

Tecniche di calcolo

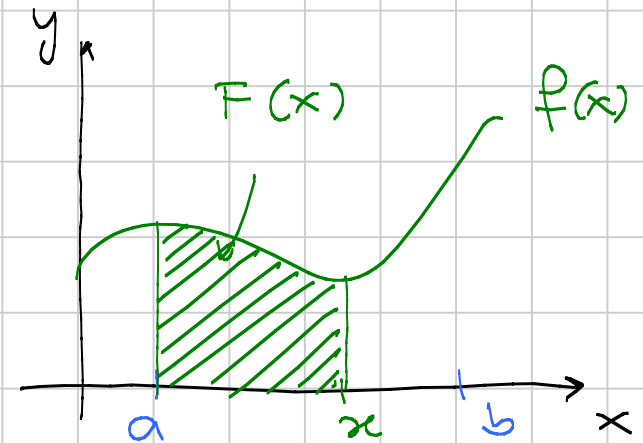
- FUNZIONE INTEGRALE
- TEOR. MEDIA INTEGRALE
- TEOR. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INT.
- PRIMITIVE

FUNZIONE INTEGRALE

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$\uparrow$
 Funzione integrale

$\uparrow \uparrow$
 variabili di integrazione,
 che posso chiamare
 come voglio



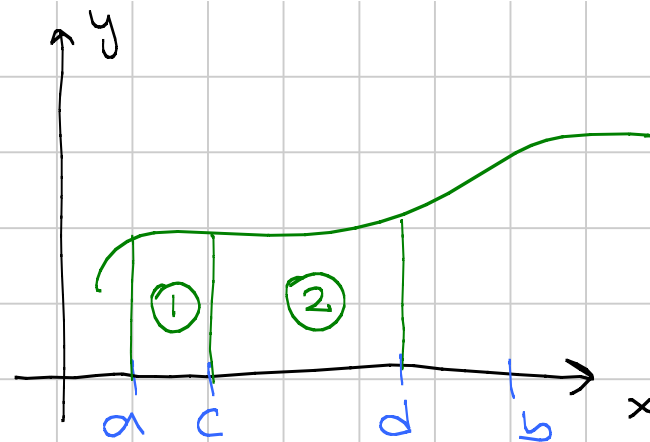
Dato un intervallo $[c, d] \subseteq [a, b]$ si ha che

$$\int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c)$$

$F(d) = \text{integrale tra } a \text{ e } d = \textcircled{1} + \textcircled{2}$

$F(c) = \text{ " " } a \text{ e } c = \textcircled{1}$

$$F(d) - F(c) = \textcircled{2} = \int_c^d f(x) dx$$



Conclusione: se conosco $F(x)$ so calcolare l'integrale di $f(x)$ tra ogni coppia di estremi.
— o — o —

TEO. MEDIA INTEGRALE Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **CONTINUA**.

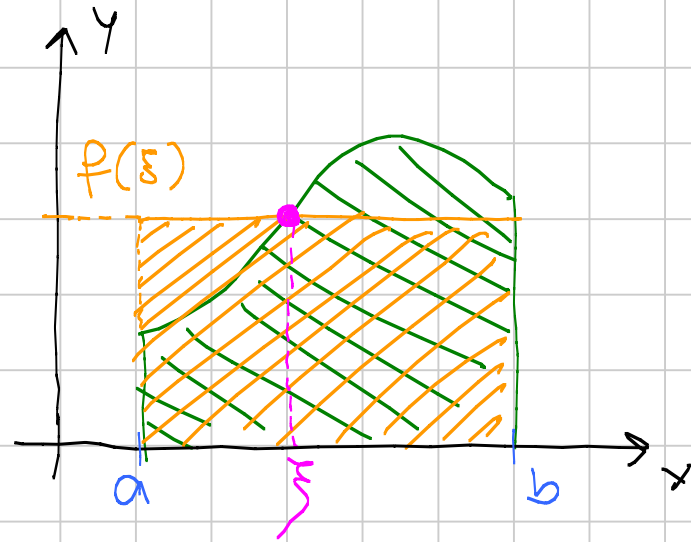
Allora esiste $\xi \in (a, b)$ tale che

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

Significato geometrico

$f(\xi) \cdot (b-a)$ = area di un rettangolo
che ha $[a, b]$ come
base e $f(\xi)$ come
altezza



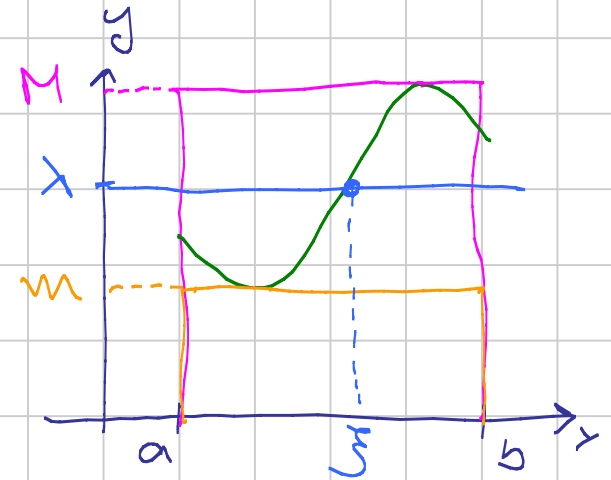
Teo. dice che esiste un rettangolo di
altezza $f(\xi)$ la cui area è uguale
all'area che sta sotto il grafico

Dim. Siano m e M il max ed il min di $f(x)$ in $[a, b]$. Allora

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

||
Area rettangolo
arancione

||
area rett.
rosa



Divido per $(b-a)$

$$m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx}_{\lambda} \leq M$$

numero λ compreso
tra il max ed il min
di $f(x)$

Poichè f è continua, per il teo di esistenza degli zeri, esiste almeno un punto ξ in cui f vale λ .

TEO. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

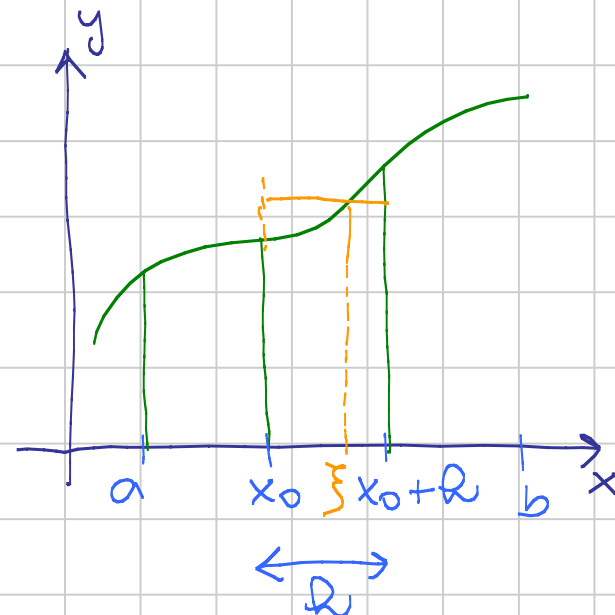
Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, e sia $F(x)$ la sua funzione integrale, cioè

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

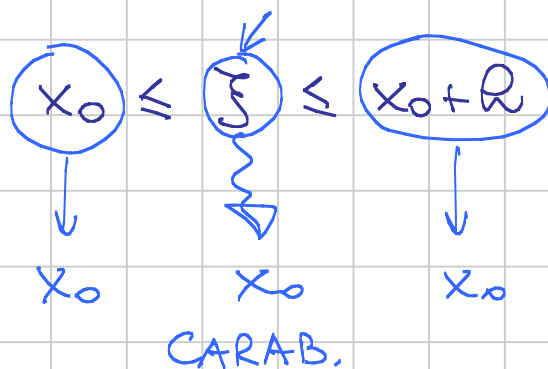
Allora F è derivabile e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Dim. Prendiamo $x_0 \in [a, b]$ e calcoliamo

$$\frac{F(x_0+R) - F(x_0)}{R} = \frac{1}{R} \int_{x_0}^{x_0+R} f(x) dx$$



Teo. media integrale
applicato nell'interv. $\rightarrow = f(\xi)$
 $[x_0, x_0+R]$ DIPENDE DA R



Quando $R \rightarrow 0$
succede

Quindi

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{F(x_0+R) - F(x_0)}{R} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} f(\xi) = f(x_0)$$

" $F'(x_0)$

PRIMITIVE Data una funzione $f(x)$ si dice PRIMITIVA una qualunque funzione $F(x)$ tale che

$$F'(x) = f(x)$$

OSS. Ogni funzione CONTINUA ha una primitiva (per il teo. fond. del calcolo integrale basta prendere la funzione integrale).

Operativamente:

- ① Se so calcolare la funzione integrale so calcolare l'int. tra ogni coppia di estremi
- ② La funzione integrale è una primitiva
- ③ Se io trovo una $F(x)$ tale che $F'(x) = f(x)$ posso dire di aver trovato la funzione integrale?

NO! Le primitive sono tante a priori !!!! MA.....

TEO. Due primitive della stessa funzione continua su un intervallo $[a, b]$ differiscono tra di loro per una costante.

Dim: siano $F_1(x)$ e $F_2(x)$ 2 primitive della stessa $f(x)$.
Allora

$$F_1'(x) = f(x) \qquad F_2'(x) = f(x)$$

$$(F_1 - F_2)'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

ma allora $F_1 - F_2$ è una costante.

Nota bene: se $g'(x) = 0$ in $[a, b]$, allora g è costante in $[a, b]$

Dato un qualunque punto $c \in [a, b]$

$$f(c) - f(a) = \underset{0}{f'(\xi)}(c-a) \Rightarrow \text{in ogni punto } c \text{ il valore } f(c) \text{ è uguale a } f(a)$$

Conclusione: al posto della funzione integrale posso usare una qualunque primitiva per calcolare il valore di un integrale.

$$\int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c) \quad F = \text{funz. integrale}$$

Se uso un'altra primitiva $G(x)$, questa abbiamo detto che è della forma $G(x) = F(x) + k$ $\leftarrow$ costante

$$G(d) - G(c) = F(d) + \cancel{k} - F(c) - \cancel{k} = \int_c^d f(x) dx$$

QUINDI: il calcolo degli integrali si riduce al calcolo di una primitiva di $f(x)$, cioè una funzione $F(x)$ tale che

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

↑ ANTIDERIVATIVE