

Integrali in 2 VARIABILI

1. NOTAZIONI
2. SIGNIFICATO GEOMETRICO
3. "DEFINIZIONI"
4. TECNICHE DI CALCOLO

1. NOTAZIONI Integrali PROPRI in 2 variabili

2 ingredienti fondamentali

- zona di integrazione: insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ LIMITATO
- integranda: funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA
(cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x,y)| \leq M \quad \forall (x,y) \in A$)

$\iint_A f(x,y) dx dy$ ← integrale doppio di f sull'insieme A

Talvolta si abbrevia con $\int_A f(x,y) dx dy$

2. SIGNIFICATO GEOMETRICO

$\int_A f(x,y) dx dy = \text{Volume } \boxed{\text{con segno}}$ della parte di spazio

compresa tra il grafico di $f(x,y)$ e il piano base xy .

Con segno: le parti in cui $f(x,y) > 0$ contano con il segno $+$, quelle in cui $f(x,y) < 0$ con il segno $-$.

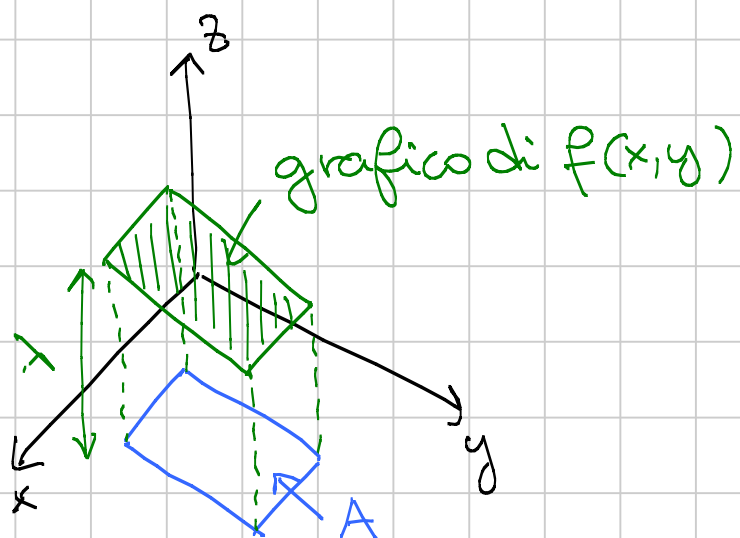
— o — o —

3. IDEA DELLA DEFINIZIONE

Caso banale: A = rettangolo con lati paralleli agli assi

$$A = [a, b] \times [c, d]$$

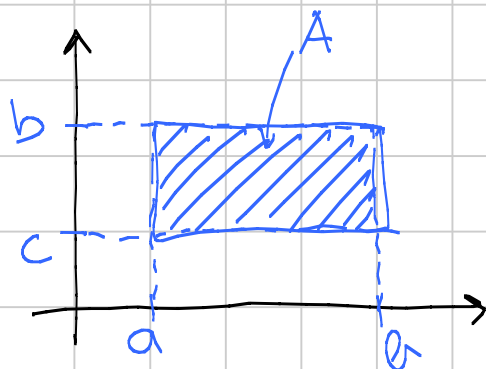
$f(x, y) = \text{costante } \lambda \text{ su tutto } A$



$\iint_A f(x,y) dx dy = \text{volume con segno}$
di un
parallelepipedo

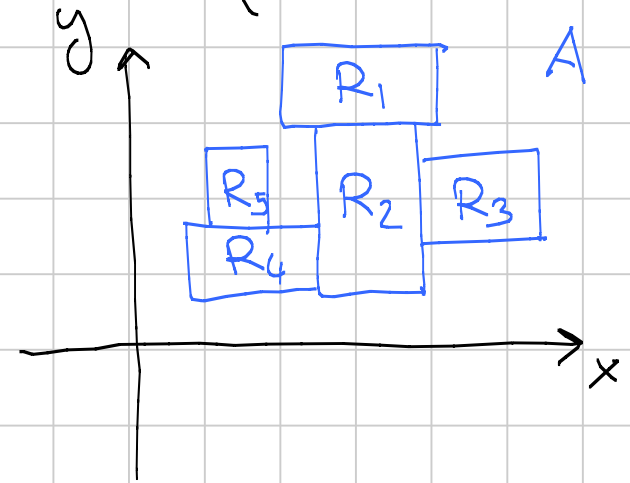
$$= \lambda \cdot \text{Area base} = \lambda \cdot (b-a)(d-c)$$

↑
da questo dipende
il segno



Caso semibanal : FUNZIONI A GRADINO (step functions)

A = unione finita di rettangoli
 $R_1, \dots, R_m$ con lati //
agli assi (che si possono
intersecare solo sul
bordo)



$f(x,y)$ = costante λ_i su ogni rettangolo R_i

$\iint_A f(x,y) dx dy$ = somma algebrica del volume con segno
dei vari parallelepipedi

$$= \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \text{Area}(R_i)$$

↑
altezza
"edificio"
← Area base

Caso generale : A = insieme limitato qualunque
 $f(x, y)$ = funzione limitata qualunque.

Si definisce l'INTEGRALE SUPERIORE $I^+(f; A)$ come

$$I^+(f; A) = \inf \left\{ \iint \varphi(x, y) dx dy : \varphi(x, y) \text{ è una qualunque funzione a gradienti t.c.} \right. \\ \left. \varphi(x, y) \geq f(x, y) \text{ per ogni } (x, y) \in A \right\}$$

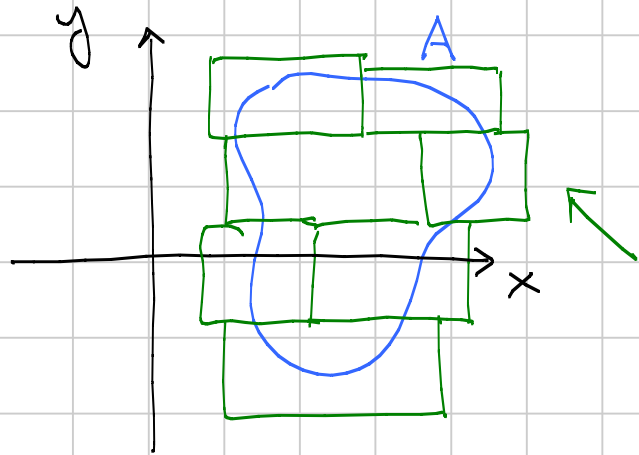
$\uparrow$
Nella zona in cui
è definita $\varphi(x, y)$

Analogamente si definisce l'integrale inferiore

$$I^-(f; A) = \sup \left\{ \iint \varphi(x, y) dx dy : \varphi(x, y) \text{ è --- t.c.} \right. \\ \left. \varphi(x, y) \leq f(x, y) \text{ per ogni } (x, y) \in A \right\}$$

$\uparrow$
come sopra

Come deve essere fatta la zona in cui è definita φ ?



Supponiamo $f(x,y) > 0$ in A .

possibile insieme di definizione di una funzione a gradini $\varphi(x,y)$ che sia $\geq f(x,y)$ in A .

Problema simile si ha con funzioni a gradino $\leq f(x,y)$ in A .

Differenza tra caso 1-dim. e 2-dim.: le funzioni a gradino non sfiorano solo in altezza, ma anche in larghezza.

SEMPRE

In generale si ha che $I^+(f; A) \geq I^-(f; A)$. Se sono uguali si dice che $f(x,y)$ è integrabile (secondo RIEMANN) in A e il valore comune è l'INTEGRALE

$$\iint_A f(x,y) dx dy.$$

Tutte le funzioni continue (e non solo) sono integrabili.

Aver supposto A ed $f(x,y)$ limitati assicura l'esistenza di funzioni a gradino $\geq f$ e $\leq f$.

4. TECNICHE DI CALCOLO

"Un integrale in dim 2 = 2 integrali in dim. 1"

FORMULA DI RIDUZIONE SUI RETTANGOLI

$A =$ rettangolo con lati // agli assi : $A = [a,b] \times [c,d]$
 $\downarrow$ x $\downarrow$ y

$f(x,y) =$ funzione limitata qualunque

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d dy f(x,y) = \int_c^d dy \int_a^b dx f(x,y)$$

Esempio 1

$$A = [0, 1] \times [0, 2]$$

$$f(x, y) = x^2 y$$

$$\iint_A x^2 y \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \, x^2 y = \int_0^1 dx \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} =$$

↑
primitiva di
 $x^2 y$ rispetto
alla variabile y

$$= \int_0^1 dx \left\{ x^2 \cdot \frac{4}{2} - 0 \right\} = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}$$

In alternativa:

↙
primitiva di $x^2 y$
risp. a x

$$\iint_A x^2 y \, dx \, dy = \int_0^2 dy \int_0^1 dx \, x^2 y = \int_0^2 dy \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \int_0^2 dy \left\{ \frac{y}{3} - 0 \right\} = \frac{1}{3} \int_0^2 y \, dy = \frac{1}{3} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{2}{3}$$

Più comodamente

$$\begin{aligned}\iint_A x^2 y \, dx \, dy &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \, x^2 y = \int_0^1 x^2 dx \int_0^2 y \, dy = \\ &= \int_0^1 x^2 dx \underbrace{\left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2}}_2 = 2 \int_0^1 x^2 dx \\ &= 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3} .\end{aligned}$$