

Integrazione per sostituzione

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(x) dx = \int_a^b F(G(x)) g(x) dx$$

Sostituzioni che si vedono "a occhio"

Es. 1 $\int x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sin x^2$

Pongo $y = x^2$, $\frac{dy}{dx} = 2x$, $dy = 2x dx$

$$\frac{1}{2} \int \underbrace{2x \cos x^2}_{dy} dx = \frac{1}{2} \int \cos y dy = \frac{1}{2} \sin y = \frac{1}{2} \sin x^2$$

Es. 2 $\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} e^{x^3} \quad [y = x^3 \dots]$

$$\underline{\text{Es. 3}} \quad \int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

[$y = x^2$ oppure anche $y = 1+x^2$]

$$\begin{aligned} \underline{\text{Es. 4}} \quad \int \frac{ax+b}{1+x^2} dx &= a \int \frac{x}{1+x^2} dx + b \int \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{a}{2} \log(1+x^2) + b \arctan x \end{aligned}$$

$$\underline{\text{Es. 5}} \quad \int \frac{dx}{1+2x^2} dx = \int \frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x)$$

$\uparrow$
 $y = \sqrt{2}x$

$$\begin{aligned} \underline{\text{Es. 6}} \quad \int \frac{dx}{3+x^2} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{3}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

In generale $\int \frac{dx}{a+x^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$ per $a > 0$

Es. 7 $\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{1+(x+1)^2} = \arctan(x+1)$

Es. 8 $\int \frac{x+5}{x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+10}{x^2+2x+3} dx =$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx + \frac{1}{2} \int \frac{8}{x^2+2x+3} dx$$

$$= \frac{1}{2} \log(x^2+2x+3) + 4 \int \frac{1}{2+(x+1)^2} dx$$

→ $y = x+1$
 $\frac{dy}{dx} = 1, dy = dx$

$$= \frac{1}{2} \log(x^2+2x+3) + 4 \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$$

Es. 9 $\int \frac{x+5}{4x^2+4x+5} dx = \frac{1}{8} \int \frac{8x+40}{4x^2+4x+5} dx =$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{8x+4}{4x^2+4x+5} dx + \frac{1}{8} \int \frac{36}{4x^2+4x+5} dx$$

$$= \frac{1}{8} \log(4x^2+4x+5) + \frac{3}{2} \int \frac{\boxed{dx} \cdot \frac{2}{2}}{\underbrace{4 + (2x+1)^2}_{y=2x+1}} dy$$

$$y = 2x+1$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \quad dy = 2 dx$$

$$= \frac{3}{4} \int \frac{dy}{4+y^2} = \frac{3}{4} \frac{1}{2} \arctan \frac{y}{2}$$

$$= \frac{1}{8} \log(4x^2+4x+5) + \frac{3}{8} \arctan \frac{2x+1}{2}$$

— 0 — 0 —

Es. 10

$$\int \sqrt{1-x^2} dx =$$

$$x = \sin y, \quad \frac{dx}{dy} = \cos y, \quad dx = \cos y dy$$

$$= \int \sqrt{1-\sin^2 y} \cos y dy = \int \cos y \cdot \cos y dy = \int \cos^2 y dy =$$

BRUTALE: ci sarebbe la seconda dei casi

$$= \frac{y}{2} + \frac{\sin y \cos y}{2} = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x}{2} \cos y =$$

↑
 $y = \arcsin x$

$$= \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2}$$

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

↑
DI NUOVO

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \text{PERICOLOSO}$$

In realtà in questo tutti i passaggi sarebbero leciti, ma in ogni caso è meglio derivare alla fine.

— 0 — 0 —

INTEGRAZIONE FUNZIONI RAZIONALI

$$\text{funzione razionale} = \frac{\text{polinomio}(x)}{\text{polinomio}(x)}$$

Data una funzione razionale è "POSSIBILE" determinare una sua primitiva procedendo in 4 fasi:

- 1 - DIVISIONE
- 2 - FATTORIZZAZIONE
- 3 - SISTEMA LINEARE
- 4 - INTEGRAZIONE

① DIVISIONE. Sia $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Se $\text{grado}(P(x)) < \text{grado}(Q(x))$ si va dirett. alla Fase 2.

Se $\text{grado}(P(x)) \geq \text{grado}(Q(x))$ facciamo la divisione di $P(x)$ per $Q(x)$

$$P(x) = A(x) Q(x) + R(x)$$

↑
QUOZIENTE

↑
RESTO (con $\text{grado}(R(x)) < \text{grado}(Q(x))$)

Ma allora

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A(x) Q(x) + R(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Quindi

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

↑
polinomio
↓
primitiva
facile

↑
funzione raz.
con
grado (Num.) <
grado (Den.)

Pertanto basta saper integrare le funzioni raz. in cui il num. ha grado < del denom.

(2) FATTORIZZAZIONE Scomporre $Q(x)$ ← Denominatore

Ogni polinomio $Q(x)$ a coeff. reali si può scrivere come prodotto di fattori di 1° e 2° grado, a loro volta non ulteriormente scomponibili

FATTO GENERALE

Teoricamente, non è detto che i fattori si trovino esplicitamente

I fattori di 1° grado sono ovviamente non scomponibili
 " 2° " sono NON scomponibili $\Leftrightarrow \Delta < 0$

Al termine della fase 2 avremo scomposto $Q(x)$ nella forma

$$Q(x) = (a_1 x + b_1)^{m_1} (a_2 x + b_2)^{m_2} \cdots (a_k x + b_k)^{m_k} \cdot (c_1 x^2 + d_1 x + e_1)^{n_1} \cdots (c_r x^2 + d_r x + e_r)^{n_r}$$

Scomposizione come prodotto di k fattori di 1° grado
 con mult. $m_1, \dots, m_k$ e r fattori di 2° grado di
 mult. $n_1, \dots, n_r$.

N.B. $\text{grado}(Q(x)) = m_1 + m_2 + \dots + m_k + 2(n_1 + \dots + n_r)$