

Eq. diff. lineari

$$a_n(t) u^{(n)} + a_{n-1}(t) u^{(n-1)} + \dots + a_1(t) u' + a_0(t) u = f(t)$$

CASI

- ↗ OMOGENEO $f(t) \equiv 0$
- ↘ NON OMOGENEO $f(t) \neq 0$

1ª Osservazione

Detto brutalmente: la soluzione di un'eq. diff. lineare vive finché può, cioè l'interv. max. di esistenza è il più grosso intervallo (o semiretta, o tutto $\mathbb{R}$) su cui i coeff. $a_0(t), \dots, a_n(t)$ e $f(t)$ sono definiti)

CASO OMOGENEO

L'insieme delle soluzioni di un'eq. diff. lineare omogenea di ordine n è uno SPAZIO VETTORIALE di dim = n .

Operativamente: se conosco una base $u_1(t), \dots, u_n(t)$ di tale spazio, ogni altra soluzione la posso scrivere nella forma

SOLUZ. GEN. EQ. OMOGENEA

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_n u_n(t)$$

Basta trovare una base e abbiamo trovato la soluz. generale.

Dim. per dim. che è uno sp. vettoriale devo verificare

- ① che la somma di 2 soluz. è ancora una soluz.
- ② che se moltiplico una soluz. per un numero ottengo ancora una soluz.

① Siano u e v 2 soluz. e sia $w = u + v$

$$a_n(t) u^{(n)} + a_{n-1}(t) u^{(n-1)} + \dots + a_1(t) u' + a_0(t) u = 0 \leftarrow u \text{ sol.}$$

$$a_n(t) v^{(n)} + a_{n-1}(t) v^{(n-1)} + \dots + a_1(t) v' + a_0(t) v = 0 \leftarrow v \text{ soluz.}$$

Sommando otengo

$$a_n(t) [u^{(n)} + v^{(n)}] + \dots + a_1(t) [u' + v'] + a_0(t) [u + v] = 0$$

$\underbrace{\quad}_{w^{(n)}} \quad \quad \quad \underbrace{\quad}_{w'} \quad \quad \quad \underbrace{\quad}_w$

$\uparrow$
 $w \text{ è soluz.}$

② Sia u una soluz. e sia λ un numero.

Moltiplico la prima eq. per λ

$$\lambda a_n(t) u^{(n)} + \dots + \lambda a_1(t) u' + \lambda a_0(t) u = 0$$

$$a_n(t) [\lambda u]^{(n)} + \dots + a_1(t) [\lambda u]' + a_0(t) [\lambda u] = 0 \leftarrow \begin{matrix} \lambda u \text{ è} \\ \text{una} \\ \text{soluz.} \end{matrix}$$

③ Perché ha dimensione n ? "Brutalmente"

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Eq.} \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(0) = 0 \end{array} \right.$$

↑
1ª soluz., $v_1(t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Eq.} \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 1 \\ u''(0) = 0 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(0) = 0 \end{array} \right.$$

↑
2ª soluz., $v_2(t)$

Procedendo nello stesso modo ottengo n soluzioni diverse, che indico con $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$

Dico che $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$ è una base. Essere una base vuol dire 2 cose:

- essere lin. indep.
- ogni altra soluz. è comb. lineare degli elementi della base

Primo punto: supponiamo che $c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t) + \dots + c_n v_n(t) = w$ sia la funzione nulla.

$w(0)$ deve fare 0, ma $w(0) = c_1 \overset{1}{v_1''(0)} + c_2 \overset{0}{v_2''(0)} + \dots + c_n \overset{0}{v_n''(0)} = 0$

Analogamente $w'(0)$ deve fare 0, ma

$$w'(0) = \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{C_1} v_1'(0) + \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{C_2} v_2'(0) + \dots + \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{C_n} v_n'(0) = C_2$$

Quindi tutti i coeff. devono essere nulli

Secondo punto: bisogna dimostrare che ogni altra soluzione è comb. lineare delle v_i

Sia u una soluz. con

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Eq.} \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(0) = u_{n-1} \end{array} \right.$$

Dico che $u(t) = u_0 v_1(t) + u_1 v_2(t) + \dots + u_{n-1} v_n(t)$
[Fare la verifica]

COME DETERMINARE UNA BASE

Si "riesce" se i coeff. sono costanti.

Caso particolare $n=2$

$$au'' + bu' + cu = 0$$

Considero l'eq. polinomiale associata $ax^2 + bx + c = 0$

Considero le radici dell'eq.: ho 3 casi

- $\Delta > 0 \Rightarrow$ l'eq. ha 2 radici reali distinte λ, μ .

Una base è $e^{\lambda t}, e^{\mu t} \Rightarrow$ la soluz. gen. è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}$$

- $\Delta = 0 \Rightarrow$ l'eq. ha una radice λ di molteplicità 2.

Una base è $e^{\lambda t}, te^{\lambda t} \Rightarrow$ la soluz. gen. è $e^{\lambda t}$ per una cost.

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

parte
reale $\downarrow$ parte
immag. $\downarrow$

- $\Delta < 0 \Rightarrow$ l'eq. ha 2 radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$.

Una base è $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$, $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$

$\Rightarrow$ la soluz. generale è

$$u(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Nota bene: il caso $\Delta < 0$ è imparentato con il caso $\Delta > 0$ nel senso che verrebbe da dire che una base è

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$

Dim della formula che dà le basi : basta verificare che i 2 elementi indicati sono soluzioni dell'equazione.

In realtà, uno potrebbe cercare una soluzione dell'eq.

$$au'' + bu' + cu = 0$$

che sia della forma $u(t) = e^{\lambda t}$. Sostituisco

$u'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $u''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, quindi deve essere

$$\underbrace{a \lambda^2 e^{\lambda t}}_{au''} + \underbrace{b \lambda e^{\lambda t}}_{bu'} + \underbrace{c e^{\lambda t}}_{cu} = 0 ; \quad \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0} (a \lambda^2 + b \lambda + c) = 0$$

λ deve essere una radice del polinomio

Nel caso generale di un'eq. di ordine n il polinomio associato ha n radici (contate con molteplicità)

- ogni radice reale λ di molt. 1 produce 1 el. della base:

$$e^{\lambda t}$$

- ogni radice reale λ di molt. k produce k el. della base:

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}$$

- ogni coppia di radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ di molt. 1 produce 2 el. della base:

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

$$e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

- se la coppia $\alpha \pm i\beta$ ha molt. k , produce $2k$ el. della base:

i 2 precedenti, e gli stessi moltiplicati per

$$t, t^2, \dots, t^{k-1}$$