

CRITERIO ASSOLUTA INTEGRABILITÀ

$$\int_E |f(x)| dx \text{ CONV.} \Rightarrow \int_E f(x) dx \text{ CONV.}$$

$$\int_E |f(x)| dx = +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

A questo si possono applicare i criteri precedenti

Dim. $f(x) = f(x) - |f(x)| + |f(x)|$

$$= |f(x)| - (|f(x)| - f(x))$$

$$\int_E f(x) dx = \int_E |f(x)| dx - \int_E (|f(x)| - f(x)) dx = \text{CONV.}$$

$\uparrow$ conv. per ipotesi $\uparrow$ converge per canfr.

$$0 \leq |f(x)| - f(x) \leq 2|f(x)|$$

$$\int_E 2|f(x)| dx \text{ conv. per ipotesi} \Rightarrow \int_E (|f(x)| - f(x)) dx \text{ conv.}$$

per confronto

Stessa dimostrazione funziona per la serie

Esempio 1

$$\int_2^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin x}{x^2}}_{f(x)} dx \quad f(x) \text{ ha segno variabile VERAMENTE}$$

Considero $\int_2^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx = \int_2^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx$

$$0 \leq \frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx \text{ conv.}$$

confronto

← Assol. int.

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx \text{ conv.}$$

Esempio 2

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(3x) - 3 \sin x}{x^{7/2}} dx = \int_0^1 + \int_1^{+\infty} \Rightarrow \text{CONV.}$$

$f(x)$ a segno variabile

CONV. CONV.

Considero $\int_1^{+\infty} |f(x)| dx$

$$|f(x)| \leq \frac{10}{x^{7/2}} \Rightarrow \int \frac{10}{x^{7/2}} dx \text{ con pb. a } +\infty \text{ conv.}$$

$\Downarrow$ $\leftarrow$ confronto

$$\int |f(x)| dx \text{ con pb. a } +\infty \text{ conv.}$$

$\Downarrow$ $\leftarrow$ Assol. conv.

$$\int f(x) dx \text{ con pb. a } +\infty \text{ conv.}$$

Considero il problema in $x=0$

Brutale !

$$f(x) \sim \frac{3x - 3x}{x^{7/2}} = 0$$

No! Ci siamo fermati
di troppo presto!

$$f(x) \sim \frac{3x - \frac{(3x)^3}{3} - 3\left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{x^{7/2}} = \frac{\cancel{3x} - 9x^3 - \cancel{3x} + \frac{x^3}{2}}{x^{7/2}} = \frac{-8.5x^3}{x^{7/2}} = -\frac{8.5}{\sqrt{x}}$$

↑
per $x \sim 0$

Dallo studio fatto segue che Num $\sim -8.5x^3$ per $x \sim 0$

Per $x \sim 0$ il numeratore è negativo $\Rightarrow$ segno costante $\Rightarrow$ porto il $-$ fuori e applico i criteri

$\Rightarrow$ si comporta (l'integrale tra 0 e 1) come $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ con

problema in 0 $\Rightarrow$ converge

E se il problema non è in $x=0$ oppure $x=+\infty$?

$$\int_1^3 \frac{dx}{x-1} = \text{Pongo } y = x-1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow dy = dx$$

↑
problema in
 $x=1$

Come cambiano gli estremi?

Quando $x=1$ ho che $y=0$

Quando $x=3$ ho che $y=2$

$$= \int_0^2 \frac{dy}{y} \leftarrow \text{Questo ha problemi in } y=0 \text{ e diverge}$$

+ in generale: $\int_a^{a+1} \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$ con cambio di
variabili si riduce a
↑
problema in $x=a$

$$\int_0^1 \frac{dy}{y^\alpha}, \text{ quindi}$$

→ converge se $\alpha > 1$

→ diverge a $+\infty$ se $\alpha \leq 1$

Stessa cosa per $\int_{a-1}^a \frac{1}{(a-x)^2} dx$

Esempio 1 $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \quad \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x-1)}}$

Brutale: $f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per } x \sim 1}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)^{1/2}}$

COLPEVOLE DEL
FATTO CHE L'INT.
È IMPROPRIO

⇒ L'int. dato si comporta come

$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$ con pb. in 1, dunque converge

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$. Devo fare

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{(x+1)(\cancel{x-1})}} \cdot \cancel{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \neq +\infty$
↑ PROBL. ⇒ stesso comp.

Esempio 2

$$\int_1^2 \frac{dx}{\log x} =$$

problema in $x=1$

Pongo $y = x-1 \Rightarrow dy = dx$

Quando $x=1$ ho che $y=0$
" $x=2$ " $y=1$

$$= \int_0^1 \frac{dy}{\log(1+y)}$$

← problema in $y=0$

Brutale: $\frac{1}{\log(1+y)} \sim \frac{1}{y}$ per $y \sim 0 \Rightarrow$ l'integrale diverge

Esempio 3

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$$

↑
problemi in
 $x=1$ e $x=+\infty$

$$= \int_0^1 + \int_1^5 + \int_5^{+\infty}$$

↑
CONV. CONV.

$$= +\infty$$

↑
DIV. A $+\infty$

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ x \text{ grandi}}}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int_5^{+\infty} f(x) dx \text{ DIV. A } +\infty$$

Se fosse $f(x) \geq 0$ sempre potrei concludere che il tutto diverge

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x^2+x+1)}}$$

$\uparrow$ COLPEVOLE $\uparrow$ INNOCENTE



$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per } x \sim 1}}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} \quad \text{Allora}$$

$$\int_1^2 f(x) dx \text{ si comporta come } \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} \Rightarrow \text{CONVERGE}$$

$$\int_0^1 f(x) dx \text{ conv. per lo stesso motivo}$$