

Integrali impropri

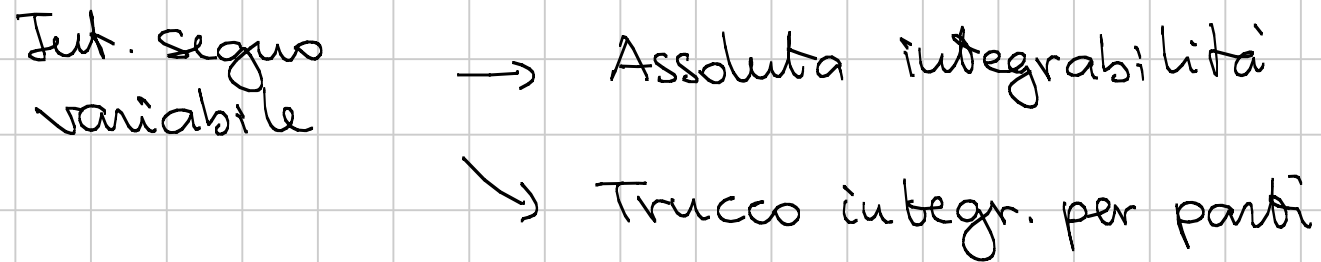
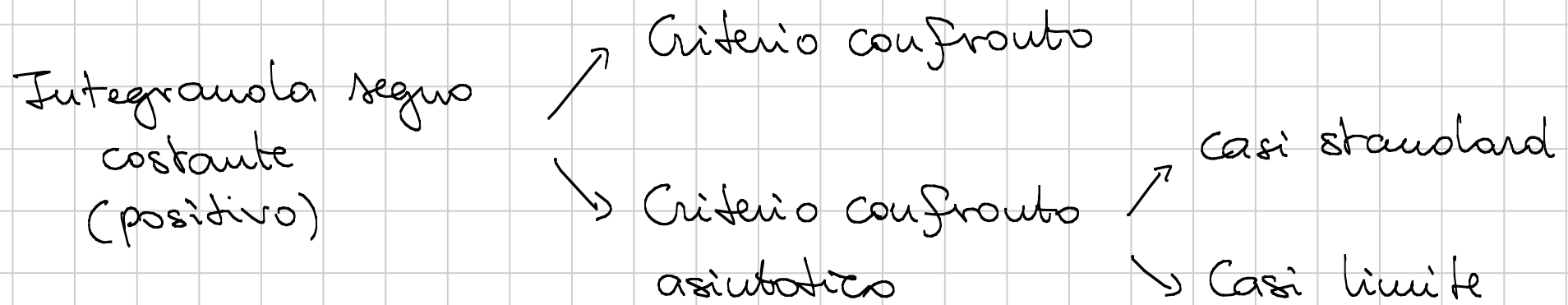
Definizioni nel caso di int. monoproblema (lim. ...)

Spezzamento degli integrali con + problemi

Tabellina: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ $\rightarrow$ conv. se $\alpha > 1$
 $\rightarrow$ Div. a $+\infty$ se $\alpha \leq 1$

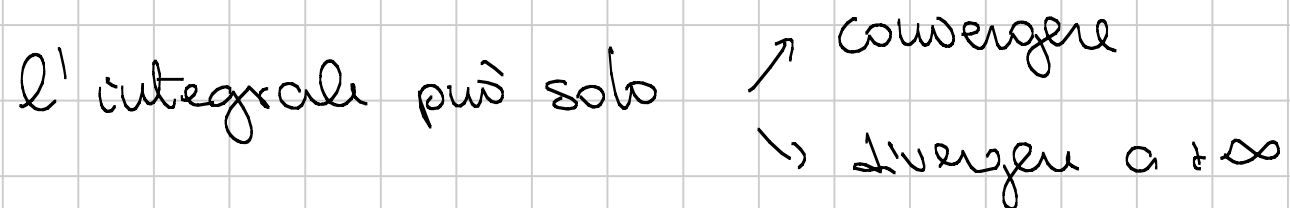
$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x (\log x)^\alpha}$ $\rightarrow$ come sopra

$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ $\rightarrow$ conv. se $\alpha < 1$
 $\rightarrow$ Div. a $+\infty$ se $\alpha \geq 1$



Utilità dei criteri: stabilire se un integrale converge o no senza dover fare la primitiva

Utilità dell'integranda positiva:



CRITERIO CONFRONTO ASINTOTICO

Siano

$$\int_E f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_E g(x) dx$$

due integrali impropri. Supponiamo che $f(x) \geq 0$ in E e $g(x) > 0$ in E .

Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

↑
punto in cui gli
integrali hanno il problema

Allora i due integrali con problema in x_0 si comportano
allo stesso modo

Esempio 1

$$\int_5^{+\infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^4 + 4x + 1} dx$$

$f(x)$

$f(x) \geq 0$ nella zona
di integrazione

Brutale: $f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ x \text{ grande}}}{\sim} \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow$ l'int. dato si comporta come $\int \frac{1}{x^2} dx$ con pb. all' ∞
e questo converge

Rigoroso: faccio C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Devo fare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot f(x) = 1 \neq 0 \neq +\infty \Rightarrow \dots$$

Esempio 2

$$\int_0^1 \frac{dx}{\arctan x}$$

$$f(x) = \frac{1}{\arctan x} > 0 \text{ nella zona di integr.}$$

$\uparrow$
problemi in $x=0$

Brutale

$$\frac{1}{\arctan x} \sim \frac{1}{x}$$

↑
per $x \sim 0$

dunque l'int. dato si comporta come

$$\int \frac{1}{x} dx \text{ con pb. in } 0$$

⇒ DIVERGE

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \frac{1}{x}$. Devo fare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctan x} = 1 \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

Esempio 3

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_0^4 \frac{dx}{x^2} + \int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = +\infty$$

↑ ↑
DIVERGE CONV.

Esempio 4

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{x^2+1}{x^4+1}}_{f(x)} dx$$

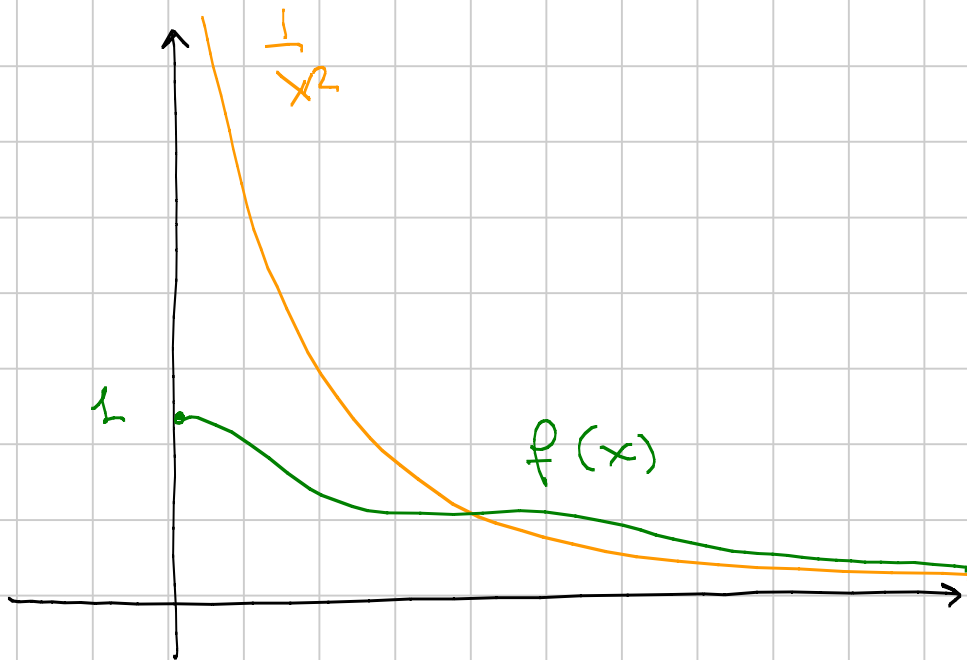
Brutale: $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$, quindi
 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ si comp. come

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ dunque DIVERGE}$$

NOOOO !!!!!

Brutale conetto: $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$, quindi $\int f(x) dx$ con
 per x grandi problema a $+\infty$

si comporta come $\int \frac{1}{x^2} dx$ con problema a $+\infty$, quindi
 CONVERGE



Esempio 5

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{x^2-1}{x^4+1}}_{f(x)} dx$$

Non è + vero che $f(x) \geq 0$
nella zona di integrazione

In questo caso $f(x) \geq 0$ per
x "vicini al problema" dunque
posso ugualmente applicare il
criterio.

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^{22} + \int_{22}^{+\infty}$$

↑
integrale
PROPRIO,
senza problemi

↑ Qui $f(x) \geq 0$ quindi
applico criterio

Esempio 6

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\arctan(x\sqrt{x})}{x^2}}_{f(x) \geq 0} dx$$

$$= \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$$

↑
CONV

↑
CONV

CONVERGE

$$\frac{\arctan(x\sqrt{x})}{x^2} \leq \frac{10}{x^2}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{10}{x^2} dx \text{ converge} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x\sqrt{x})}{x^2} dx \text{ converge}$$

↑
CONFRONTO

In alternativa: C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^2}$ (Provare ...)

Brutale: $f(x) \sim \frac{x\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$
 ↑
 per $x \sim 0$

quindi $\int f(x)$ con pb. in 0 si comporta come $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
 con problema in 0, quindi CONVERGE.

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$... $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1 \Rightarrow \dots$

Esempio 7 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + \sqrt{x}} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$ CONVERGE

$f(x) \sim \frac{1}{x^3}$ $\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x) dx$ si comporta come $\int \frac{1}{x^3} dx$
 $\uparrow$
 x grandi
 con pb. a $+\infty \Rightarrow$ CONVERGE

$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx$ si comporta come $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
 $\uparrow$
 per $x \sim 0$
 con pb. a $0 \Rightarrow$ CONVERGE

Es.: fare limiti rigorosi

CASI LIMITE Nelle stesse ipotesi di prima supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

[Allora $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$ per x vicino ad $x_0 \Rightarrow f(x) \leq g(x)$
vicino ad $x_0 \Rightarrow$]

$$\int_E g(x) dx \text{ con pb. in } x_0 \text{ CONV} \Rightarrow$$

$$\int_E f(x) dx \quad " \quad " \quad \text{CONV.}$$

Supponiamo invece che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

[$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \geq 1$ vicino a $x_0 \Rightarrow f(x) \geq g(x)$ vicino a $x_0 \Rightarrow$]

$$\int_E g(x) dx = +\infty$$

con pb. in x_0

$$\Rightarrow \int_E f(x) dx = +\infty$$

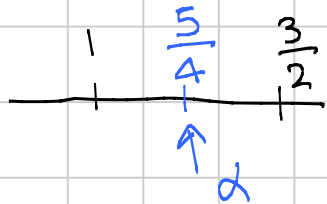
con pb. in x_0

Esempio 8

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \underbrace{\frac{\log x}{x\sqrt{x}}}_{f(x)} dx$$

$f(x)$ non è ≥ 0 in tutta la zona di integr., ma lo è per x abbastanza grande $\Rightarrow$ posso applicare i criteri

Facciamo C.A. con $\frac{1}{x^\alpha}$ facendo in modo che $\alpha > 1$, ma $\alpha < \frac{3}{2}$



Prendo $g(x) = \frac{1}{x^{5/4}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^{3/2}} \cdot x^{5/4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^{1/4}} = 0$$

$\Rightarrow f(x) \leq g(x)$ per x grandi

$\int g(x) dx$ conv. (con pb. a $+\infty$)
 $\Rightarrow$ int. dato conv.