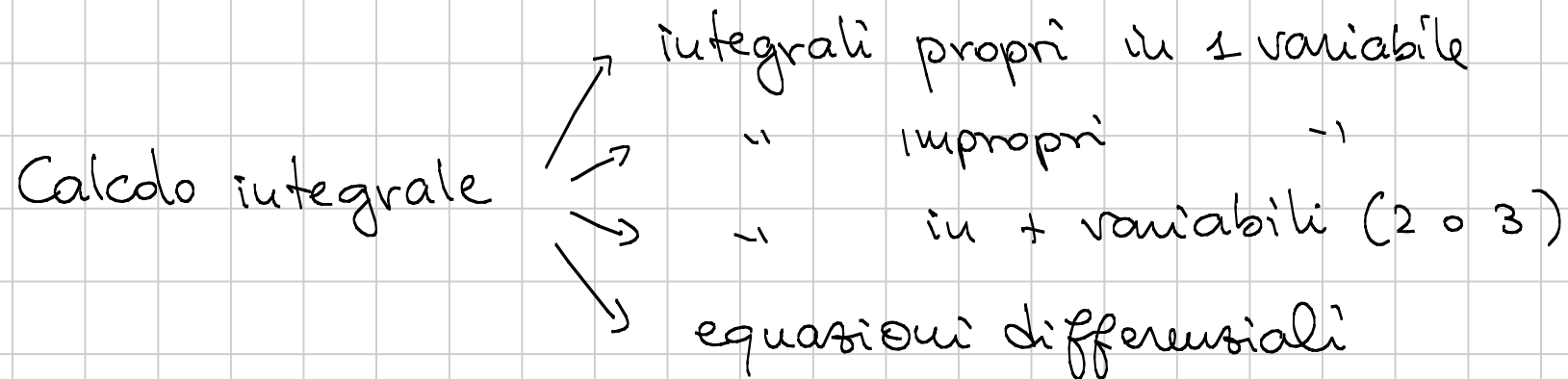




INTEGRALI

- ① Come si indicano
- ② Significato geometrico
- ③ Come si definiscono (definirebbero)
- ④ Come si calcolano

① Notazioni Ingredienti:

* un intervallo $[a, b]$ (limitato) ZONA DI INTEGRAZIONE

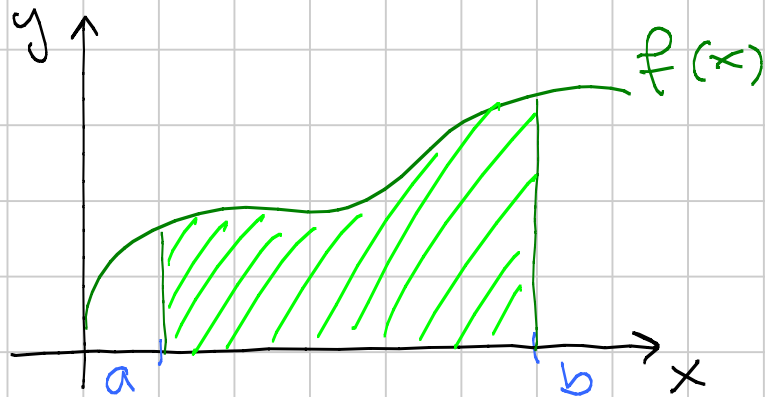
* una funzione $f: [a, b]$ limitata INTEGRANDA

$$\int_a^b f(x) dx$$

ricorda la variabile rispetto a cui si integra

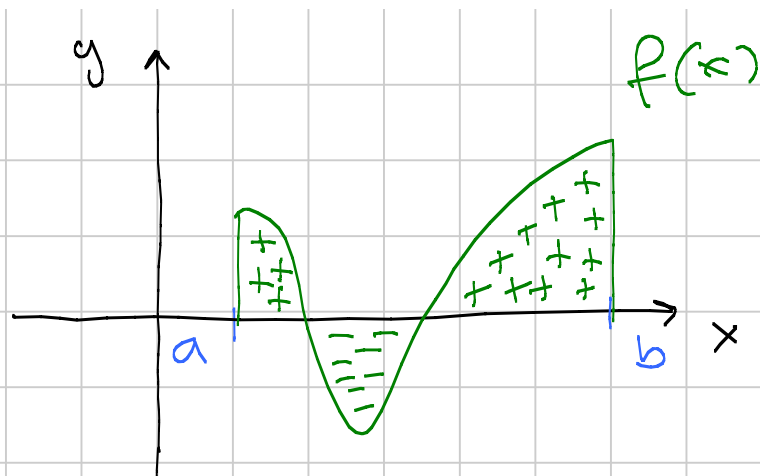
Stilizzazione del simbolo $\int$ che sta per "somma"

② SIGNIFICATO GEOMETRICO:



$$\int_a^b f(x) dx =$$

= area CON SEGNO
della parte di piano compresa
tra grafico di f e
asse x



Se la funzione $f(x)$ non è positiva, allora

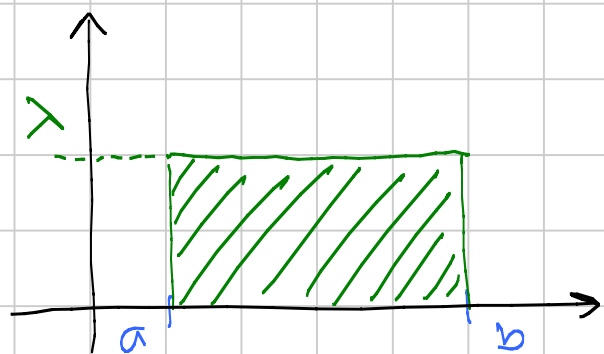
$$\int_a^b f(x) dx = \text{area della regione } (+) - \text{area della regione } (-)$$

③ IDEE DELLA DEFINIZIONE

3 casi $\begin{cases} \nearrow \text{caso BANALE} \\ \rightarrow \text{caso SEMI BANALE} \\ \searrow \text{caso GENERALE} \end{cases}$

Caso banale

$f(x)$ è uguale ad una costante $\lambda \forall x \in [a, b]$

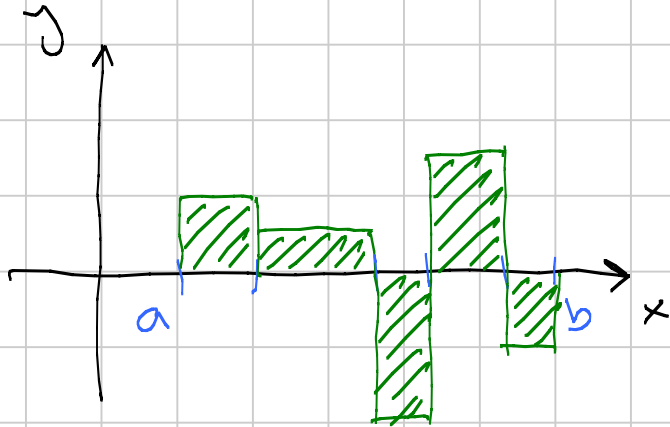


$$\int_a^b f(x) dx = \text{area CON SEGNO del rettangolo} = \lambda (b-a)$$

$\nearrow$ altezza con segno $\uparrow$ base

Caso semibanaale

L'intervallo $[a, b]$ è suddiviso in un numero finito di sottointervalli, su ciascuno dei quali f è costante



In questo caso si pone

$$\int_a^b f(x) dx = \text{somma algebrica delle aree con segno dei sottorettangoli.}$$

Le funzioni di questo tipo si chiamano

FUNZIONI SEMPLICI

"

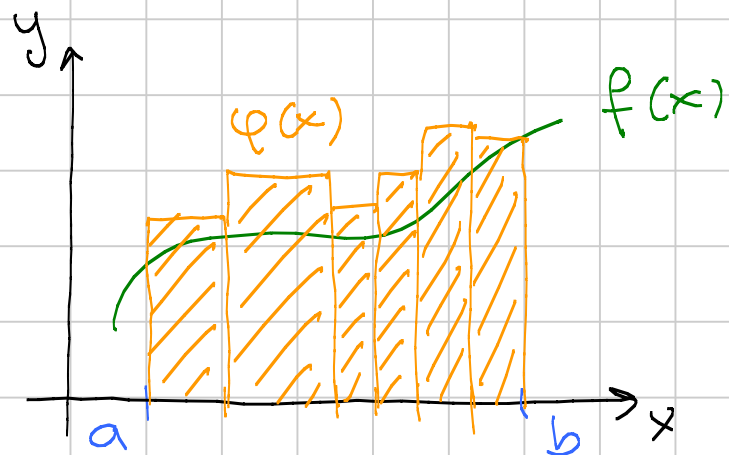
A GRADINO

STEP FUNCTIONS

SINONIMI

Caso generale

$f(x)$ è una qualunque funzione limitata.



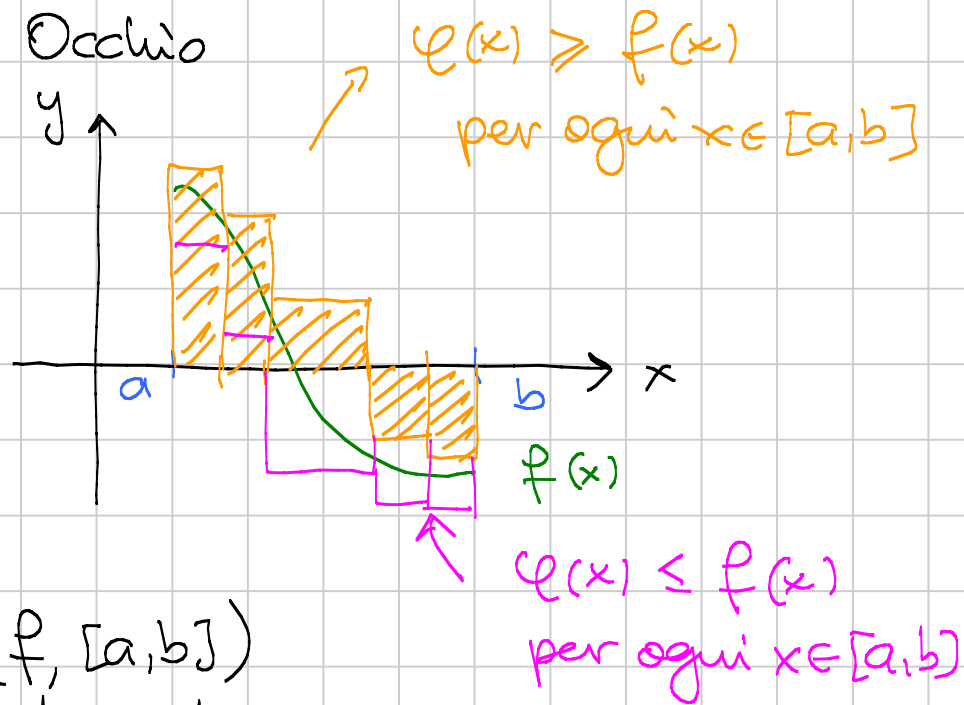
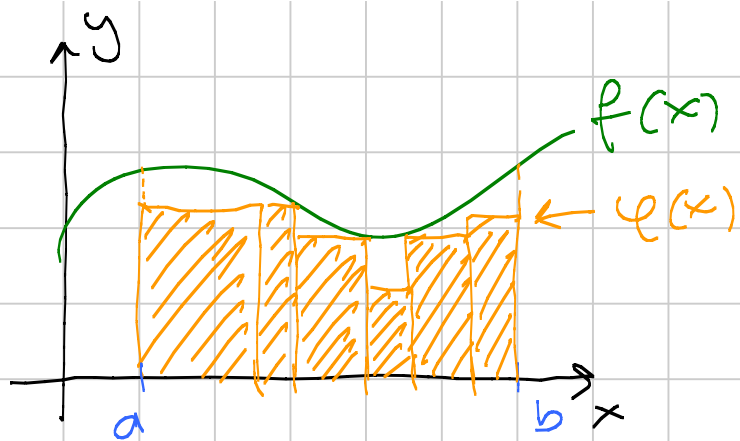
Definiamo l'integrale superiore di $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$

$$I^+(f; [a, b]) =$$

$$= \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi(x) \text{ è una funzione a gradini e } \varphi(x) \geq f(x) \text{ per ogni } x \in [a, b] \right\}$$

Analogamente si definisce l'integrale inferiore :

$$I^-(f; [a, b]) = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi(x) \text{ è una funzione a gradini e } \varphi(x) \leq f(x) \text{ per ogni } x \in [a, b] \right\}$$



OSSERVAZIONE $I^+(f, [a, b])$ e $I^-(f, [a, b])$
 sono OBBLIGATI ad esistere e
 si ha sempre che

$$I^-(f; [a, b]) \leq I^+(f; [a, b])$$

DEFINIZIONE Se accade che $I^-(f; [a, b]) = I^+(f; [a, b])$,
 allora si dice che $f(x)$ è INTEGRABILE
 (secondo RIEMANN) in $[a, b]$ e il valore comune
 è l'integrale cercato.

OSSERVAZIONI ① Esistono funzioni (ORRIBILI) per cui $I^- < I^+$,
cioè non tutte le funzioni sono integrabili

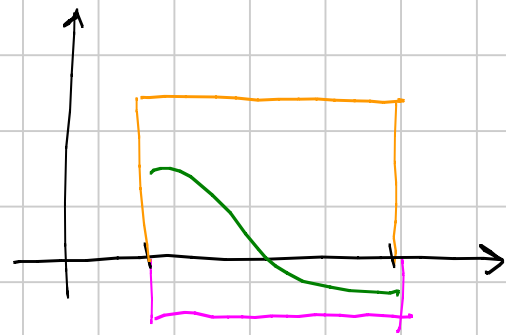
② Si potrebbe dimostrare che le seguenti classi di funzioni sono integrabili:

- * tutte le funzioni continue
- * tutte le funzioni monotone
- * tutte le funzioni con un numero finito di p.ti di discontinuità in cui esiste il limite da destra e da sinistra

③ Tutto quanto detto /scritto vale per funzioni limitate.
Abbiamo usato da qualche parte che $f(x)$ è limitata?

[S] serve per essere sicuri che esistano una funzione
a gradini $\geq f$ e una $\leq f$

SOMME DI RIEMANN: integrali delle
funzioni a gradino



ESTENSIONI DELLA DEFINIZIONE

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_b^a f(x) dx$$

$$\stackrel{\text{def.}}{=} - \int_a^b f(x) dx$$

↑
N.B. $a < b$, quindi sto
mettendo gli estremi
al contrario.

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b (\lambda f(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

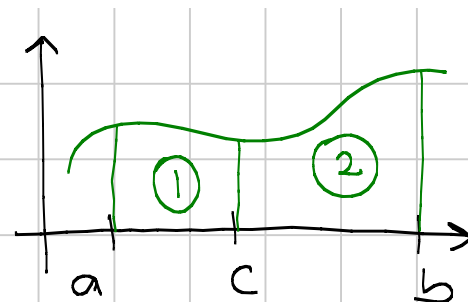
L'integrale tra
 a e b è
un'APPLICAZIONE
LINEARE
(da dove a dove?)

Se $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$, allora $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

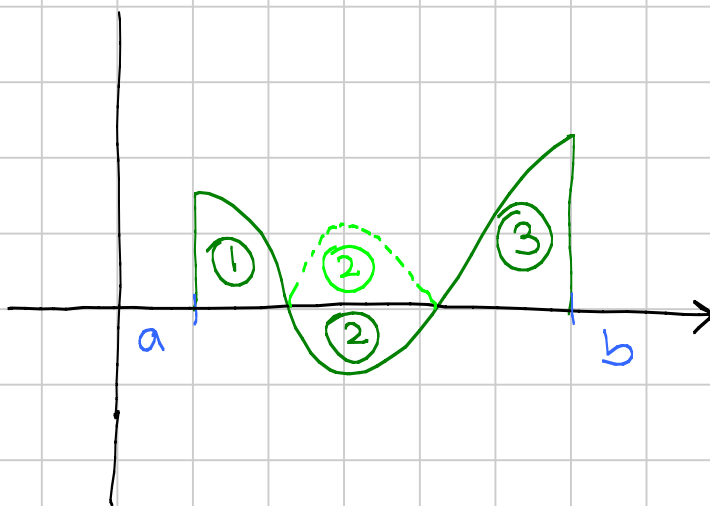
MONOTONIA

Se $c \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c \underset{\textcircled{1}}{f(x) dx} + \int_c^b \underset{\textcircled{2}}{f(x) dx}$$



$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$



①, ②, ③ are positive

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = | \textcircled{1} - \textcircled{2} + \textcircled{3} |$$

$$\int_a^b |f(x)| dx = \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3}$$