

Calcolare la somma di serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Teo 1 Esiste $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ t.c.,

- se $|x| < R$ la serie converge ASSOLUTAMENTE
- se $|x| > R$ la serie non converge (e non verifica cond. nec.)
- se $|x| = R$ dipende dai casi

Teo 2 Se esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L$, allora $R = \frac{1}{L}$

Teo 3 Per le funzioni ANALITICHE (quasi tutte quelle decenti)
la serie di Taylor (DOVE CONVERGE) converge alla
funzione stessa

Def. La serie di Taylor di una funzione $f(x)$ è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}_{c_n} x^n$$

Esempio 1 $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Serie di Taylor di $f(x) = e^x$
che ha $R = +\infty$

Esempio 2 $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \arctan x$

solo per ogni $x \in [-1, 1]$

In fatti la serie di Taylor di $\arctan x$ ha $R = 1$ e
in più converge per $x = \pm 1$ per verifica diretta.

Conseguenza: (caso particolare $x=1$)

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Esempio 3

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots = -\log(1-x)$$

per ogni $x \in [-1, 1)$

caso $x=-1$

In particolare $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \log 2$

Esempio 4

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Teorema 4

La derivata di una serie di potenze è la serie delle derivate (all'interno del raggio di convergenza)

Teorema 5 Se devo fare la primitiva di una serie di potenze
 nulla per $x=0$

basta fare la serie delle primitive (nulle in $x=0$)

Esempio 5 $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots = \frac{1}{1+x}$

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots = \frac{1}{1+x^2}$$

Se faccio "la" primitiva

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \arctan x$$

Esempio 6

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^3}{n+3} =$$

Assomiglia a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{n}$

$$= \frac{1}{x^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n+3} = \frac{1}{x^3} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{x^3} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2} \right)$$

$\nearrow$
 $n=1$

$\uparrow$
 $n=2$

$$= \frac{1}{x^3} \left(-\log(1-x) - x - \frac{x^2}{2} \right)$$

La formula vale $\forall x$ per cui la serie converge (nel nostro caso per $x \in [-1, 1)$).

— 0 — 0 —

Esempio 7

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$$

$$= x(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots)$$

$$= x(x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)'$$

$$= x(-1 + \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + \dots}_{\text{SERIE NOTA}})'$$

$$= x\left(-1 + \frac{1}{1-x}\right)' = x\left(\frac{-1+x+1}{1-x}\right)' = x\left(\frac{x}{1-x}\right)'$$

$$= x \frac{1 - \cancel{x} + \cancel{x}}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^3 = \frac{x}{(1-x)^2}$$

per ogni x per cui la serie converge, in questo caso $x \in (-1, 1)$

— 0 — 0 —

Altro modo

$$\begin{aligned} x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots &= \\ &= x(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = \frac{x}{1-x} \end{aligned}$$

In generale

$$\begin{aligned} x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + \dots &= \\ &= x^7(1 + x + x^2 + \dots) = \frac{x^7}{1-x} \end{aligned}$$

— 0 — 0 —

Esempio 8

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot nx^3 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} nx^3 = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} nx^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}$$

$$= x \left(-\log(1-x) - x \right)$$

$$= x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = (\star)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) x^n$$

$$\frac{n}{n+1} x^n = \frac{n+1-1}{n+1} x^n$$

$$= x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) x^n \right)$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} x^n \right) \quad \text{SCAMBIO}$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+1} x^n \right)$$

$$(\star) = x \left(\frac{x}{1-x} + \frac{1}{x} (\log(1-x) + x) \right)'$$

$$= x \left(\frac{x}{1-x} + \frac{\log(1-x)}{x} + 1 \right)' \rightarrow$$

Basta calcolare
la derivata e
la somma è
calcolata.