

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = [F(x)]_{x=a}^{x=b}$$

dove $F(x)$ è una qualunque funzione tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Queste $F(x)$ si chiamano PRIMITIVE di $f(x)$

Esempio 1 $f(x) = x^2$ $F(x) = \frac{x^3}{3}$ è una primitiva di $f(x)$ su tutto $\mathbb{R}$

Per ogni valore della costante c la funzione

$F(x) = \frac{x^3}{3} + c$ è una primitiva della $f(x)$.

Ce ne sono altre? NO perchè abbiamo visto che su un intervallo 2 primitive differiscono per una costante.

Esempio 2 $f(x) = \frac{1}{x}$

$F(x) = \log x$ è una primitiva di $f(x)$
nell'insieme $x > 0$.

Domanda: poiché $\frac{1}{x}$ è def. $\forall x \neq 0$ ha senso cercare una
funzione $F(x)$ tale che $F'(x) = f(x) \quad \forall x \neq 0$.

Risposta: una possibilità è $F(x) = \log|x|$. Per $x > 0$ non
cambia nulla. Per $x < 0$

derivata di $-x$

$$F(x) = \log|x| = \log(-x)$$

$$F'(x) = \frac{1}{-x} \underset{\downarrow}{(-1)} = \frac{1}{x}.$$

Come sono fatte tutte le primitive di $\frac{1}{x}$? Sono $F(x) = \log|x| + C$

NOOO!!!!

Sono

$$F(x) = \begin{cases} \log|x| + C_1 \\ \log|x| + C_2 \end{cases}$$

per $x > 0$

per $x < 0$

posso usare
"2 C diversi"

Conclusione:

* mettere "+c" non serve per il calcolo di $\int_a^b f(x) dx$

* mettere "+c" non serve per determinare l'insieme di tutte le primitive (occorrono "c diversi" su ogni "pezzo" dell'insieme di definizione).

⇒ non ci sono ragioni valide per mettere "+c",
— o — o —

$\int f(x) dx$ = integrale INDEFINITO = sinonimo di primitiva
↑ senza
estremi

— o — o —
CALCOLO DI PRIMITIVE

Casi banali: tabella delle derivate letta al contrario

$$\int e^x dx = e^x, \quad \int \cos x dx = \sin x, \quad \int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| ;$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$

$$\int \sin kx dx = -\cos kx$$

$$\int \cos kx dx = \sin kx$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$$

vale se $a \neq -1$, se $a = -1$ è $\int \frac{1}{x} dx \dots$

Casi semibanalì:

$$\int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3}$$

$$\int \sin(5x) dx = -\frac{\cos(5x)}{5} ;$$

$$\int \frac{1}{x+3} dx = \log |x+3|$$

$$\int \cos(x+2) dx = \sin(x+2) ; \quad \int \cos(2x+1) dx = \frac{\sin(2x+1)}{2}$$

$$\int \frac{1}{3x+2} dx = \frac{\log |3x+2|}{3} = \log \sqrt[3]{|3x+2|}$$



PRECURSO

INTEGRAZIONE PER PARTI

F, G

$F' = f$

$G' = g$

$$[F \cdot G]' = F' \cdot G + F \cdot G' = f G + F g$$

$$F(b) \cdot G(b) - F(a) \cdot G(a) = [F(x) \cdot G(x)]_a^b =$$

Una funzione
è l'integrale
della sua
derivata

$$= \int_a^b [F \cdot G]' dx = \int_a^b (f G + F g) dx$$

$$= \int_a^b f G dx + \int_a^b F g dx$$

$$\int_a^b f G dx = [F G]_a^b - \int_a^b F g dx$$

FORMULA DI
INTEGRAZIONE
PER PARTI

Esempio 1

$$\int x e^x dx = e^x x - \int e^x \cdot 1 dx = x e^x - e^x$$

$G f$

$F G$

$F g$

DERIVARE
PER
CONTROLLO

Esempio 2

$$\int \underset{\substack{G \\ \neq}}{x} \cos x \, dx = \underset{\substack{G \\ F}}{x} \sin x - \int \underset{\substack{g \\ F}}{1} \cdot \sin x \, dx$$

$$= x \sin x + \cos x$$

Esempio 3

$$\int \underset{\substack{G \\ F}}{x^2} \sin x \, dx = \underset{\substack{G \\ F}}{x^2} (-\cos x) - \int \underset{\substack{g \\ F}}{(2x)} (-\cos x) \, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx \quad \swarrow \text{Fatto sopra}$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$$

Con questa tecnica si fanno tutti gli integrali del tipo

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ \text{polinomio in } x}}{p(x)} e^{\alpha x} \, dx, \quad \int p(x) \cos(\alpha x) \, dx, \quad \int p(x) \sin(\alpha x) \, dx$$

N.B. se il polinomio ha grado n , servono
 n passaggi per parti (il grado scende di 1
 ogni volta)

$$\int 3^x dx = \int e^{\log 3 \cdot x} dx = \frac{e^{\log 3 \cdot x}}{\log 3} = \frac{3^x}{\log 3}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} \quad (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$$

— 0 — 0 —

Esempio 4

$$\boxed{\int \log x dx} = \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\log x} dx = x \log x - \int \underset{f}{x} \cdot \underset{g}{\frac{1}{x}} dx$$

$$= x \log x - \int 1 dx$$

$$\boxed{= x \log x - x}$$

Esempio 5 $\int \arctan x dx = \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\arctan x} dx =$

$$x \cdot \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = x \cdot \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

F G

F g

$$= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) = x \arctan x - \log \sqrt{1+x^2}$$

— o — o —

Esempio 6 $\int \log^2 x dx = \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\log^2 x} dx = x \log^2 x - \int \cancel{x} \cdot \underset{F}{2 \log x} \cdot \underset{Fg}{\cancel{\frac{1}{x}}} dx$

f G

F G

Fg

$$= x \log^2 x - 2 \int \log x dx = \boxed{x \log^2 x - 2x \log x + 2x}$$

CONTROLLARE

In questo modo si fanno quelli del tipo

$$\int p(x) \log^k x dx$$

↑
polinomio in x