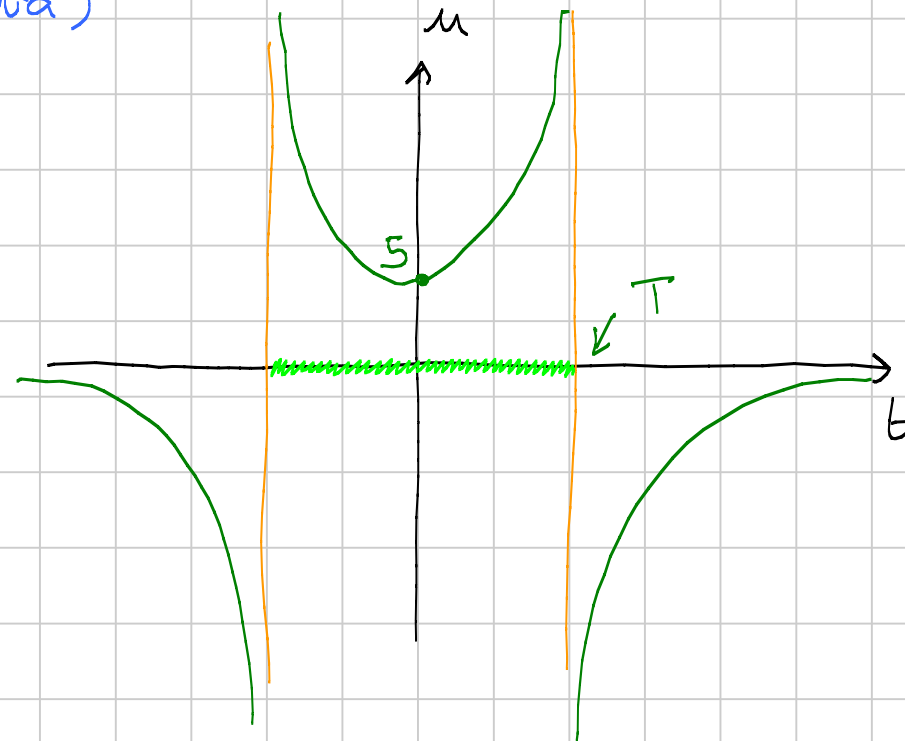


6. **STUDIARE** (la soluzione ottenuta)

$$u(t) = \frac{20}{4 - 5t^4}$$

Problemi quando $4 - 5t^4 = 0$

$$5t^4 = 4 \quad t = \pm \sqrt[4]{\frac{4}{5}}$$



**INTERVALLO MASSIMALE DI
ESISTENZA**

Il pezzo dell'insieme di definizione di $u(t)$
che contiene l'istante iniziale

Nell'esempio l'insieme di def. ha 3 pezzi e quello che ci
interessa (int. max. di esistenza) è quello centrale, cioè

$$\left(-\sqrt[4]{\frac{4}{5}}, +\sqrt[4]{\frac{4}{5}} \right)$$

TEMPO DI VITA della soluzione (LIFE SPAN) che è il sup dell'int. max. di esistenza.

Nell'esempio $T = \sqrt[4]{\frac{4}{5}}.$

In generale ci sono 3 possibilità

[1] $T = +\infty$ (cioè non ci sono problemi per t successivi a t_0)
Si dice che la soluzione ha ESISTENZA GLOBALE nel futuro.

[2] $T < +\infty$. Si dice che la soluzione MUORE al tempo T .

[2.1] Si dice che si ha BLOW-UP al tempo T se

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = \pm \infty \quad (\text{come nell'esempio})$$

2.2 Si dice che si ha BREAK-DOWN al tempo T se non si ha blow-up, ma

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u'(t) = \pm \infty$$

(Volendo: BREAK-DOWN = blow-up della derivata)

— 0 — 0 —

Esempio 2
$$\begin{cases} u' = t^3 u^2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Fasi 1, 2, 3 come prima e portano alla solus. gen.

$$u(t) = -\frac{4}{t^4 + C}$$

4. DET. C Impongo $u(0) = 0$

$$\overset{0}{-\frac{4}{C}} = \overset{0}{0} \leadsto \text{Non riesco a trovare } C.$$

N.B. Per il teo. di esistenza e unicità la soluzione DEVE esistere ed essere unica

In questo caso la soluzione è la funzione costante $u(t) \equiv 0$, come si verifica banalmente.

Più in generale, quando abbiamo il pb. di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t) \cdot g(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Se $g(u_0) = 0$, allora la soluzione è la funzione costante $u(t) \equiv u_0$.

Perché funziona il metodo 1, 2, 3.

$$u'(t) = u^2(t) \cdot t^3. \quad \text{Divido per } u^2(t):$$

$$\frac{u'(t)}{u^2(t)} = t^3.$$

Integro tra 0 e T rispetto a t
 $\uparrow$
istante iniziale

$$\int_0^T \frac{u'(t)}{u^2(t)} dt = \int_0^T t^3 dt$$

A destra ottengo $\int_0^T t^3 dt = \frac{T^4}{4}$

A sinistra: $\int_0^T \frac{u'(t)}{u^2(t)} dt =$

$$= \int_{u_0}^{u(T)} \frac{dy}{y^2} = \left[-\frac{1}{y} \right]_{y=u_0}^{y=u(T)}$$

$$= -\frac{1}{u(T)} + \frac{1}{u_0}$$

Pongo $y = u(t)$

$$\Rightarrow dy = u'(t) dt$$

Quando $t=0$ ho che

$$y = u(0) = u_0 \text{ (condiz. iniziale)}$$

Quando $t=T$ ho che

$$y = u(T)$$

Poichè gli integrali a dx e su devono essere uguali, avremo

$$-\frac{1}{u(T)} + \frac{1}{u_0} = \frac{T^4}{4}, \text{ da cui si può ricavare } u(T) \text{ in funzione di } T.$$

Un po' brutale è aver diviso per $u^2(t)$.

* Se $u(0) \neq 0$, allora $u(t) \neq 0$ per t piccoli, quindi ha senso dividere, almeno per valori piccoli di t .

* Se $u(0) = 0$, allora di sicuro non si può dividere (e per questo motivo in questo caso non si trova la soluz.!).

Esempio 3 $\begin{cases} u' = -\frac{t^2}{u} \\ u(0) = 4 \end{cases}$ ① SEPARARE:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{t^2}{u}$$

$$u du = -t^2 dt$$

② INTEGRARE

$$\int u du = -\int t^2 dt$$

$$\frac{u^2}{2} = -\frac{t^3}{3} + C$$

③ RICAVARE $\frac{u^2}{2} = -\frac{t^3 + C}{3} \leftarrow$ solito discorso sul C

$$u^2 = -\frac{2}{3}(t^3 + C)$$

$$u(t) = \pm \sqrt{-\frac{2}{3}(t^3 + C)}$$

SOLUZ. GENERALE

④ DETERMINARE C . Impongo $u(0) = 4$

$$u(0) = + \sqrt{-\frac{2}{3}C} = 4 \Rightarrow -\frac{2}{3}C = 16$$

$$\Rightarrow C = -\frac{16 \cdot 3}{2} = -24$$

Ho scelto il
+ perché deve
venire 4

La soluzione del problema di
Cauchy è

$$u(t) = \sqrt{-\frac{2}{3}(t^3 - 24)} = \sqrt{-\frac{2}{3}t^3 + 16}$$

$$u(t) = \sqrt{16 - \frac{2}{3}t^3}$$

⑤ VERIFICARE : la cond. iniz. è facile $u(0) = \sqrt{16} = 4$
Eq. → Esercizio

⑥ STUDIARE : $u(t)$ è definita quando $16 - \frac{2}{3}t^3 \geq 0$

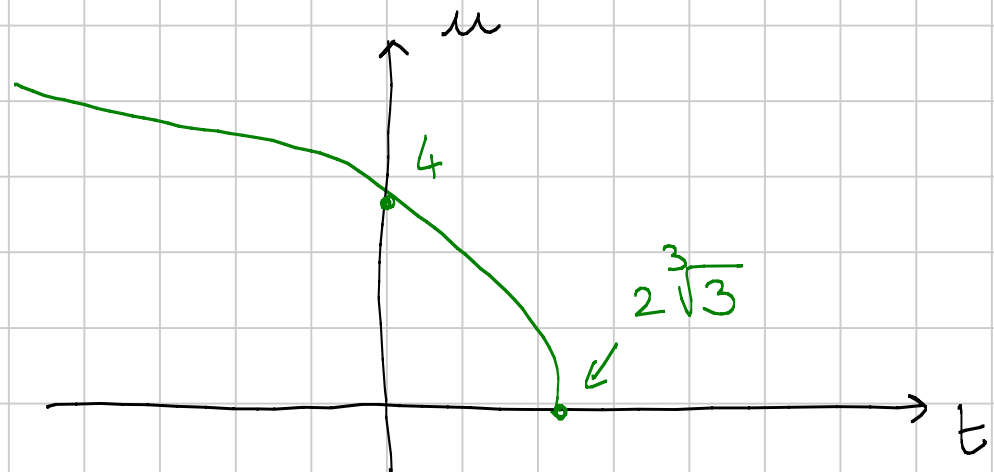
$$16 \geq \frac{2}{3}t^3 ; \quad \frac{t^3}{3} \leq 8 ; \quad t^3 \leq 24 \Rightarrow t \leq \sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}.$$

Intervallo massimale di esistenza: $(-\infty, 2\sqrt[3]{3}]$

Tempo di vita: $T = 2\sqrt[3]{3}$

Non c'è blow-up, ma

break-down



$$\lim_{t \rightarrow 2\sqrt[3]{3}^-} u(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 2\sqrt[3]{3}^-} u'(t) = \lim_{t \rightarrow \dots} \frac{1}{2\sqrt{16 - \frac{2}{3}t^3}} \cdot (-2t^2) = -\infty$$

$$u'(0) = -\frac{0}{4} = 0$$

$$u'(t) = -\frac{t^2}{u}$$

⇓

u' sempre
negativa

