

MAT I TLC

ORA 70

Esempio $\int \frac{x^5 + 1}{x^4 + x^2} dx$

Divisione

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 1 & x^4 + x^2 \\ -x^5 - x^3 & \boxed{x} \text{ Quoziente: } A(x) \\ \hline \boxed{-x^3 + 1} & \text{Resto } R(x) \end{array}$$

$$x^5 + 1 = x(x^4 + x^2) + (-x^3 + 1)$$

$$\frac{x^5 + 1}{x^4 + x^2} = x + \frac{1 - x^3}{x^4 + x^2} \Rightarrow \int \frac{x^5 + 1}{x^4 + x^2} dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{1 - x^3}{x^4 + x^2} dx$$

Fattorizzazione

$$x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1)$$

↑
Fattore di 1° grado
di molt 2.

↑ Fattore di 2° grado
di molt 1.

3. SISTEMA LINEARE

Supponiamo di dover integrare

$$\frac{x^2+3}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

Sopra i fattori di
1° grado si
mettono costanti

Sopra i fattori di 2° grado
si mettono fattori di
1° grado

$$\frac{x^2+3}{(x-1)(x+5)(x^2+2)(x^2+7)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{x^2+7}$$

$$\frac{1-x^3}{x(x+7)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+7} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+5}$$

↑
Non scomponibile

$$\frac{x^2+3}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2} = \frac{A(x^2+2) + (x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2+2)}$$

$$= \frac{Ax^2 + 2A + Bx^2 + Cx - Bx - C}{(x-1)(x^2+2)}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ C - B = 0 \\ 2A - C = 3 \end{cases}$$

coeff. di x^2

coeff. di x

coeff. di x^0 (termine noto)

SISTEMA
LINEARE

$1^a + 2^a:$ $A + C = 1$

Somma: $3A = 4 \Rightarrow A = \frac{4}{3}$

$3^a:$ $2A - C = 3$

$$B = 1 - A = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$C = B$$

Alla fine del sistema lineare ho che

$$\frac{x^2+3}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{4}{3} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \frac{x+1}{x^2+2}$$

Nel sistema lineare le incognite sono tante quanto è il grado del denom, le equazioni sono altrettanto

Se $\text{grado}(\text{den}) = k$ il grado num $\bar{e} \leq k-1$, quindi le eq. riguardanti i coeff. di $x^0, x^1, \dots, x^{k-1} \Rightarrow k$ equazioni

Si può dimostrare che questo sistema ha sempre soluz. UNICA,

Tutto questo vale se non ci sono molteplicità. Se ci sono?

$$\frac{x^2+3}{(x-1)^4(x-2)(x^2+1)^3(x^2+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{x^2+3} +$$

al numeratore si mette un fattore generico di grado di inferiore al denominatore

Derivata $\frac{d}{dx}$

$$\frac{Gx^6 + Hx^5 + Ix^4 + Jx^3 + Kx^2 + Lx + M}{(x-1)^3(x^2+1)^2}$$

parte INUTILIZZATA DEL DENOMINATORE

Esempio

$$\frac{1-x^3}{x^2(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} + \frac{d}{dx} \frac{D}{x}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} - \frac{D}{x^2}$$

$$= \frac{Ax(1+x^2) + (Bx+C)x^2 - D(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}$$

$$= \frac{Ax + Ax^3 + Bx^3 + Cx^2 - D - Dx^2}{x^2(1+x^2)}$$

$$A+B = -1$$

$$C-D = 0$$

$$A = 0$$

$$-D = 1$$

coeff. di x^3

coeff. di x^2

coeff. di x

termine noto

$$A = 0$$

$$B = -1$$

$$C = -1$$

$$D = -1$$

Conclusione:

$$\frac{1-x^3}{x^2(1+x^2)} = -\frac{1+x}{1+x^2} + \frac{d}{dx} \frac{-1}{x}$$

Alla fine della fase 3 abbiamo 3 tipi di termini

* termini del tipo $\frac{a}{bx+c} \rightsquigarrow$ si integrano facilmente

F
A
S
E

* termini del tipo $\frac{dx+e}{ax^2+bx+c} \rightsquigarrow$ si integrano con un po' di log e un po' di arctan

↑
Non scomp.

④

* termini del tipo $\frac{d}{dx}(\text{roba}) \rightsquigarrow$ per integrarli basta togliere $\frac{d}{dx}$

$$\int \frac{1-x^3}{x^4+x^2} dx = - \int \frac{x+1}{x^2+1} dx + \int \cancel{\frac{d}{dx}} \left(\cancel{\frac{1}{x}} \right) \cancel{dx}$$

$$- \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx = \boxed{\frac{1}{2} \log(1+x^2) + \arctan x}$$

Esempio 1

$$\int \frac{dx}{x^2-1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

Divisione: non serve

$$\text{Fatt. : } x^2-1 = (x+1)(x-1)$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

si potrebbe fare il sistema

$$\text{Molt. per } (x-1) : \frac{1}{x+1} = \frac{A}{(x+1)}(x-1) + B$$

$$\text{Metto } x=1 : \boxed{\frac{1}{2} = B}$$

$$\text{Molt. per } (x+1) : \frac{1}{x-1} = A + \frac{B}{(x-1)}(x+1)$$

$$\text{Metto } x=-1 : \boxed{-\frac{1}{2} = A}$$

$$\frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x-1}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \int \frac{1}{x^2-1} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} \\
 &= -\frac{1}{2} \log(x+1) + \frac{1}{2} \log(x-1) \\
 &= \log \sqrt{\frac{|x-1|}{|x+1|}}
 \end{aligned}$$

Esempio... $\int \frac{x^2+1}{x^3-x} dx$

$$\begin{aligned}
 x^3-x &= x(x^2-1) \\
 &= x(x+1)(x-1)
 \end{aligned}$$

$$\frac{x^2+1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

Molt. per x

$$\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)} = A + \frac{Bx}{x+1} + \frac{Cx}{x-1}$$

$$\boxed{x=0} \rightsquigarrow \boxed{-1 = A}$$