

Esempio 7

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \underset{G}{\cos x} \cdot \underset{f}{\cos x} \, dx = \underset{G}{\cos x} \cdot \underset{F}{\sin x} - \int \underset{g}{(-\sin x)} \underset{F}{\sin x} \, dx$$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \, dx = \cos x \cdot \sin x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int 1 \, dx - \int \cos^2 x \, dx$$

$$= \cos x \cdot \sin x + x - \underbrace{\int \cos^2 x \, dx}_{\text{lo porto a sx}}$$

GRANDE RITORNO!!

$$2 \int \cos^2 x \, dx = \cos x \cdot \sin x + x \Rightarrow \int \cos^2 x \, dx = \frac{\cos x \cdot \sin x + x}{2}$$

Esempio 8 $\int \underset{f}{e^x} \underset{G}{\cos x} dx = \underset{F}{e^x} \underset{G}{\cos x} - \int \underset{Fg}{e^x} (-\sin x) dx$

$$= e^x \cos x + \int \underset{f}{e^x} \underset{G}{\sin x} dx =$$

→ provare cosa succede con la scelta inversa...

$$= \underset{F}{e^x} \underset{G}{\cos x} + \underset{F}{e^x} \underset{G}{\sin x} - \boxed{\int \underset{Fg}{e^x} \cos x dx}$$

lo porto a sx

GRANDE RITORNO!

$$\cancel{2} \int e^x \cos x dx = \frac{e^x (\cos x + \sin x)}{2}$$

Stessa cosa per integrali del tipo

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx$$

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx$$

Esempio 3

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2} \right) dx$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos(2x) + 1}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} = \frac{x}{2} + \frac{2\sin x \cos x}{4} = \frac{x + \sin x \cos x}{2}$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \right) dx$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} = \dots$$

$$\int \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) \, dx$$

$$= -\frac{\cos(2x)}{4} = \dots$$

Allo stesso modo si fanno gli int. del tipo

$$\int \sin(ax) \cdot \cos(bx) dx$$

(trasformare il prodotto in somma
mediante formule trigonometriche)

$$\int e^{cx} \sin(ax) \cdot \cos(bx) dx$$

(come sopra + grande
ritorno)

Esempio 10 $\int \sin^4 x dx = \int \underset{f}{\sin x} \cdot \underset{g}{\sin^3 x} dx =$

$$= \underset{F}{(-\cos x)} \underset{G}{\sin^3 x} - \int \underset{F}{(-\cos x)} \underset{g}{3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x} dx$$

$$= -\cos x \cdot \sin^3 x + 3 \int \sin^2 x \cdot \overset{(1-\sin^2 x)}{\cos^2 x} dx$$

$$= -\cos x \cdot \sin^3 x + 3 \int \sin^2 x dx - \underbrace{3 \int \sin^4 x dx}_{\text{PORTO A SINISTRA}}$$

GRANDE
RITORNO!

$$4 \int \sin^4 x \, dx = -\cos x \cdot \sin^3 x + 3 \underbrace{\int \sin^2 x \, dx}_{\text{si sa fare.}}$$

Allo stesso modo si fanno tutte le potenze (interi positive) di $\sin x$ e $\cos x$ (ad ogni passaggio per parti l'esponente scende di 2)

— 0 — 0 —

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE Versione ufficiale

$$\begin{aligned} [F(G(x))]_{x=a}^{x=b} &= \int_a^b [F(G(x))]' \, dx \\ &= \int_a^b F'(G(x)) \cdot G'(x) \, dx = \int_a^b f(G(x))g(x) \, dx \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[F(G(x))]_{x=a}^{x=b} &= F(G(b)) - F(G(a)) \\
&= [F(x)]_{x=G(a)}^{x=G(b)} \\
&= \int_{G(a)}^{G(b)} F'(x) dx = \int_{G(a)}^{G(b)} f(x) dx \quad (2)
\end{aligned}$$

① = ② diventa

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(x) dx = \int_a^b f(G(x)) g(x) dx$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE
PER SOSTITUZIONE

Esempio 1

$$\int \frac{\log^3 x}{x} dx =$$

Pongo $y = \log x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad ; \quad dy = \frac{dx}{x}$$

$$= \int y^3 dy = \frac{y^4}{4} = \frac{\log^4 x}{4}$$

N.B. Ho applicato la formula data con
 $f(x) = x^3$, $G(x) = \log x$

Esempio 2

$$\int \frac{dx}{x \log x} =$$

Pongo $y = \log x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad dy = \frac{dx}{x}$$

$$= \int \frac{dy}{y} = \log |y| = \log |\log x|$$

Esempio 3

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx =$$

Pongo $y = \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

$$dy = -\sin x \cdot dx$$

$$= - \int \frac{(-\sin x)}{\cos x} dx \quad dy = - \int \frac{dy}{y} = - \log |y|$$

$$= - \log |\cos x| = \boxed{\log \frac{1}{|\cos x|}}$$

Esempio 4 $\int \tan x \, dx = \int \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \, dx =$

$\neq$ G

$$= (-\cos x) \frac{1}{\cos x} - \int (-\cos x) \left(-\frac{1}{\cos^2 x} \right) (-\sin x) \, dx$$

F G

Fg

$$= -1 + \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -1 + \underbrace{\int \tan x \, dx}$$

GRANDE
RITORNO ??

PORTO A
SINISTRA E OTTENGO

$$\boxed{0 = -1}$$