

Esempio 1 $u' = u$ Una soluzione è $u(t) = e^t$

$u(t) = e^t + c$ per $c \neq 0$ NON è una soluzione

$$u'(t) = e^t \neq u(t).$$

Un'altra soluzione è $u(t) = 2e^t$. Verifica

$$u'(t) = 2e^t = u(t)$$

In generale $u(t) = ce^t$ è una soluzione per ogni $c \in \mathbb{R}$.
Le soluzioni sono infinite. Si potrebbe dimostrare che non ce ne sono altre.

Esempio 2 $u'' = -u$

Una soluz. è $u(t) = \sin t$

Un'altra soluz. è $u(t) = \cos t$

In generale $u(t) = a \sin t + b \cos t$ è una soluzione per ogni valore dei parametri $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.

$$u'(t) = a \cos t - b \sin t, \quad u''(t) = -a \sin t - b \cos t = -u(t)$$

Si potrebbe dimostrare che non ce ne sono altre

Esempio 3 $u' = -u^2$ Una soluz. è $u(t) = \frac{1}{t}$

Verifica: $u'(t) = -\frac{1}{t^2} = -[u(t)]^2$

$u(t) = \frac{c}{t}$ è soluzione?

$$u'(t) = -\frac{c}{t^2} \stackrel{?}{=} -u^2(t) = -\frac{c^2}{t^2}$$

sono uguali $\Leftrightarrow c^2 = c \Leftrightarrow c = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$

Per ogni valore del parametro $c \in \mathbb{R}$ si ha che $u(t) = \frac{1}{t+c}$

è soluzione (e non ce ne sono altre)

Verifica: $u'(t) = -\frac{1}{(t+c)^2} = -u^2(t).$

In generale

un'eq. diff. ha infinite soluzioni dipendenti da un numero di parametri uguale all'ordine dell'eq.

PROBLEMA + CAUCHY

→ Equazione differenziale +
CONDIZIONI INIZIALI DI
CAUCHY

Per un'eq. di ordine n le condizioni iniziali di Cauchy prevedono di assegnare il valore di u e di tutte le sue derivate fino alla $(n-1)$ -esima in uno stesso punto t_0 , detto istante iniziale. (In tutto sono n condizioni)

Esempi

$$\begin{cases} u'' + 3u' = t^2 + 1 \\ u(7) = 5 \\ u'(3) = 2 \end{cases}$$

NO: ho assegnato
 u e u' per
valori diversi
di t .

$$\begin{cases} u'' + 3u' = t^2 + 1 \\ u(7) = 5 \\ u''(7) = 5 \end{cases}$$

NO: dovevo
assegnare
 u e u'

$$\begin{cases} u'' + 3u' = t^2 + 1 \\ u(7) = 0 \\ u(5) = 0 \end{cases}$$

NO: dovevo
assegnare
 u e u'

$$\begin{cases} u'' + 3u' = t^2 + 1 \\ u(7) = 5 \\ u'(7) = 6 \end{cases}$$

OK.
($t_0 = 7$)

In generale il problema di CAUCHY per un'eq. diff. in forma normale di ordine n si presenta nella forma

$$\begin{cases} u^{(n)} = F(t, u, u', \dots, u^{(n-1)}) & \leftarrow \text{Eq. Diff.} \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1} \end{cases}$$

n condiz. INIZIALI
 $t_0, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ sono DATI

TEO. ESISTENZA E UNICITÀ

Consideriamo un problema di Cauchy con l'eq. in forma normale

Allora

- * se F è continua il problema ha almeno 1 soluzione (e talvolta anche + di una); ← ESISTENZA
- * se F è un po' meglio (ad esempio differenziabile) allora la soluzione è unica. ← UNICITÀ

Operativamente: la soluzione di un'eq. diff. di ordine n dipende da n parametri.
Le n condizioni iniziali nei casi decenti permettono di determinare univocamente il valore dei parametri.

EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

$$\begin{cases} u' = t^3 u^2 \\ u(0) = 5 \end{cases}$$

1. SEPARARE
2. INTEGRARE
3. RICAVARE

Trovare la soluz. gen.
dell'eq. con il parametro C
(FIN QUI SI USA SOLO
l'eq.)

4. DETERMINARE C
5. CONTROLLARE
6. STUDIARE

← SI USA COND. INIZIALE

1. **SEPARARE**

$$u' = t^3 u^2$$

$$\frac{du}{dt} = t^3 u^2$$

[Tutte le t a destra
futte le u a sinistra]

$$\frac{du}{u^2} = t^3 dt$$

2. **INTEGRARE**

a sinistra rispetto a u , a destra rispetto a t

$$\int \frac{du}{u^2} = \int t^3 dt ; -\frac{1}{u} = \frac{t^4}{4} + C \quad \leftarrow \text{parametro}$$

3. **RICAVARE** (u in funzione di t)

$$-\frac{1}{u} = \frac{t^4}{4} + C = \frac{t^4 + 4C}{4} \Rightarrow u = -\frac{4}{t^4 + 4C}$$

La soluzione generale è

$$u(t) = -\frac{4}{t^4 + C}$$

$C = 4C$, sempre una costante è

Si riesce sempre a trovare la soluz. generale a patto di

- * saper fare le primitive
- * saper ricavare.

4. **DETERMINARE C** (usando la condizione iniziale)

$$u(0) = 5 \Rightarrow -\frac{4}{C} = 5 \Rightarrow C = -\frac{4}{5}$$

↑ ho messo $t=0$ nella sol. gen.

La soluzione del problema di Cauchy è

$$u(t) = -\frac{4}{t^4 - \frac{4}{5}} = -\frac{20}{5t^4 - 4}$$

$$u(t) = \frac{20}{4 - 5t^4}$$

5. **CONTROLLARE** (che quella ottenuta al punto 4 sia la soluzione del problema)

Verifico cond. iniz. $u(0) = \frac{20}{4} = 5$. Der. denom.

Verifico l'eq.:

$$u'(t) = 20 \left(-\frac{1}{(4 - 5t^4)^2} \right) (-20t^3)$$

$$= \frac{20^2}{(4 - 5t^4)^2} \cdot t^3 = t^3 \cdot u^2(t) \quad \text{OK}$$