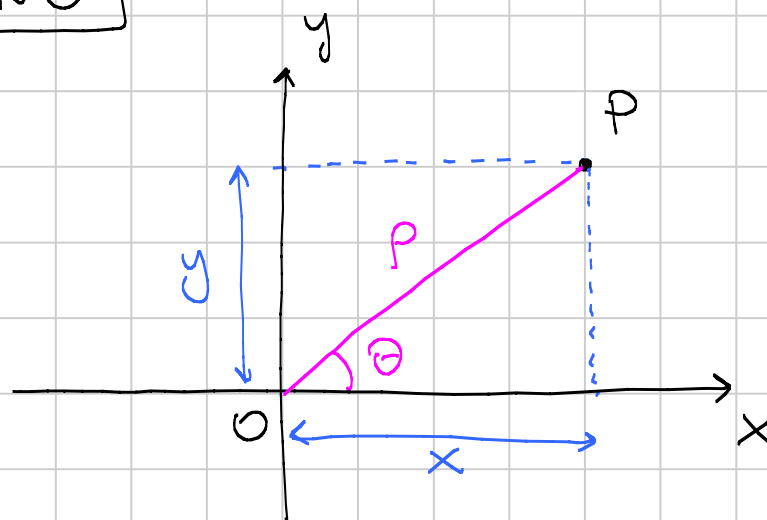


COORDINATE POLARI NEL PIANO

Un punto P nel piano si può identificare tramite le sue coord. cartesiane (x, y) oppure tramite le sue coord. polari ρ e θ



ρ = distanza di P dall'origine

θ = angolo tra semiasse positivo delle x e OP , contato in senso antiorario

$\rho \geq 0$ θ = angolo definito a meno di multipli di 2π

Caso particolare: se P è nell'origine, allora $\rho = 0$ e θ non è definito.

FORMULE DI PASSAGGIO

Se conosco ρ e θ posso calcolare x e y mediante

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

Se conosco x e y posso calcolare

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Per θ la situazione è più delicata.

Apparentemente

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

Niiii - - -

Intanto servirebbe $x \neq 0$ per poter dividere. Il grosso problema è che la formula vale solo nel I e IV quadrante.

Esempio $P = (-1, 0)$ Se uso la formula

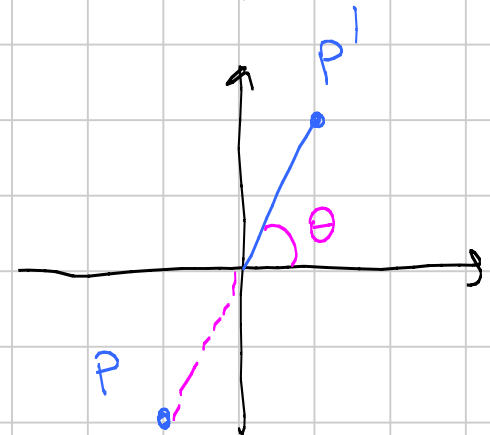
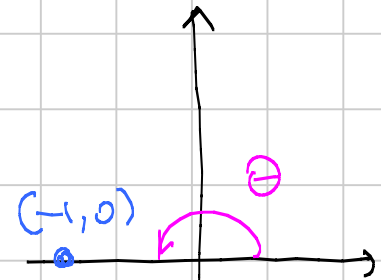
$$\theta = \arctan \frac{0}{(-1)} = \arctan 0 = 0$$

Invece $\theta = \pi$!!!

In generale, se P sta nel II o III quadrante la formula restituisce il θ del simmetrico di P rispetto all'origine.

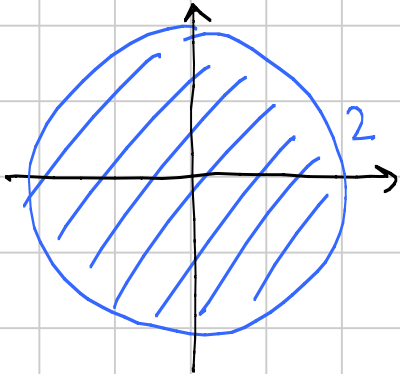
Volendo usare la formula, se P è nel II o III quadrante occorre aggiungere π .

CONSIGLIO: meglio non usare formule, ma guardare il disegno.



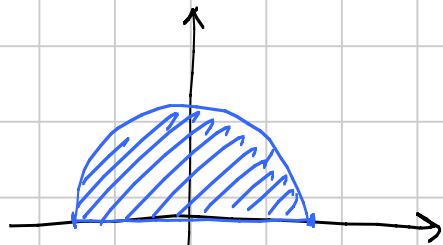
DESCRIZIONE DI INSIEMI DEL PIANO MEDIANTE COORD. POLAR)

Esempi



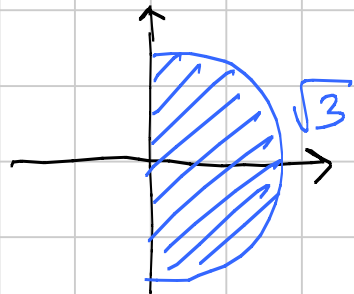
Descr. cart. : $x^2 + y^2 \leq 4$

Descr. polare : $\rho \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi]$



Descr. cartesiana : $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$

Descr. polare : $\rho \in [0, 1], \theta \in [0, \pi]$



Descr. cartesiana : $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0$

Descr. polare : $\rho \in [0, 1], \theta \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ NOO
OOOO!!

Giusta: $\Theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

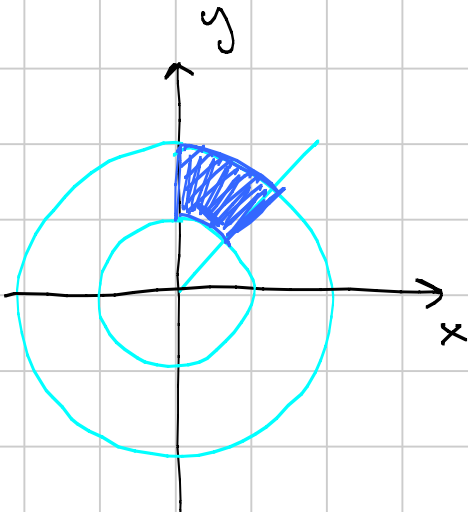
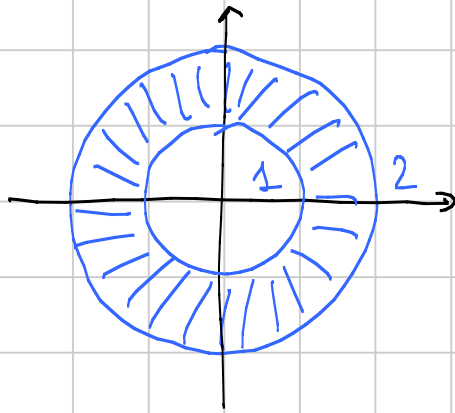
oppure $\Theta \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$

Fuori dal cerchio
piccolo

Dentro cerchio
grande

Descr. cart.: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

Descr. polare: $\rho \in [1, 2], \Theta \in [0, 2\pi]$



Descr. cartesiana: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,$
 $x \geq 0, y \geq x$

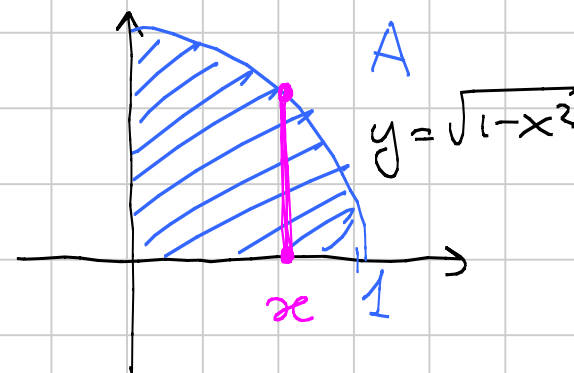
Descr. polare: $\rho \in [1, 2], \Theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

INTEGRALI IN COORD POLARI

$$\iint_A x \, dx \, dy$$

L'insieme A è normale (ad esempio) rispetto all'asse x :

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \}$$

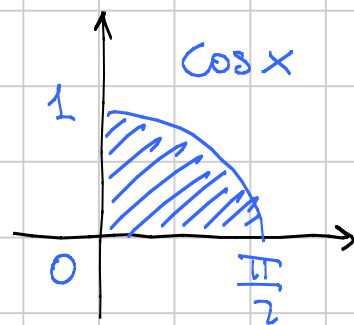
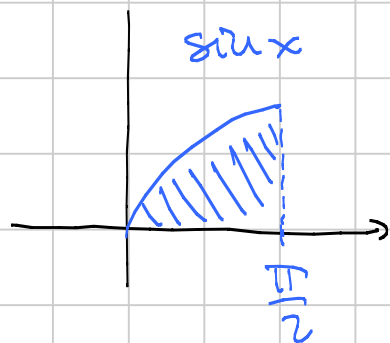


In alternativa, si possono usare le coord. polari, nelle quali A si descrive come $\rho \in [0, 1], \theta \in [0, \pi/2]$.

$$\iint_A x \, dx \, dy = \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \quad \underbrace{\rho \cos \theta}_{\substack{x \text{ in} \\ \text{coord.} \\ \text{polari}}} \cdot \underbrace{\rho}_{\text{pagaumento}} =$$

Descrizione di
 A in coord. polari

$$= \int_0^1 dp \int_0^{\pi/2} d\theta \quad \textcircled{p^2 \cdot \cos\theta} = \int_0^1 p^2 dp \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta}_1$$



Tutti questi valgono 1

$$= \int_0^1 p^2 dp = \left[\frac{p^3}{3} \right]_{p=0}^{p=1} = \frac{1}{3}$$

In generale :

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B$$

↑
Descrizione di
A in coord. polari

$$f(\underbrace{p \cos \theta}_{\uparrow} , \underbrace{p \sin \theta}_{\uparrow})$$

funzione in
coord. polari

$$\underbrace{p}_{\uparrow} dp d\theta$$

pag.

Esempio 2

A = cerchio con centro in (0,0) e raggio 2

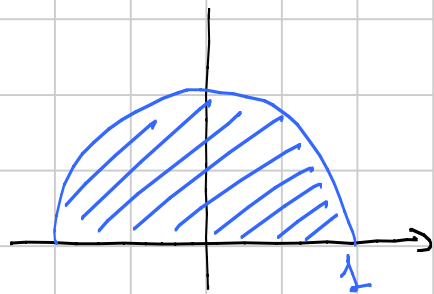
$$\iint_A (x^2 + y^2) dx dy = \underbrace{\int_0^2 dp \int_0^{2\pi} d\theta}_{\substack{\text{A in coord.} \\ \text{polari}}} \quad \begin{array}{c} \rho^2 \\ \uparrow \\ x^2 + y^2 \text{ in} \\ \text{coord. pol.} \end{array} \quad \begin{array}{c} \rho \\ \uparrow \\ \text{rag.} \end{array}$$

$$= \int_0^2 dp \int_0^{2\pi} \rho^3 d\theta = \int_0^2 \rho^3 dp \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi}$$

$$= 2\pi \int_0^2 \rho^3 dp = \dots$$

— o — o —

Esempio 3



$$\iint_A x dx dy = 0 \quad (\text{SIMMETRIA!!!!})$$

$$\iint_A y dx dy = \int_0^1 dp \int_0^{\pi} d\theta \quad \begin{array}{c} \rho \sin \theta \\ \underbrace{}_y \end{array} \quad \begin{array}{c} \rho \\ \uparrow \\ \text{rag.} \end{array}$$

$$= \int_0^1 \rho^2 d\rho \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_2 = 2 \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{2}{3}.$$

N.B.,

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta = \left[-\cos \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$

$$= -\cos \pi - (-\cos 0)$$

$$= 1 + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$

