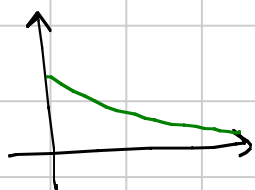


INTEGRALI IMPROPRI

INTEGRALI PROPRI $\nearrow$ zona di integrazione: $[a, b]$ limitato
 $\searrow$ integranda $f(x)$ funzione limitata

Un integrale si dice IMPROPRIO se una o entrambe le richieste non sono soddisfatte.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$



FUNZ. LIM.
ZONA INT. NO

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$



ZONA INT. LIM.
FUNZIONE NO

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

ENTRambi i
PROBLEMI

INT. IMPROPRI MONOPROBLEMA = con un problema solo di questo tipo

* FUNZIONE LIMITATA, ZONA DI INTEGRAZIONE = SEMIRETTA
 $[a, +\infty)$ oppure $(-\infty, a]$

* ZONA INT = interv. $[a, b]$, funzione non limitata vicino all'estremo a o all'estremo b .

Se l'integrale ha tanti problemi, occorre spezzarlo in tanti integrali con un problema solo

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_0^{12} \frac{dx}{x^2} + \int_{12}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

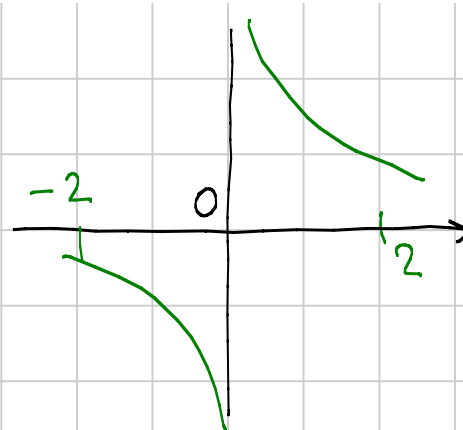
↑ ↑

pb.: non
limitatezza
vicino a $x=0$

pb.: zona int.



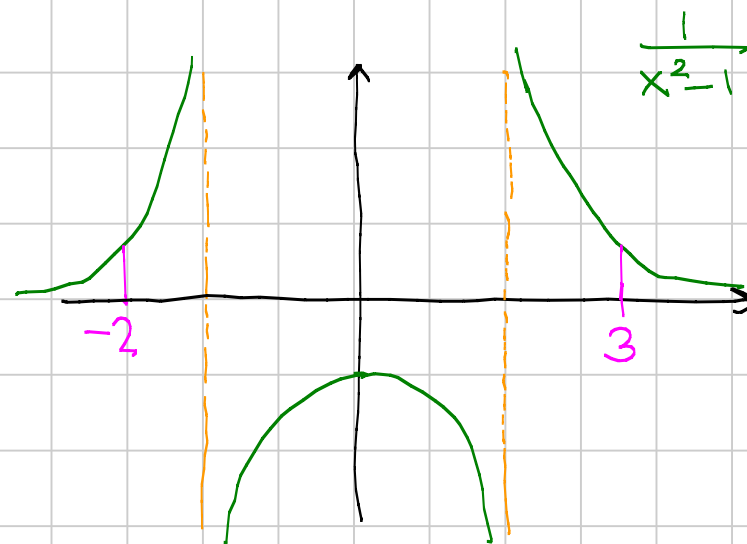
$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{x} = \int_{-2}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^2 \frac{dx}{x}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{-2} + \int_{-2}^{-1} + \int_{-1}^0 + \int_0^1 + \int_1^3 + \int_3^{+\infty}$$

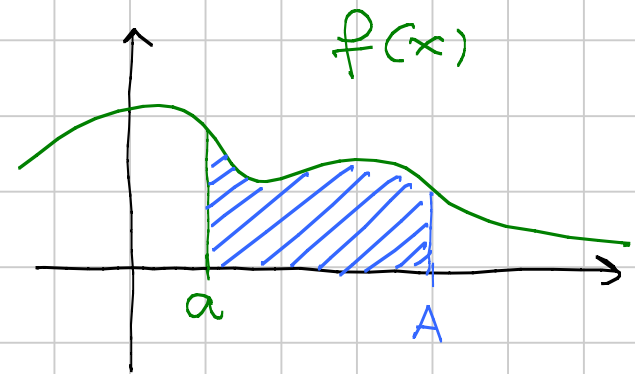


$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

L'unico problema è
la zona di integrazione

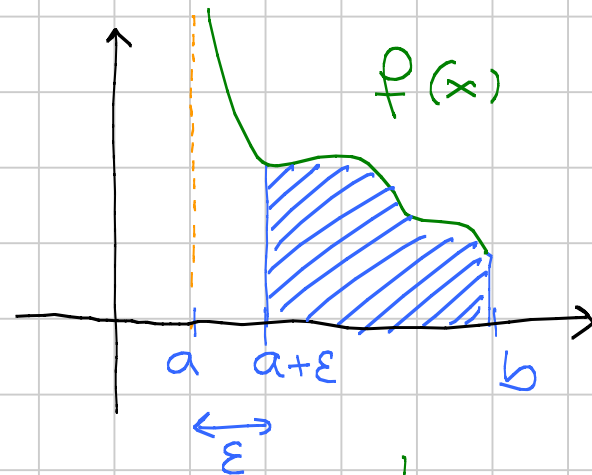
Definizioni per integrali impropri monoproblema

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$



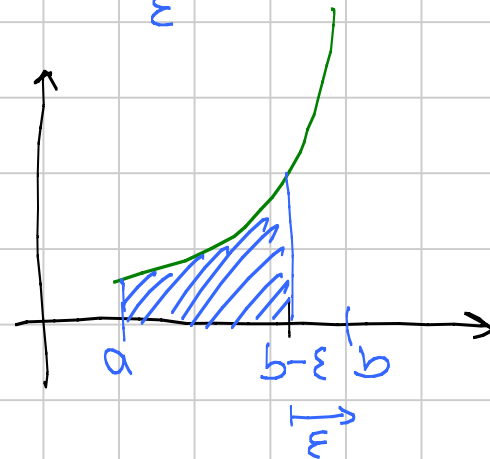
Funzione $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ con problema in $x=a$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$



Se il problema è in $x=b$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$



Esempio 1

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\log x]_{x=2}^{x=A}$$
$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \{ \log A - \log 2 \} = +\infty$$

L'INT. DIVERGE A $+\infty$
(il 2 non ha nessuna importanza)

[NB] Essendo un limite un int. improprio può

- convergere ($\lim = l \in \mathbb{R}$)
- divergere a $+\infty$
- " " $-\infty$
- essere indeterminato

Esempio 2

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{dx}{x^3} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_{x=2}^{x=A}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{1}{2A^2} + \frac{1}{8} \right\} = \frac{1}{8} \quad \text{CONVERGE}$$

(cambiando 2 con un altro valore positivo continua a convergere ma cambia il limite)

Esempio 3

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A x^{-\frac{1}{3}} dx =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right]_{x=2}^{x=A} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{3}{2} A^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} 2^{\frac{2}{3}} \right] = +\infty$$

$\downarrow$
 $+\infty$

Esempio 4 (parametrico)

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A x^{-\alpha} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1} \right]_{x=2}^{x=A}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{A^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{2^{\alpha-1}} \right\}$$

Numero e non
influenza il limite

$\nearrow$ se $\alpha-1 \geq 0$, cioè $\alpha \geq 1$ il limite della prima parte è 0 $\Rightarrow$ l'int. converge

$\searrow$ se $\alpha-1 < 0$, cioè $\alpha < 1$ il limite della prima parte è $+\infty$ $\Rightarrow$ l'int. div. a $+\infty$

Se $\alpha - 1 = 0$, cioè $\alpha = 1$, la primitiva non è quella indicata, ma si ritrova esattamente l'esempio 1 $\Rightarrow$ l'int. diverge a $+\infty$.

Conclusione: per ogni $a > 0$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{converge per } \alpha > 1 \\ \searrow \text{div. a } +\infty \text{ per } \alpha \leq 1 \end{array} \quad \text{TABELLINA}$$

Esempio 5 $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_{x=\varepsilon}^{x=1}$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right\}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right\} =$$

$\nearrow$ se $\alpha - 1 < 0$, cioè $\alpha < 1$, $\{ \} \rightarrow 1$
 $\Rightarrow$ lim è reale $\Rightarrow$ int. CONVERGE

$\searrow$ se $\alpha - 1 > 0$, cioè $\alpha > 1$, $\{ \} \rightarrow -\infty$
 $\Rightarrow$ lim è $+\infty \Rightarrow$ int. div. a $+\infty$

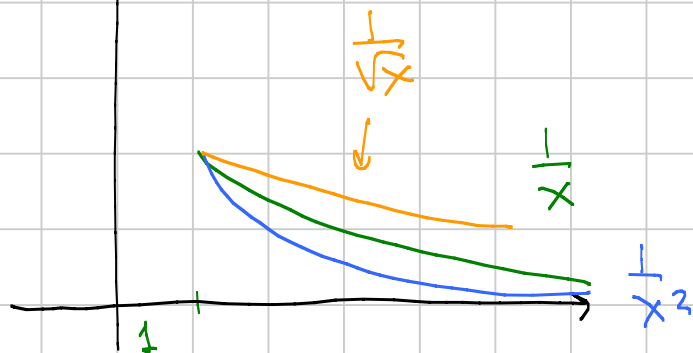
se $\alpha = 1$ occorre farlo a parte e risulta che DIVERGE.

Conclusione: per ogni $a > 0$ si ha che

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx \begin{cases} \rightarrow \text{converge se } \alpha < 1 \\ \rightarrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

TABELLINA

Esp. + grande =
funzione + piccola =
+ facile che converga



Esp. + grande =
funzione + grande =
+ facile che
l'int diverga

