

Esempio 1 $u'' + 4u' + 3u = 0 \rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$
 $(x+3)(x+1) = 0$

$\rightarrow$ Radici: $x = -3, x = -1 \rightarrow$ Base: e^{-3t}, e^{-t}

Sol. gen.

$$u(t) = ae^{-3t} + be^{-t}$$

Esempio 2 $u'' + 6u' + 9u = 0 \rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0$
 $(x+3)^2 = 0$

$\rightarrow$ Radici: $x = -3$ radice di molt. 2 $\rightarrow$ Base: e^{-3t}, te^{-3t}

Sol. gen.

$$u(t) = ae^{-3t} + bte^{-3t}$$

Esempio 3 $u'' + 2u' + 5u = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 5 = 0$

→ Radici: $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$
 $= -1 \pm 2i \quad (\alpha = -1, \beta = 2)$

→ Base: $e^{-t} \cos(2t), e^{-t} \sin(2t)$

Sol. gen. $u(t) = a e^{-t} \cos(2t) + b e^{-t} \sin(2t)$

Esempio 4 $u'' - 9u = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3$

Sol. gen.: $u(t) = a e^{3t} + b e^{-3t}$

Esempio 5 $u'' - 9u' = 0 \rightarrow x^2 - 9x = 0 \quad x(x-9) = 0$

→ Radici: $x=0, x=9 \rightarrow$ Base: $e^{9t}, e^{0t} = 1$

Sol. gen.: $u(t) = a e^{9t} + b$

Esempio 6 $u'' + 9u = 0 \rightarrow x^2 + 9 = 0 \quad x^2 = -9$

Radici: $x = \pm 3i$ (compl. coniugate con $\alpha = 0$, $\beta = 3$)

$\rightarrow$ Base: $e^{0t} \cos(3t) \quad e^{0t} \sin(3t)$

Sol. gen.:

$$u(t) = a \cos(3t) + b \sin(3t)$$

— 0 — 0 — 0 —

EQUAZIONI NON OMOGENEE

Teorema

La soluzione generale di un'eq. diff. lineare NON omogenea (anche a coeff. non costanti) è

$$u(t) = \underbrace{c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t)}_{\text{solus. gen. dell'eq. omogenea}} + \underbrace{\bar{u}(t)}_{\text{soluzione QUALUNQUE dell'eq. non omog.}}$$

solus. gen. dell'eq.
omogenea

soluzione QUALUNQUE
dell'eq. non omog.

Operativamente: se trovo una soluzione QUALUNQUE dell'eq. non omogenea le ho trovate tutte.

Su cosa si basa la dim. del teo.? Su 2 fatti:

- ① Se u e v sono 2 soluz. della NON OMOGENEA, allora $w = u - v$ è una soluz. dell'eq. OMOGENEA
- ② Se u è una soluz. della NON OMOGENEA e w è una soluz. dell'OMOGENEA, allora $u + w$ è sol. della NON OMOGENEA.

— o — o —

Operativamente: servono dei metodi per trovare almeno una soluz. della non omogenea.

↗ PROVARE A INDOVINARE

↘ METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI

Esempio 1 $u'' + 4u' + 3u = e^t$

Cerco una solus. del tipo
 $u(t) = \lambda e^t$

$$u'(t) = \lambda e^t$$

$$u''(t) = \lambda e^t$$

sostituisco

$$\lambda e^t + 4\lambda e^t + 3\lambda e^t = e^t$$

$u'' + 4u' + 3u$

$$8\lambda e^t = e^t \Rightarrow \lambda = \frac{1}{8}$$

Solus. generale: $u(t) = \underbrace{\frac{1}{8} e^t}_{\substack{\uparrow \\ \text{solus.} \\ \text{appena} \\ \text{trovata}}} + \underbrace{ae^{-t} + be^{-3t}}_{\substack{\text{solus. generale eq.} \\ \text{omogenea } u'' + 4u' + 3u = 0}}$

Esempio 2 $u'' + 4u' + 3u = e^{2t}$

Provo con $u(t) = \lambda e^{2t}$

$$u'(t) = 2\lambda e^{2t}$$

$$u''(t) = 4\lambda e^{2t}$$

$$4\lambda e^{2t} + 8\lambda e^{2t} + 3\lambda e^{2t} = e^{2t}$$

$$u'' + 4u' + 3u$$

$$15\lambda e^{2t} = e^{2t}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{15} \Rightarrow \text{Sol. gen. } u(t) = \frac{1}{15} e^{2t} + a e^{-t} + b e^{-3t}$$

Esempio 3 $u'' + 4u' + 3u = e^{-3t}$ Provo con $u(t) = \lambda e^{-3t}$

$$u'(t) = -3\lambda e^{-3t} \quad u''(t) = 9\lambda e^{-3t}$$

$$9\lambda e^{-3t} - 12\lambda e^{-3t} + 3\lambda e^{-3t} = e^{-3t}$$

$$u'' + 4u' + 3u$$

$$0 = e^{-3t} \quad \text{!!!!}$$

BRAVO FURBO!!!! e^{-3t} è soluzione dell'eq. omogenea, quindi sostituita a sinistra produce 0!!!

Secondo tentativo: $u(t) = \lambda t e^{-3t}$

$$u'(t) = \lambda e^{-3t} - 3\lambda t e^{-3t}, \quad u''(t) = -3\lambda e^{-3t} - 3\lambda e^{-3t} + 9\lambda t e^{-3t}$$

Sostituisco:

$$\underbrace{-6\lambda e^{-3t} + 3\lambda t e^{-3t}}_{u''} + \underbrace{+4\lambda e^{-3t} - 12\lambda t e^{-3t}}_{+4u'} + \underbrace{+3\lambda t e^{-3t}}_{+3u} = e^{-3t}$$

$$-2\lambda e^{-3t} = e^{-3t} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

Sol. gen.:

$$u(t) = -\frac{1}{2} t e^{-3t} + a e^{-t} + b e^{-3t}$$

2° membro di tipo $e^{\alpha t}$: provare con $u(t) = \lambda e^{\alpha t}$.

Se non funziona, aggiungere delle t davanti finché basta.

Esempio 4 $u'' + 4u' + 3u = \cos(2t)$

Provo con $u(t) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)$

$$u'(t) = -2\lambda \sin(2t) + 2\mu \cos(2t)$$

$$u''(t) = -4\lambda \cos(2t) - 4\mu \sin(2t)$$

Sostituisco !

$$\underbrace{-4\lambda \cos(\) - 4\mu \sin(\)}_{u''} \underbrace{-8\lambda \sin(\) + 8\mu \cos(\)}_{+4u'} + \underbrace{3\lambda \cos(\) + 3\mu \sin(\)}_{+3u} = \cos(\)$$

$$\begin{cases} -4\lambda + 8\mu + 3\lambda = 1 & \leftarrow \text{coeff. } \cos(\) \\ -4\mu - 8\lambda + 3\mu = 0 & \leftarrow \text{coeff. } \sin(\) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\lambda + 8\mu = 1 \\ -8\lambda - \mu = 0 \end{cases}$$

↓

Risolvere $\rightarrow$ trovare λ e μ

In generale: se 2° membro contiene $\sin$ e/o $\cos$, provare con una comb. lineare degli stessi.
Se non funziona, tentare finché basta.