

Sostituzioni razionalizzanti

$$\int \frac{dx}{e^x + 1} =$$

Pongo $y = e^x$

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

$$dy = e^x dx$$

$$\int \frac{\boxed{e^x dx}^{dy}}{e^x (e^x + 1)}$$

$$= \int \frac{dy}{y(y+1)}$$

← FUNZIONE RAZIONALE

$$\frac{1}{y(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} = \frac{\cancel{y+1} - \cancel{y}}{y(y+1)}$$

$$= \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \log |y| - \log |y+1| =$$

$$= \log e^x - \log (e^x + 1)$$

$$= x - \log (e^x + 1)$$

$$\int \frac{dx}{e^x + 1}$$

Pongo $e^x + 1 = y$; $\frac{dy}{dx} = e^x$; $dy = e^x dx$

$$= \int \frac{e^x dx}{e^x (e^x + 1)} = \int \frac{dy}{y(y-1)}$$

$\uparrow$ $y-1$ $\uparrow$ y

Con lo stesso metodo si fanno le primitive di tutte le funzioni razionali di e^x

$$\int \frac{e^{3x} - e^{2x} + 5}{e^{4x} + 1} \boxed{\frac{e^x dx}{e^x}} =$$

Pongo $y = e^x$, $\frac{dy}{dx} = e^x$, $dy = e^x dx$

$$= \int \frac{y^3 - y^2 + 5}{y^4 + 1} \frac{1}{y} dy$$

Stessa cosa vale se ho potenze di a^x (con $a > 0$)

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x}+1} dx =$$

$$y = \sqrt{x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$= \int \frac{x+2}{\sqrt{x}+1} 2\sqrt{x} \boxed{\frac{dx}{2\sqrt{x}}}$$

$$\rightarrow x = y^2, \quad \frac{dx}{dy} = 2y, \quad dx = 2y dy$$

$$= \int \frac{y^2+2}{y+1} \cdot 2y dy = 2 \int \frac{y^3+2y}{y+1} dy =$$

si potrebbe fare la divisione --

$$= 2 \int \frac{\overbrace{y^2(y+1)}^{y^3+y^2} - \overbrace{y(y+1)}^{y^2+y} + \overbrace{3(y+1)}^{3y+3} - 3}{y+1} dy =$$

$$= 2 \int \left(y^2 - y + 3 - \frac{3}{y+1} \right) dy = 2 \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 3y - 3 \log|y+1| \right) =$$

$$= 2 \left(\frac{x\sqrt{x}}{3} - \frac{x}{2} + 3\sqrt{x} - 3 \log(\sqrt{x}+1) \right)$$

Alternativa

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x}+1} dx =$$

Pongo $y = \sqrt{x} + 1$

$$y - 1 = \sqrt{x}$$

$$x = y^2 - 2y + 1$$

$$\frac{dx}{dy} = 2y - 2$$

$$dx = (2y - 2) dy$$

$$= \int \frac{y^2 - 2y + 3}{y} \underbrace{2(y-1) dy}_{dx}$$

$$= 2 \int \left(y - 2 + \frac{3}{y} \right) (y-1) dy =$$

$$= 2 \int \left(y^2 - y - 2y + 2 + 3 - \frac{3}{y} \right) dy = 2 \int \left(y^2 - 3y + 5 - \frac{3}{y} \right) dy$$

$$= 2 \left(\frac{y^3}{3} - 3 \frac{y^2}{2} + 5y - 3 \log |y| \right) =$$

sostituire y e controllare
che venga come
prima

— o — o —

$$\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x}+1} dx =$$

Pongo $\sqrt[3]{x} = y$, $x = y^3$, $dx = 3y^2 dy$

$$\int \frac{y^3+2}{y+1} 3y^2 dy = \text{si sa fare}$$

— o — o —

$$\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}+1} dx = \text{Pougo } y = \sqrt[6]{x}, x = y^6, dx = 6y^5 dy$$

$$= \int \frac{y^3+2}{y^2+1} 6y^5 dy = \text{si sa fare (l'unico punto contoso è la divisione)}$$

— o — o —

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-2}{x} dx = y = \sqrt{x+1}, y^2 = x+1 \Rightarrow x = y^2-1$$

$$\frac{dx}{dy} = 2y \quad dx = 2y dy$$

$$= \int \frac{y-2}{y^2-1} 2y dy =$$

$$= 2 \int \frac{y^2-2y}{y^2-1} dy = 2 \int \frac{y^2-1+1-2y}{y^2-1} dy = 2 \int \left(1 + \frac{1-2y}{y^2-1} \right) dy =$$

$$= 2y + 2 \int \frac{1-2y}{y^2-1} dy = 2y - 3 \log |y+1| - \log |y-1| = \text{termine in } x$$

$$\frac{1-2y}{y^2-1} = \frac{1-2y}{(y+1)(y-1)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1} = \frac{Ay - A + By + B}{(y+1)(y-1)}$$

$$\begin{cases} A+B = -2 \\ B-A = 1 \end{cases} \Rightarrow 2B = -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = B-1 = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1-2y}{y^2-1} = -\frac{3}{2} \frac{1}{y+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{y-1}$$

— 0 — 0 —

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} dx = y = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \quad \frac{dy}{dx} = \text{PESSIMA IDEA}$$

$$= \int y \left(\frac{1-2y^2}{y^2-1} \right)' dy$$

$$y^2 = \frac{x+1}{x+2}; \quad y^2(x+2) = x+1; \quad xy^2 + 2y^2 = x+1$$

$$x(y^2-1) = 1-2y^2 \Rightarrow x = \frac{1-2y^2}{y^2-1}; \quad dx = \left(\frac{1-2y^2}{y^2-1} \right)' dy$$

$$= \int \underbrace{y}_G \underbrace{(\quad)'}_F dy = \text{è comunque l'integrale di una funzione RAZIONALE}$$

$$= \underbrace{y}_G \underbrace{\frac{1-2y^2}{y^2-1}}_F - \int \underbrace{1}_g \cdot \underbrace{\frac{1-2y^2}{y^2-1}}_F dy = \text{si conclude facilmente.}$$

Funziona quando l'integrale contiene espressioni tipo

$$\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

NON — — —

"LASCIATE OGNI SPERANZA"

$$\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+1}+3} dx =$$

$$= \int \frac{\sqrt{y^2-1}+2}{y+3} \cdot 2y dy$$

$$y = \sqrt{x+1}$$

$$y^2 = x+1$$

$$x = y^2 - 1$$

$$dx = 2y dy$$