

MAT 1 TLC

ORA 87

Calcolo esplicito di $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_0^A e^{-x^2} dx}_{I_A}$

Passo in 2 variabili. Calcolo

$$\iint_{Q_A} e^{-x^2-y^2} dx dy =$$

$$= \int_0^A dx \int_0^A dy e^{-x^2-y^2} =$$

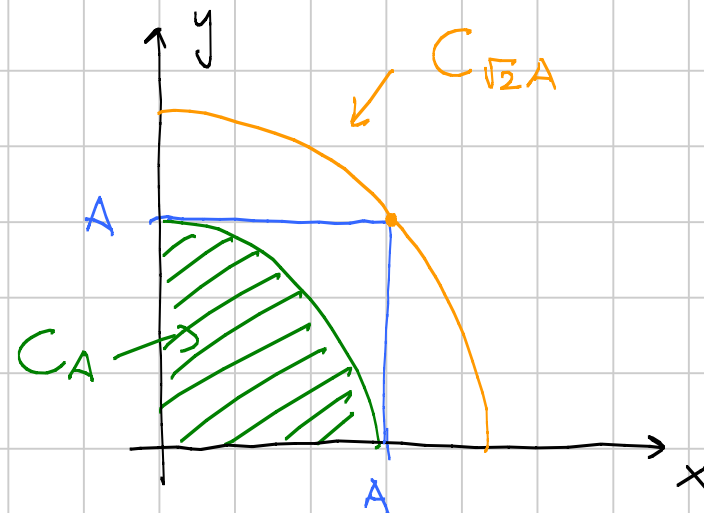
$$= \int_0^A dx \int_0^A dy \underbrace{e^{-x^2}}_{\text{circled}} \cdot e^{-y^2} = \int_0^A e^{-x^2} dx \underbrace{\int_0^A e^{-y^2} dy}_{I_A}$$

$$= I_A \underbrace{\int_0^A e^{-x^2} dx}_{I_A} = I_A^2$$



Abbiamo che

(essendo $e^{-x^2-y^2}$ una funzione
positiva)



$$\iint_{C_A} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{Q_A} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{C_{\sqrt{2}A}} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

" I_A^2

$$\iint_{C_A} e^{-x^2-y^2} dx dy = \underbrace{\int_0^A dp \int_0^{\pi/2} d\theta}_{C_A \text{ in coord. polari}} \underbrace{e^{-p^2}}_{e^{-x^2-y^2}} p dp =$$

pag.

$$\begin{aligned}
&= \int_0^A \rho e^{-\rho^2} d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^A \rho e^{-\rho^2} d\rho \\
&= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_{\rho=0}^{\rho=A} \\
&= \frac{\pi}{2} \left\{ -\frac{1}{2} e^{-A^2} + \frac{1}{2} \right\}
\end{aligned}$$

Cosa succede quando $A \rightarrow +\infty$?

$$\iint_{C_A} \dots = \frac{\pi}{2} \left\{ -\frac{1}{2} e^{-A^2} + \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

$$\iint_{C_{\sqrt{2}A}} = \frac{\pi}{2} \left\{ -\frac{1}{2} e^{-2A^2} + \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

$$\iint_{Q_A} \dots = I_A^2 \rightarrow \left[\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right]^2 = I^2$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \boxed{\iint_{C_A} e^{-x^2-y^2} dx dy} & \leq & \boxed{\iint_{Q_A} e^{-x^2-y^2} dx dy} & \leq & \boxed{\iint_{C_{\sqrt{2}A}} e^{-x^2-y^2} dx dy} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \frac{\pi}{4} & & I^2 & & \frac{\pi}{4}
 \end{array}$$

Per i carabiniere si ha che $I^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2I = \sqrt{\pi}$$

— 0 — 0 —

CRITERIO SERIE $\leftrightarrow$ INTEGRALI

1ª PARTE: GLI INTEGRALI AIUTANO LE SERIE

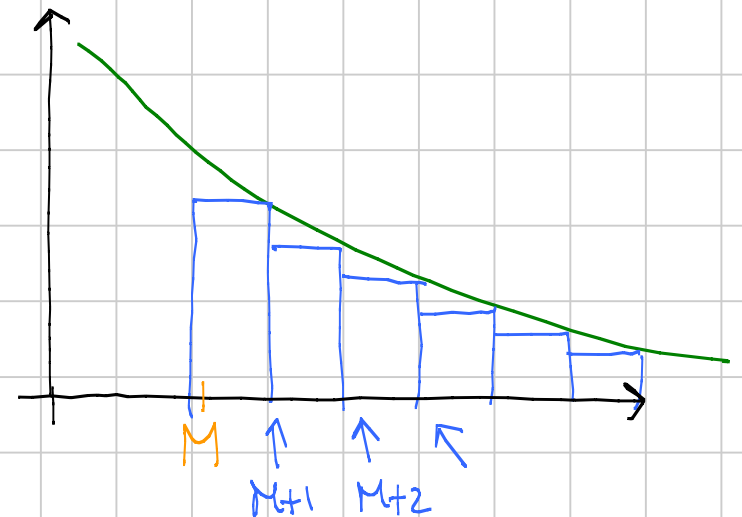
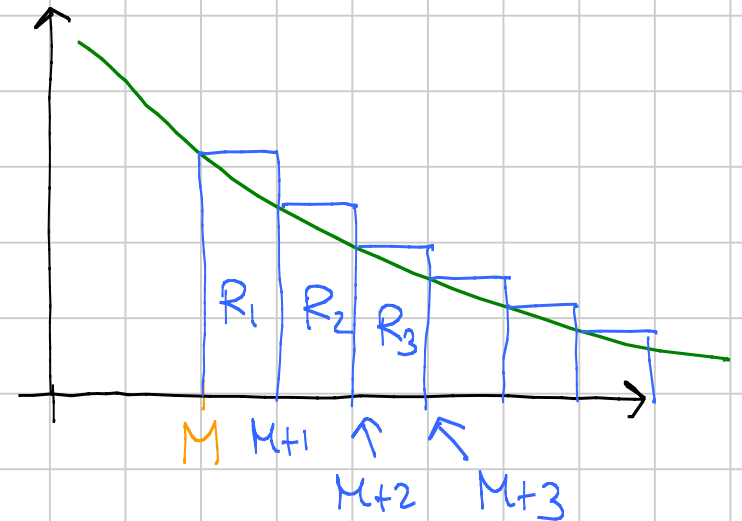
Sia M un intero. Sia

$f: [M, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione

- positiva: $f(x) > 0$
- debolmente decrescente

1ª figura:

$$\int_M^{+\infty} f(x) dx \leq \text{somma aree dei rettangoli}$$
$$= \sum_{n=M}^{+\infty} f(n)$$



R_1 ha base 1 e altezza $f(M) \rightarrow$ area $f(M)$

R_2 " " " " $f(M+1) \rightarrow$ area $f(M+1)$ e così via

2ª figura

$$\int_M^{+\infty} f(x) dx \geq \text{somma aree dei rettangoli}$$

$$= f(M+1) + f(M+2) + \dots$$

$$= \sum_{n=M+1}^{\infty} f(n)$$

Conclusione

$$\sum_{n=M+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_M^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=M}^{+\infty} f(n)$$

CRITERIO CONFRONTO SERIE INTEGRALI

Se f è positiva e deb. decr., allora

$$\int_M^{+\infty} f(x) dx \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=M}^{+\infty} \text{converge}$$

Applicazione:

$$\text{la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx \text{ converge}$$

Noi sappiamo quando l'integrale converge (fatto con la primitiva) quindi deduciamo quando la serie converge.

2ª parte LE SERIE AIUTANO GLI INTEGRALI

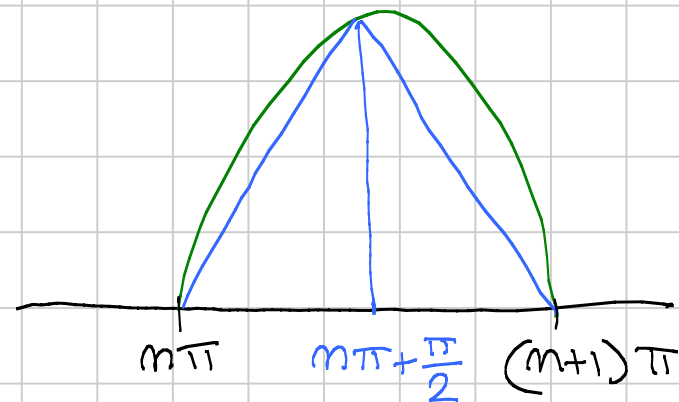
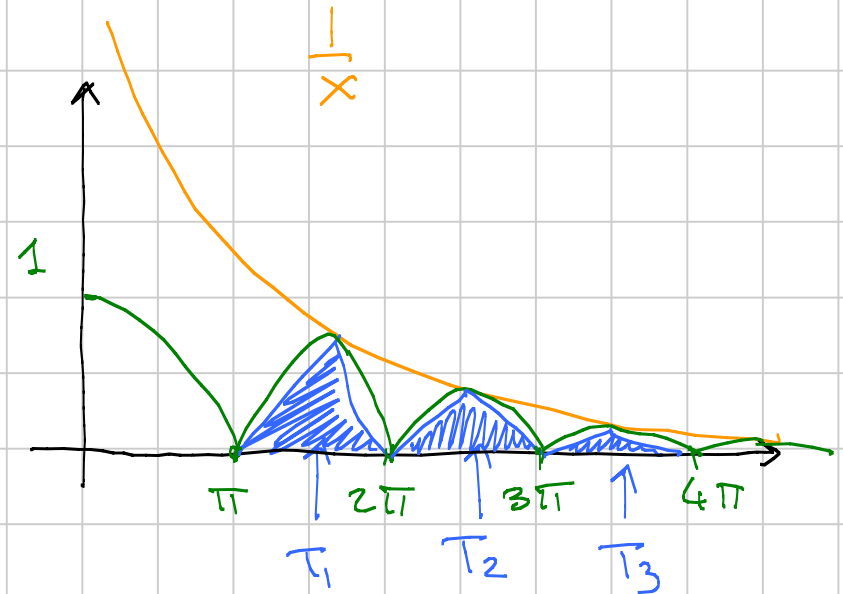
METODO DEI TRIANGOLINI

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \text{somma aree dei triangolini}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n)$$

Base di T_n = segmento $[n\pi, (n+1)\pi]$
 $\Rightarrow$ lunghezza = π

Altezza di T_n = valore della funzione
nel p.to di mezzo

$$= \frac{|\sin(n\pi + \frac{\pi}{2})|}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$$



$$= \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Area}(T_n) = \frac{1}{2} \text{base} \cdot \text{altezza} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

↖ Diverge perché si comporta come $\sum \frac{1}{n}$

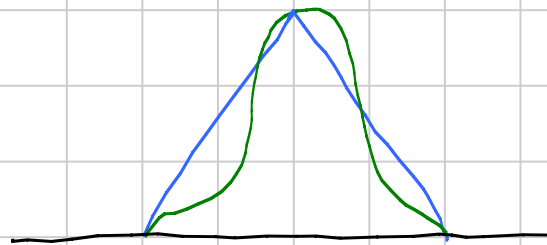
⇒ l'int. improprio diverge

È vero che il vertice del Δ è il p.to di max della funzione nell'intervallo? NO!!!!

Basta fare la derivata e vedere che in mezzo non si annulla



Per usare i triangolini dovei accertarmi che le cose non stiano così



Esercizio: provare a fare lo stesso con

$$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx = +\infty$$