

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log^2 x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{dx}{x \log^2 x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{\log x} \right]_{x=2}^{x=A}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{1}{\log A} + \frac{1}{\log 2} \right\} = \frac{1}{\log 2} \Rightarrow \text{converge}$$

Con la stessa tecnica si dimostra che

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log^\alpha x}$$

converge se $\alpha > 1$

diverge a $+\infty$ se $\alpha \leq 1$

TABELLINA

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-e^{-x} \right]_{x=0}^{x=A} =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \{ -e^{-A} + 1 \} = 1$$

— 0 — 0 —

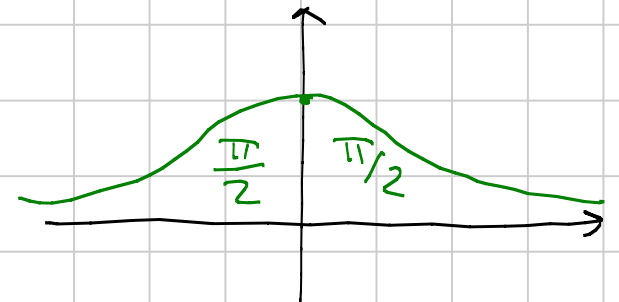
Cosa succede se l'integrale ha + problemi:

- 1 - si spezza in integrali monoproblemi;
- 2 - si studiano i singoli pezzi;
- 3 - si deduce il comportamento dell'integrale originario sulla base dei singoli pezzi
(se accade che un pezzo diverge a $+\infty$ e un pezzo diverge a $-\infty$ si dice PER DEFINIZIONE che l'integrale originario è INDETERMINATO)

Esempio 1 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan x]_{x=0}^{x=A} =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \{ \arctan A - 0 \} = \frac{\pi}{2}$$



$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 \frac{dx}{1+x^2} = \dots = \frac{\pi}{2}$$

FUNZIONE
PARI

Esempio 2 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^5} = \int_{-1}^1 x^{-5} dx = \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{x^4} \right]_{x=-1}^{x=1} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$

NOOOO !!!!!!!!

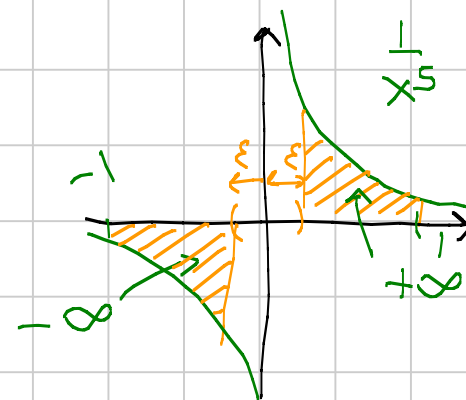
Si fa così per gli integrali PROPRI, mentre questo è IMPROPRIO

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^5} = \int_0^1 \frac{dx}{x^5} + \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^5}$$

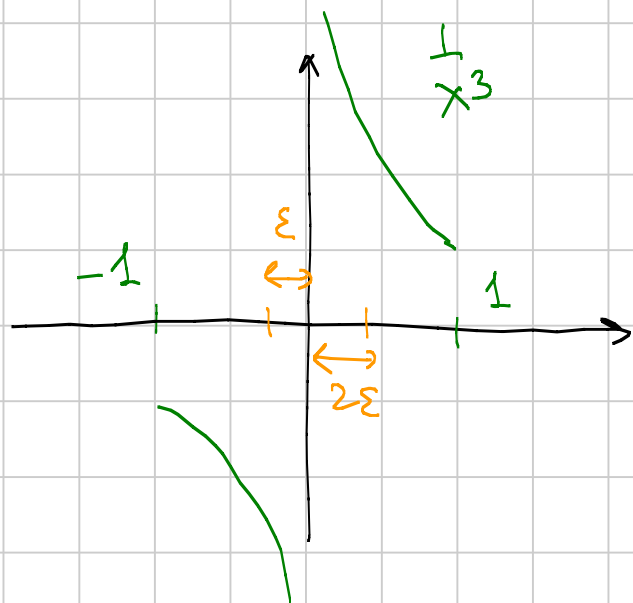
DIVERGE
 $A + \infty$

DIVERGE
 $A - \infty$

(Funzione
 DISPARI)



$\Rightarrow$ in base alla definizione data, l'integrale originario è
 INDETERMINATO



Si potrebbe dire che:

Se l'integrale converge il limite
 non dipende da come faccio il
 buco

Se l'integrale è indeterminato,
 buchi diversi portano a limiti
 diversi

Come sapere se un integrale converge o non converge senza fare la primitiva.

UTILIZZANDO CRITERI DI CONVERGENZA

Prima suddivisione:

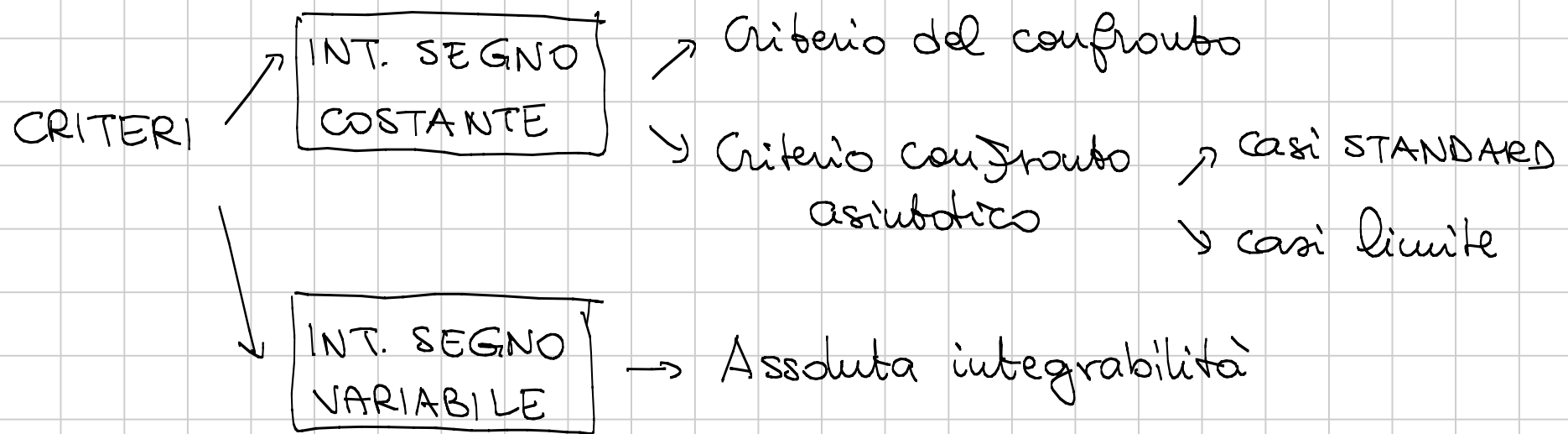
↗ INTEGRANDA A SEGNO VARIABILE

↘ INTEGRANDA A SEGNO COSTANTE (positivo).

In questo caso i possibili comportamenti sono solo 2

←
convergere

→
Divergere a $+\infty$



TRUCCO dell'integrazione per parti

Criterio serie $\leftrightarrow$ INTEGRALI

— 0 — 0 —

CRITERIO DEL CONFRONTO

Siano $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$ nella zona di integrazione E .

Supponiamo che

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in E$$

Allora

$$\int_E f(x) dx = +\infty \Rightarrow \int_E g(x) dx = +\infty$$

$$\int_E g(x) dx < +\infty \text{ (cioè con.)} \Rightarrow \int_E f(x) dx < +\infty$$

$$\int_E f(x) dx < +\infty \Rightarrow \int_E g(x) dx = \text{BOH!!!}$$

$$\int_E g(x) dx = +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx = \text{BOH!!!}$$

— 0 — 0 —

Esempio 1

$$\int_5^{+\infty} \boxed{\frac{8 + \sin x}{x^2}} dx$$

$f(x)$

converge

$f(x) \geq 0$ per $x \geq 5$ Ok

$$\frac{8 + \sin x}{x^2} \leq \frac{9}{x^2}$$

$$\int_5^{+\infty} \frac{9}{x^2} dx \quad \text{converge (in tabellina } \alpha = 2 > 1)$$

$\Downarrow \leftarrow$ confronto

$$\int_5^{+\infty} \frac{8 + \sin x}{x^2} dx \quad \text{converge}$$

— 0 — 0 —

Esempio 2

$$\int_0^1 \boxed{\frac{1}{\sin x}} dx$$

$f(x)$

$\sin x > 0$ per $x \in (0, 1)$

quindi $f(x) > 0$ in $(0, 1)$

$\sin x < x$ per ogni $x > 0$, quindi

$$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} \quad \text{per } x \in (0, 1)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sin x} = +\infty$$