

Integrali impropri : trucco dell' int. per parti

Esempio $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

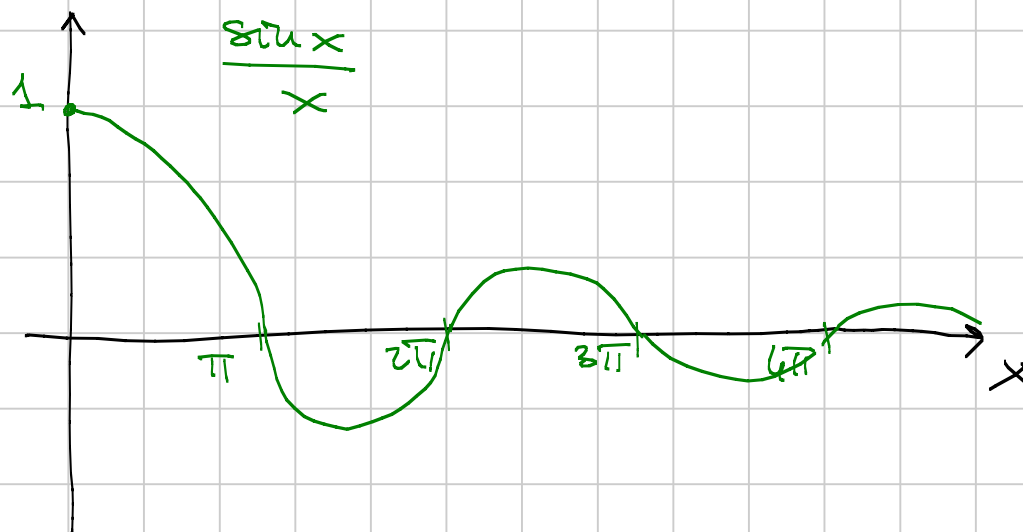
Unico problema è a $+\infty$,
perché per $x \rightarrow 0^+$ l'integranda
tende a 1.

Verrebbe da usare
l'assoluta conv.

$$\frac{|\sin x|}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$\int \frac{1}{x} dx$ con problema
a $+\infty$ diverge

$\Downarrow$
BOH



$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx}_{\text{integrale proprio (numero)}} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

integrale proprio
(numero)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ si comporta come } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \stackrel{\text{DEF.}}{=} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x} \cdot \sin x dx =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \left[\frac{1}{x} (-\cos x) \right]_{x=1}^{x=A} - \int_1^A \left(-\frac{1}{x^2} \right) (-\cos x) dx \right\}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{-\frac{\cos A}{A}}_{\substack{G \\ \downarrow 0}} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx \right\}$$

$$= \frac{\cos 1}{1} - \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx = \frac{\cos 1}{1} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx}_{\text{NUMERO}}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ converge. Infatti

$\int \frac{1}{x^2} dx$ con problema a $+\infty$ converge

$$\Downarrow \quad 0 \leq \frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} + \text{confronto}$$

$\int \frac{|\cos x|}{x^2} dx$ con problema a $+\infty$ converge

$\Downarrow$ Assoluta integrabilità

$\int \frac{\cos x}{x^2} dx$ con problema a $+\infty$ converge

NOTA BENE: $\int_0^1 \frac{\cos x}{x^2} dx$ DIVERGE A $+\infty$

Infatti: l'integranda è positiva per $x \sim 0$. Applico C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^2}$

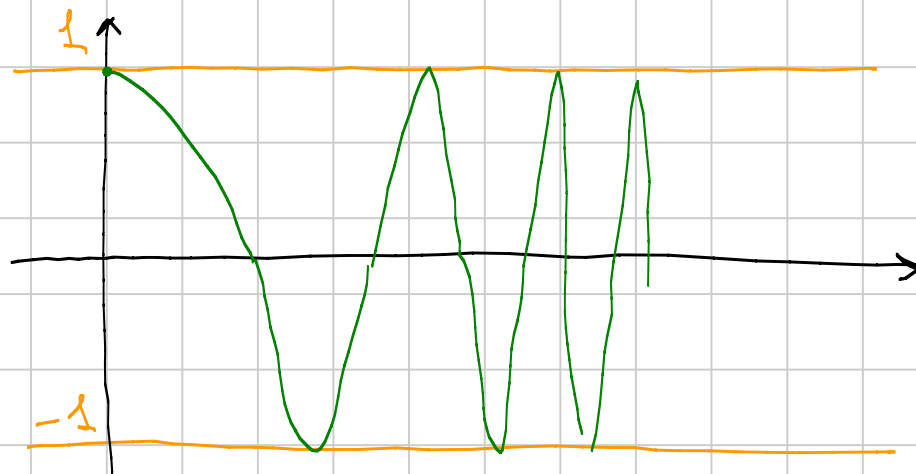
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x^2} \cdot x^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi $\int \frac{\cos x}{x^2} dx$ con problema in $x=0$ si comporta come

$\int \frac{1}{x^2} dx$ con problema in $x=0$, dunque diverge.
— 0 — 0 —

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$

NOTA BENE: l'integranda non tende a zero per $x \rightarrow +\infty$



$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ si comporta come $\int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx$

$$\int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx \stackrel{\text{DEF.}}{=} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \cos x^2 dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \underbrace{\frac{1}{2x}}_G \cdot \underbrace{2x \cos(x^2)}_F dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{\left[\frac{1}{2x} \cdot \sin(x^2) \right]}_{GF} \bigg|_{x=1}^{x=A} - \int_1^A \underbrace{\left(-\frac{1}{2x^2} \right)}_g \underbrace{\sin(x^2)}_F dx \right\}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{\sin A^2}{2A} - \frac{\sin(1)}{2} + \int_1^A \frac{\sin(x^2)}{2x^2} dx \right\}$$

$$= -\frac{\sin(1)}{2} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{2x^2} dx}_{\text{converge}} \Rightarrow \text{quello iniz. conv.}$$

$$\int \frac{dx}{x^2} \text{ con pb. a } +\infty \text{ conv.} \Rightarrow \int \frac{|\sin(x^2)|}{x^2} dx \text{ con pb. a } +\infty \text{ conv.}$$

↑
confronto

↓ ← Assol. int.

$$\int \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx \text{ con prob. a } +\infty \text{ conv.}$$

— o — o —

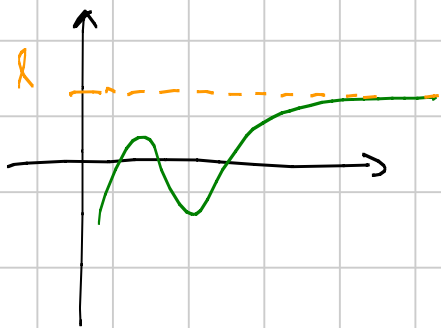
Nello stesso modo si mostra che $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ converge

Osservazione 1 Non vale l'analogo della condizione nec. per le serie.

Può succedere che $f(x)$ non abbia limite per $x \rightarrow +\infty$ ma

$$\int f(x) dx \text{ con pb. a } +\infty \text{ converga.}$$

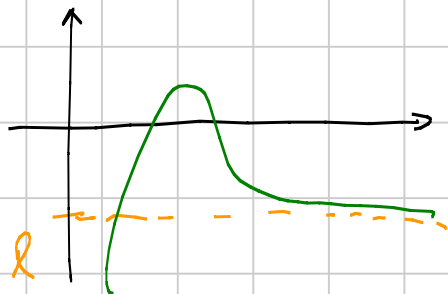
Osservazione 2 È comunque vero che se $f(x) \rightarrow l > 0$ per



$x \rightarrow +\infty$, allora

$\int f(x) dx$ con pb. a $+\infty$ diverge a $+\infty$

e se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l < 0$, allora



$\int f(x) dx$ con pb. a $+\infty$ diverge a $-\infty$

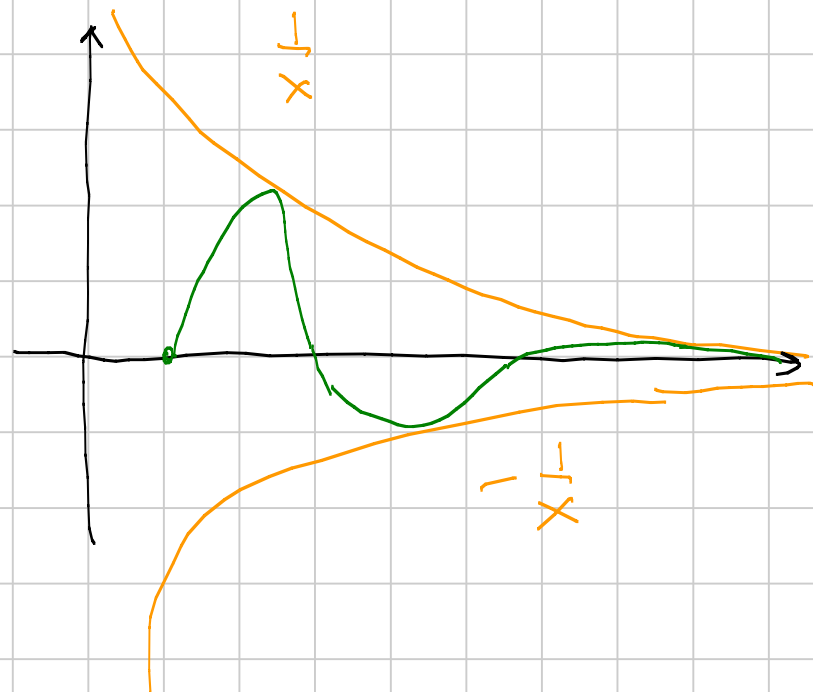
— o — o —

Esempio 3

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\log x)}{x} dx$$

Si annulla dove $\sin(\log x) = 0$,
cioè dove $\log x = n\pi$, cioè dove

$$x = e^{n\pi}$$

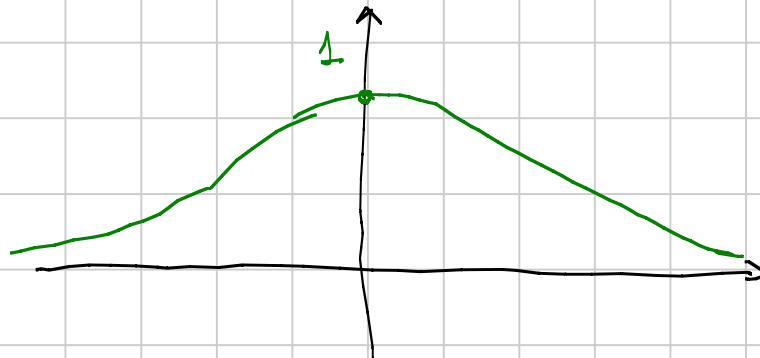


$$\begin{aligned}
 \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\log x)}{x} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\sin(\log x)}{x} dx = \\
 &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\cos(\log x) \right]_{x=1}^{x=A} \\
 &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{-\cos(\log A)}_{\text{oscilla tra } -1 \text{ e } 1} + 0 \right\} = \text{N.E.}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ l'integrale è indeterminato.

Esempio 4 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2I$

$$\int_0^{+\infty} = \int_{-\infty}^0$$



$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge. Perché?

Ad esempio per C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^8}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x^8}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^8}{e^{x^2}} = 0$$

CASO
↑ LIMITE

[Quindi $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$ per x grandi, quindi $f(x) \leq g(x)$ per x grandi]

$\int g(x) dx$ con problema a $+\infty$ converge $\Rightarrow \int e^{-x^2}$ con pb. a $+\infty$ converge