

$\sqrt{\text{pol. di } 2^{\circ} \text{ grado}}$

NO

$$\int \sqrt{x^2+3} \, dx =$$

Pongo

$$\boxed{\sqrt{x^2+3} = y \quad x^2+3 = y^2 \quad x^2 = y^2-3}$$

$$\sqrt{x^2+3} = x+y$$

$$x^2+3 = x^2+2xy+y^2$$

DIVENTA DI 1° GRADO IN x

$$2xy = 3-y^2$$

$$x = \frac{3-y^2}{2y} = \frac{3}{2y} - \frac{y}{2}$$

$$dx = \left(\frac{3}{2y} - \frac{y}{2} \right)' dy = \left(-\frac{3}{2y^2} - \frac{1}{2} \right) dy$$

$x+y$

$$= \int \left(\frac{3-y^2}{2y} + y \right) \left(-\frac{3}{2y^2} - \frac{1}{2} \right) dy$$

si FA!

$$\int \sqrt{2x^2 + x + 5} \, dx =$$

Pongo $\sqrt{2x^2 + x + 5} = \sqrt{2}x + y$

$$\cancel{2x^2} + x + 5 = \cancel{2x^2} + 2\sqrt{2}xy + y^2$$

$$x(2\sqrt{2}y - 1) = 5 - y^2$$

$$x = \frac{5 - y^2}{2\sqrt{2}y - 1} \quad dx = \left(\frac{5 - y^2}{2\sqrt{2}y - 1} \right)' dy$$

$$\sqrt{2}x + y$$

$$= \int \left(\sqrt{2} \frac{5 - y^2}{2\sqrt{2}y - 1} + y \right) \left(\frac{5 - y^2}{2\sqrt{2}y - 1} \right)' dy = \text{SI POTREBBE FARE}$$

— 0 — 0 —

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + y$$

FUNZIONA SE $a > 0$

$$\int \sqrt{5x-6-x^2} \, dx = \int \sqrt{-(x^2-5x+6)} \, dx = \int \sqrt{-(x-2)(x-3)} \, dx$$

$$\sqrt{-(x-2)(x-3)} = y(x-2); \quad -\cancel{(x-2)}(x-3) = y^2(x-2)^2$$

Di primo grado in x

$$-x+3 = y^2x - 2y^2; \quad x(y^2+1) = 3+2y^2$$

$$x = \frac{3+2y^2}{y^2+1} \quad dx = \left(\frac{3+2y^2}{y^2+1} \right)' dy$$

$$= \int \underbrace{y \left(\frac{3+2y^2}{y^2+1} - 2 \right)}_{y(x-2)} \underbrace{\left(\frac{3+2y^2}{y^2+1} \right)' dy}_{dx} = 81 \text{ FA.}$$

STESSA COSA CON LA SOSTITUZIONE $\sqrt{\quad} = y(x-3)$

Questo metodo funziona se il polinomio di 2° grado si fattorizza, cioè $\Leftrightarrow$ 2 radici reali $\Leftrightarrow \Delta > 0$.

$$\sqrt{ax^2+bx+c}$$

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$	$\sqrt{\quad} = \sqrt{a}x + y$ FATT.	FATT.
$\Delta < 0$	$\sqrt{\quad} = \sqrt{a}x + y$	??

Se $a < 0$ e $\Delta < 0$ il polinomio è sempre negativo, quindi la radice del polinomio non ha senso, quindi non ha senso cercarne la primitiva.

$$\int \sqrt{x^2-1} \, dx = \text{Con la fattorizzazione}$$

$$\sqrt{(x+1)(x-1)} = y(x-1)$$

$$(x+1)\cancel{(x-1)} = y^2(x-1)\cancel{1}$$

$$x+1 = y^2x - y^2$$

$$x(y^2-1) = y^2+1$$

$$x = \frac{y^2+1}{y^2-1}$$

$$dx = \left(\frac{y^2+1}{y^2-1} \right)' dy$$

$$= \int \underbrace{y \left(\frac{y^2+1}{y^2-1} - 1 \right)}_{y(x-1)} \left(\frac{y^2+1}{y^2-1} \right)' dy = \int y \frac{2}{y^2-1} \left(\frac{y^2+1}{y^2-1} \right)' dy$$

= SI FA

Secondo modo: $\sqrt{x^2-1} = x+y$; $\cancel{x^2}-1 = \cancel{x^2} + 2xy + y^2$

$$2xy = -1 - y^2$$

$$x = -\frac{y^2+1}{2y}$$

$$= \int \underbrace{\left(-\frac{y^2+1}{2y} + y \right)}_{x+y} \underbrace{\left(-\frac{y^2+1}{2y} \right)'}_{dx} dy = \text{SI FA e i denominatori sono semplici}$$

$$\int \sqrt{x^2-1} dx$$

Funzioni iperboliche:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x$$

Pongo $x = \cosh y$ $dx = \sinh y \cdot dy$

$$= \int \sqrt{\cosh^2 y - 1} \sinh y dy = \int \sinh^2 y dy =$$

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$\sinh^2 y = \frac{e^{2y} + e^{-2y} - 2}{4}$$

— o — o —

per parti con
grande ritorno
→ usando formule
per $\cosh(2x)$
↓
in modo
elementare

$$\int \sqrt{x^2+1} dx$$

$x = \sinh y$ se ne va la radice

Integrali di funzioni razionali di $\sin x$ e $\cos x$

$$\int \frac{\sin^2 x + 3\cos x - 6}{\cos^7 x - 7} dx$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

FORMULE
PARAMETRICHE

$$\text{dove } t = \tan \frac{x}{2}$$

Con la sostituzione la funz. raz. di $\sin x$ e $\cos x$ diventa una funz. raz. di t . Che succede al dx ?

$$t = \tan \frac{x}{2}, \quad \frac{x}{2} = \arctan t, \quad x = 2 \arctan t$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt \Rightarrow \text{RAZIONALE}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \underbrace{\frac{1+t^2}{2t}}_{\substack{\uparrow \\ \frac{1}{\sin x}}} \cdot \underbrace{\frac{2}{1+t^2} dt}_{dx} = \int \frac{1}{t} dt$$

$$= \log |t|$$

$$= \log \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right|$$

— o — o —

$$\int \sin(\log x) dx = \text{Prova } y = \log x, x = e^y, dx = e^y dy$$

$$= \int \sin y \cdot e^y dy = \text{si fa con 2 passaggi per parti + grande ritorno.}$$

— o — o —

$$\int \log(1-x^2) dx = \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\log(1-x^2)} dx =$$

$$= \underset{F}{x} \underset{G}{\log(1-x^2)} - \int \underset{F}{x} \underset{G}{\frac{(-2x)}{1-x^2}} dx = \text{SI FA}$$

$$\begin{aligned}\int \log(1-x^2) dx &= \int \log(1+x)(1-x) dx = \\ &= \int \log(1+x) dx + \int \log(1-x) dx\end{aligned}$$

$$\int \log(1+x) dx \stackrel{1+x=y}{=} \int \log y dy = (y-1) \log y = x \log(x+1)$$

$$\int \log(1-x) dx \stackrel{y=1-x}{=} - \int \log y dy = \dots$$

$dy = -dx$

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \arctan x^2 \quad [\text{sostituzione } y = x^2]$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^4} dx = \text{CONTOSO} \quad \left[1+x^4 = 1+x^4+2x^2-2x^2 = \right.$$

$$= (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 =$$

$$\int \frac{x^3}{1+x^4} dx = \frac{1}{4} \log(1+x^4) \quad = (x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)$$