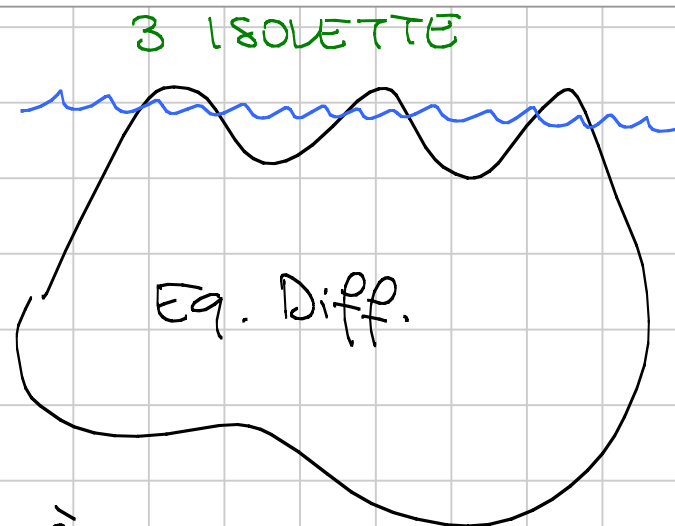


EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Eq. diff. = equazione in cui l'incognita è una funzione



→ Eq. Diff. **ORDINARIE**: l'incognita è una funzione di una variabile: $y(x)$, $y(t)$, $u(t)$

La funzione incognita $u(t)$ deve soddisfare una certa relazione che lega t , $u(t)$ e un po' di derivate della funzione u

Esempio $u'(t) + 3u(t) = t^2 + 1$

Risolvere l'eq. vuol dire trovare una funzione $u(t)$ che soddisfa la relazione per ogni t e insieme di defin. di u .

→ Eq. Diff. alle derivate parziali : u dipende da più variabili

(ad esempio $u(t, x, y)$) e la relazione coinvolge u e un po' delle sue derivate parziali

Esempio $u_t = u_{xx} + u_{yy}$

Noi vedremo solo eq. diff. ordinarie.

ORDINE DI UN'EQ. DIFF. È il massimo ordine di derivazione che compare nell'equazione

Esempio $u''(t) + 3u'(t) + [u(t)]^2 = \sin t \rightarrow \text{ORDINE 2}$
 $u'' + 3u' + u^2 = \sin t \leftarrow \text{NOTAZIONE RAPIDA}$

$[u'(t)]^2 + 2tu(t) = 0 \rightarrow \text{ORDINE 1}$
 $(u')^2 + 2tu = 0 \leftarrow \text{NOTAZIONE RAPIDA}$

Un'eq. diff. di ordine n si presenta nella forma

$$\Phi(t, u, u', u'', \dots, u^{(n)}) = 0$$

↑
funzione enorme che lega t , u e tutte le derivate di u fino alla n -esima.

Un'eq. diff. si dice **AUTONOMA** se la t compare solo come argomento della u e delle sue derivate,

$$u'(t) = 3u(t) + t^2 \quad \leftarrow \text{NON AUTON.} \quad u' = 3u + t^2$$

$$u'(t) = 3u^2(t) + 5 \quad \leftarrow \text{AUTONOMA} \quad u' = 3u^2 + 5$$

Oss. Autonomia $\Leftrightarrow$ in notazione rapida non compare la t .

Un'eq. diff. si dice IN FORMA NORMALE se la derivata di ordine max è ricavata rispetto al resto.

Esempi $u'' = 5u' + 7t \leftarrow \text{SI FORMA NORMALE}$

$(u'')^3 + 5u' - 10t^2 = 0 \leftarrow \text{NI FORMA NORMALE: non è in forma normale, ma si può portare ricavando } u''$

$u'' = \sqrt[3]{10t^2 - 5u'} \leftarrow \text{PORTATA in FORMA NORMALE}$

$(u'')^2 + 5u' - 10t^2 = 0 \leftarrow \text{NO forma normale e non ci si può fare nulla}$

$(u'')^2 = 10t^2 - 5u' \leftarrow \text{Non si può decidere univoc. il segno}$

In generale un'eq. diff. di ordine n in forma normale si presenta nella forma

$$u^{(n)} = F(t, u, u', \dots, u^{(n-1)})$$

non c'è se è AUTONOMA
— o — o —

Un'eq. diff. del 1° ORDINE in forma normale si dice a

VARIABILI SEPARABILI se il 2° membro è il prodotto di una

funzione della sola t per una funzione della sola u . Si presenta quindi nella forma

$$u' = f(t) \cdot g(u) \rightarrow 1^{\circ} \text{ ISOLA}$$

Esempio 1

$$u' = u \cdot \sin t$$

VAR. SEP. con
 $f(t) = \sin t$ e $g(u) = u$

Es. 2

$$u' + tu = t \quad \text{si può riscrivere come}$$

$$u' = t - tu = t(1-u)$$

VAR. SEP. con
 $f(t) = t$ e $g(u) = 1-u$

Es. 3

$$u' = u^4$$

VAR. SEP. con $g(u) = u^4$ e $f(t) \equiv 1$

Oss. Ogni equazione del 1° ordine in forma normale

AUTONOMA è a variabili separabili

$$u' = g(u) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ f(t)}}{1}$$

Un'eq. diff. di ORDINE qualunque si dice **LINEARE** se la u e le sue derivate compaiono "di primo grado", cioè se è della forma

$$a_n(t) u^{(n)} + a_{n-1}(t) u^{(n-1)} + \dots + a_1(t) u' + a_0(t) u = f(t)$$

Le funzioni $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_1(t), a_0(t)$ si dicono
COEFFICIENTI dell'eq.

Esempio 1

$$u'' + u' + t^2 u = 0 \quad \text{SI LINEARE}$$

$$u'' + u' + \cos t \cdot u = 0 \quad \text{SI LINEARE}$$

$$u'' + u' + t \cdot \cos u = 0 \quad \text{NO LINEARE}$$

$$u'' + u' + \cos(t \cdot u) = 0 \quad \text{NO LINEARE}$$

Un'eq. diff. del 1° ORDINE in forma NORMALE e LINEARE si può sempre portare nella forma

$$u' + a(t)u = b(t) \quad 2^a \text{ ISOLA}$$

Si dice che un'eq. diff. lineare è a COEFF. COSTANTI se i coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_n$ non dipendono da t e sono quindi numeri.

Si presenta nella forma

$$a_n u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = f(t) \quad 3^a \text{ ISOLA}$$

Un'eq. diff. lineare si dice OMOGENEA se $f(t) = 0$, altrimenti si dice non omogenea.

Domanda: lineare a coeff. cost. + autonoma $\Rightarrow$ ^{NO} omogenea ?

Esempio

$$u'' + 3u' + 5u = \boxed{7}$$

↑ $f(t)$

coeff. cost.
lineare, 2° ordine
non omogenea

Esempio

$$u' = t(1+u)$$

↘

$$u' - tu = t$$

1° ORDINE A VAR. SEP.

LINEARE 1° ORDINE

Esempio

$$u' = 7u$$

Var. sep.

$$u' - 7u = 0$$

lineare a coeff. costanti
omogenea autonoma