

INTEGRALI TRIPLI1. NOTAZIONI $A \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ limitata

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$$

$$\int_A f(x, y, z) dx dy dz$$

2/3. SIGNIFICATO GEOMETRICO / FISICO E DEF.

A = solido nello spazio $f(x, y, z) > 0$ e rappresenta la densità del materiale di cui è composto il solido (eventualmente varia da punto a punto)

Obiettivo: calcolare il peso del solido

Caso banale: solido A è un parallelepipedo con lati paralleli agli assi $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$

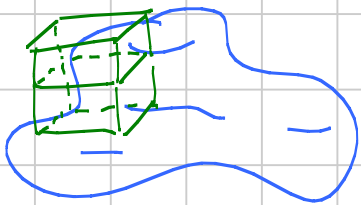
$$f(x, y, z) = \text{costante } \lambda \text{ su tutto } A.$$

$$\begin{aligned} \text{Peso} &= \text{Volume}(A) \cdot \lambda \\ &= (b-a)(d-c)(f-e) \cdot \lambda \end{aligned}$$

Caso semi-banale: solido A = unione di "mattoni" (parallelepipedi) su ciascuno dei quali la densità è costante,

$$\text{Peso} = \text{somma dei pesi dei singoli mattoni}$$

Caso generale: A = limitato qualunque
 $f(x, y, z)$ = funzione limitata qualunque



Si suddivide il solido in tanti mattoncini
Si suppone la densità costante in ogni matton.

Si calcola un'approssimazione del peso sommando i pesi dei singoli mattoni.

L'approssimazione risulta

* per eccesso se su ogni mattone ho preso densità costante $\geq$ densità vera, e l'unione di tutti i mattoni contiene il solido

* per difetto nel caso opposto

Se l'approssimazione dal basso e dall'alto al limite convergono allo stesso valore questo è per definizione il peso del solido

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

4. TECNICHE DI CALCOLO : Formule di riduzione

$$3 = 1 + 1 + 1$$

$$3 = 2 + 1$$

$$3 = 1 + 2$$

Formula di riduzione sui parallelepipedi

$$A = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \quad f = \text{qualsunque}$$

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz \quad f(x, y, z)$$

Posso avere 6 formule diverse a seconda
dell'ordine in cui integro rispetto alle
3 variabili

Esempio $A = [0, 1] \times [0, 2] \times [1, 4]$

$$\iiint_A yz e^x dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_1^4 dz \quad yz e^x =$$

$$= \int_0^1 e^x dx \int_0^2 y dy \int_1^4 z dz$$

$$= \int_0^1 e^x dx \int_0^2 y dy \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=1}^{z=4} =$$

$$= \frac{15}{2} \int_0^1 e^x dx \int_0^2 y dy = \frac{15}{2} \int_0^1 e^x dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2}$$

$$= 15 \int_0^1 e^x dx = 15 [e^x]_{x=0}^{x=1} = 15(e-1).$$

— 0 — 0 — 0 —

Esempio 2 $A = [0, 1] \times [-1, 1] \times [0, 2]$

$$\iiint_A e^{xz} dx dy dz = \int_0^1 dx \int_{-1}^1 dy \int_0^2 dz e^{xz} \quad \text{oppure}$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 dz \int_{-1}^1 dy \, e^{xz} = \int_0^1 dx \int_0^2 dz \, e^{xz} \underbrace{\int_{-1}^1 dy}_{\text{lung. interv.} = 2}$$

$$= 2 \int_0^1 dx \int_0^2 dz \, e^{xz} =$$

$$= 2 \int_0^1 dx \left[\frac{e^{xz}}{x} \right]_{z=0}^{z=2} = 2 \int_0^1 \left(\frac{e^{2x}}{x} - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= 2 \int_0^1 \underbrace{\frac{e^{2x}-1}{x}}_{\substack{\text{tende a 2 per} \\ x \rightarrow 0, \text{ quindi} \\ \text{l'integrale NON è improprio}}} dx = \text{La primitiva penso che non venga}$$

tende a 2 per
 $x \rightarrow 0$, quindi

l'integrale NON è improprio

INSIEMI NORMALI (rispetto al piano base xy)

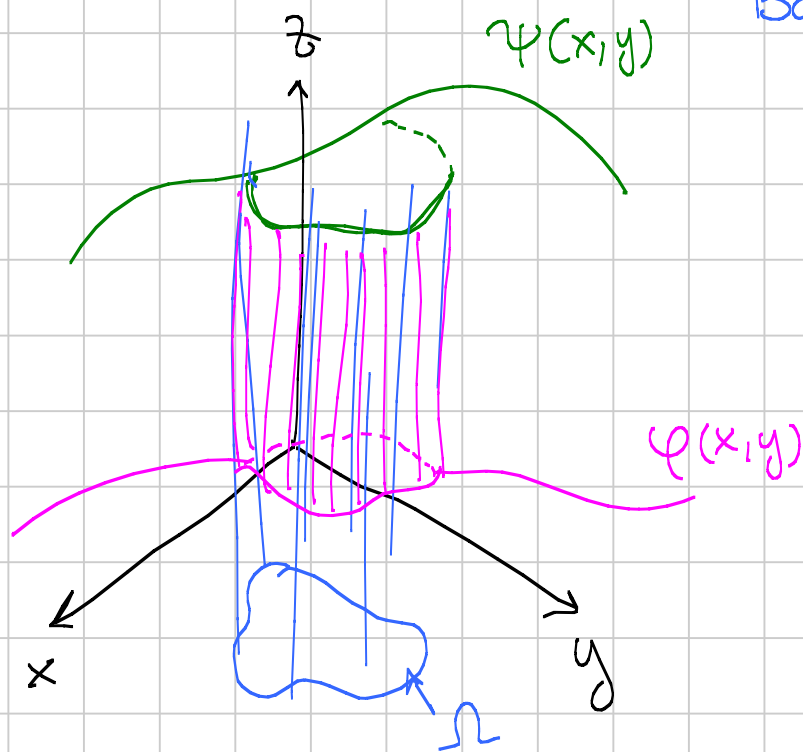
Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ è normale rispetto al piano xy se è della forma

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (x, y) \in \Omega, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y) \}$$

Base

tappo basso

tappo alto



$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \leftarrow$ piano base

Brutalmente: A è una "attiva"
di cui $\psi(x, y)$ rappresenta il
tappo e $\varphi(x, y)$ rappresenta il
fondo

Formula di riduzione su insiemi normali:

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} dz f(x,y,z)$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER COLONNE

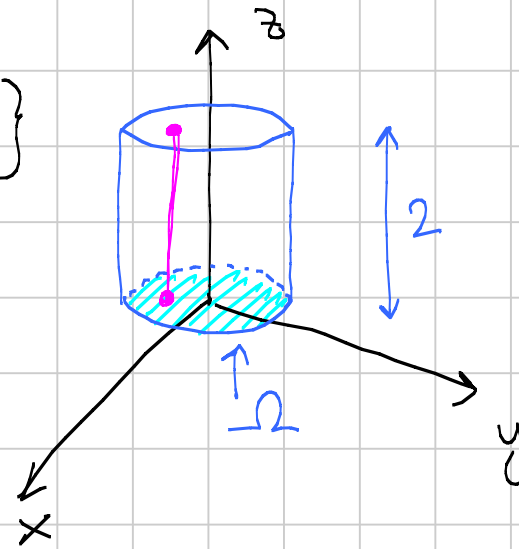
Idea: su ogni punto (x,y) della base Ω fissiamo la retta $\perp$ al piano base. Tale retta interseca l'insieme A in un segmento di estremi $\varphi(x,y)$ e $\psi(x,y)$. Questo segmento è la COLONNA su (x,y) .

Esempio A = cilindro che ha come base il cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 1 e altezza = 2.

$$\iiint_A z dx dy dz =$$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, 0 \leq z \leq 2\}$$

cerchio nel
piano



colonne

$$\downarrow \iint_{\Omega} dx dy \int_0^2 dz \cdot z = \iint_{\Omega} dx dy \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=2}$$

$$= 2 \iint_{\Omega} dx dy = 2 \text{Area}(\Omega)$$

$$= 2\pi.$$