text{coeff. di } t^2 \\ 8a + 3b = 0 & \text{coeff. di } t \\ 2a + 4b + 3c = 1 & \text{termine noto} \end{cases}$$

$$a = 1/3$$

$$3b = -8a = -\frac{8}{3} \Rightarrow b = -\frac{8}{9}$$

3^a eq $\leadsto$ ricavo c

In generale, se il 2° membro è un polinomio di grado k , provo con un polinomio di grado k a coeff. incogniti

Esempio 6 $u''' + u' = t^2$

Consideriamo prima l'omogenea $u''' + u' = 0$

$$\rightarrow x^3 + x = 0; \quad x(x^2 + 1) = 0 \rightarrow \text{Radici: } \begin{array}{ll} x = 0 & x^2 = -1 \\ x = 0 & x = \pm i \end{array}$$

($\alpha=0, \beta=1$)

$$\rightarrow \text{Base: } e^{0t} = 1, \quad e^{0t} \cos t, \quad e^{0t} \sin t$$
$$1, \quad \cos t, \quad \sin t$$

Cerco una soluz. qualunque dell'eq. non omogenea. Verrebbe da cercarla della forma

$$u(t) = at^2 + bt + c \quad \text{Questo non funziona.}$$

Allora si mette una "t davanti"

$$u(t) = at^3 + bt^2 + ct$$

$$u'(t) = 3at^2 + 2bt + c, \quad u''(t) = 6at + 2b, \quad u'''(t) = 6a$$

$$\underbrace{6a + 3at^2 + 2bt + c}_{u''' + u'} = t^2$$

$$\begin{cases} 3a = 1 & \text{coeff. } t^2 \\ 2b = 0 & \text{coeff. } t \\ 6a + c = 0 & \text{termine noto} \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{3} \quad b = 0 \quad c = -6a = -2$$

Soluz. particolare dell'eq. non omog. è

$$u(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t$$

Sol. gen.: $u(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t + a + b \cos t + c \sin t$

↑ ↑ ↑
3 parametri liberi

METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI

$$u'' + 4u' + 3u = e^t$$

Sol. gen. dell'omogenea: $u(t) = ae^{-t} + be^{-3t}$

Cerco una soluzione della non omogenea del tipo

$$u(t) = a(t)e^{-t} + b(t)e^{-3t}$$

$a(t)$ e $b(t)$ sono
funzioni da determi-
nare

$$u'(t) = a'(t)e^{-t} - a(t)e^{-t} + b'(t)e^{-3t} - 3b(t)e^{-3t}$$

Impongo che la somma dei 2 termini con a' e b' faccia 0

$$a'(t)e^{-t} + b'(t)e^{-3t} = 0$$

1ª equazione

$$u''(t) = -a'(t)e^{-t} + a(t)e^{-t} - 3b'(t)e^{-3t} + 9b(t)e^{-3t}$$

Sostituisco u'' , u' e u nell'equazione

$$\begin{array}{l}
 u'' \\
 + 4u' \\
 + 3u
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 -a'e^{-t} + a'e^{-t} - 3b'e^{-3t} + 9be^{-3t} \\
 -4ae^{-t} - 12be^{-3t} \\
 + 3ae^{-t} + 3be^{-3t}
 \end{array}
 = e^t$$

DEVE SUCCEDERE che i termini con la a e quelli con la b se ne vanno. Resta un'eq. in a' e b'

$$\boxed{-a'e^{-t} - 3b'e^{-3t} = e^t} \quad 2^{\text{a}} \text{ equazione}$$

La prima e 2^a eq. costituiscono un sistema nelle incognite a' e b'

$$\begin{cases} a'(t)e^{-t} + b'(t)e^{-3t} = 0 \\ -a'e^{-t} - 3b'e^{-3t} = e^t \end{cases}$$

Sommo: $-2b'e^{-3t} = e^t$

$$\Rightarrow b' = -\frac{1}{2}e^{4t}$$

Sostituisco nella 1ª: $a'e^{-t} - \underbrace{\frac{1}{2}e^{4t}}_{b'} \cdot e^{-3t} = 0$

$$a'e^{-t} = \frac{1}{2}e^t \Rightarrow a' = \frac{1}{2}e^{2t}$$

Trovati $a'(t)$ e $b'(t)$ posso ricavare $a(t)$ e $b(t)$ facendo la primitiva (se si riesce!!!)

$$a(t) = \frac{1}{4}e^{2t}$$

$$b(t) = -\frac{1}{8}e^{4t}$$

e finalmente

$$u(t) = a(t)e^{-t} + b(t)e^{-3t} = \frac{1}{4}e^{2t} \cdot e^{-t} - \frac{1}{8}e^{4t} \cdot e^{-3t}$$

$$= \frac{1}{4} e^t - \frac{1}{8} e^t = \frac{1}{8} e^t$$

= stesso risultato che con il tentativo $u(t) = \lambda e^t$!!!!!
 — o — o —

$$u'' + 4u' + 3u = \cos(3t) + t^2 + e^{5t}$$

Tentativo misto:

$$u(t) = a \cos(3t) + b \sin(3t) + ct^2 + dt + e + f e^{5t}$$

oppure: si risolve separatamente con un solo pezzo per volta e poi si sommano le soluzioni così ottenute.

Perché funziona? LINEARITÀ (verifica per esercizio!!!)