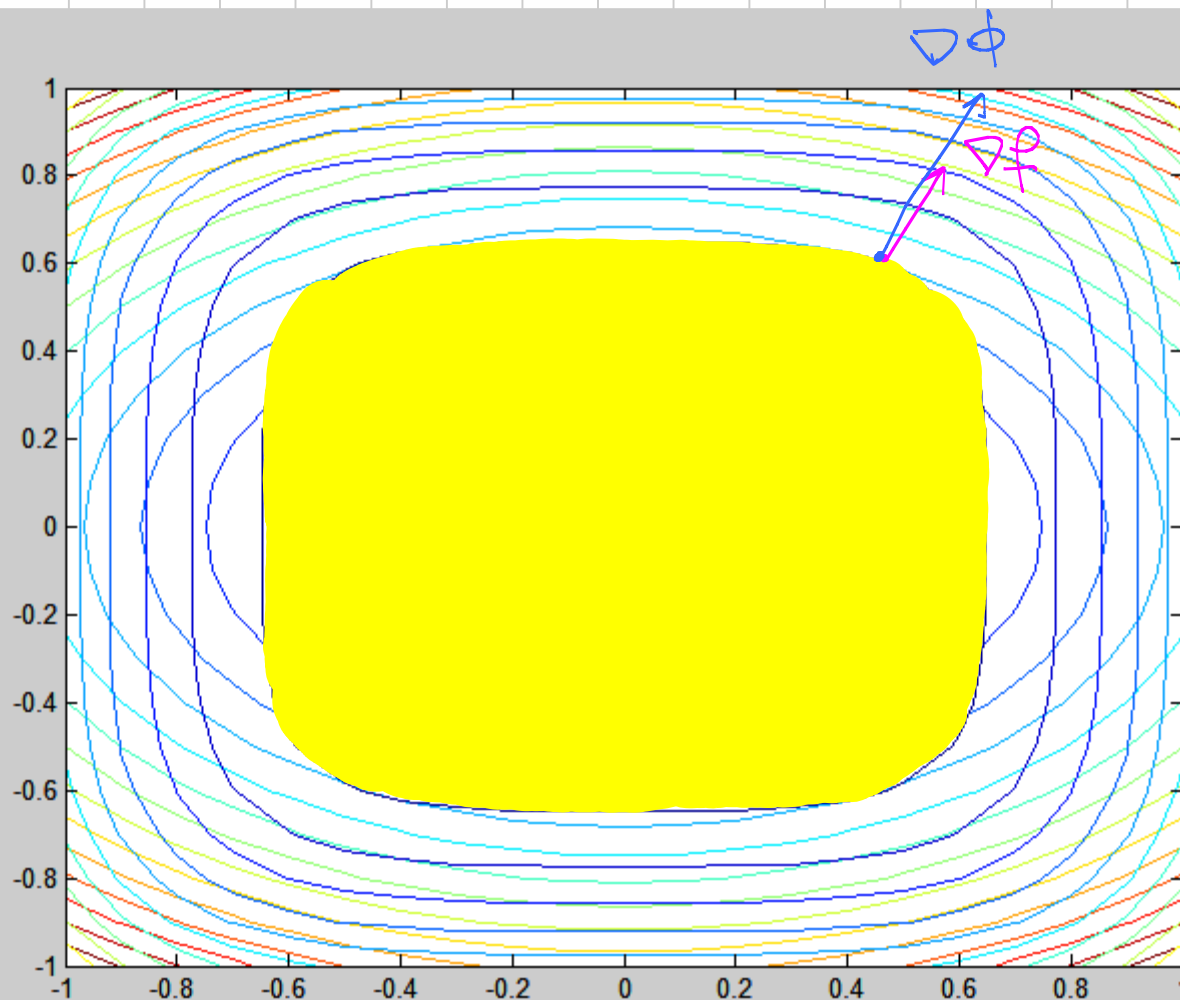


MAT I TLC

ORA 64



Nei p.ti di max/min
sul bordo le linee
di livello di f sono
tangenti al bordo
stesso

$\nabla f \perp$ linea di livello
di f

$\nabla \phi \perp$ linea di livello
di ϕ , cioè al bordo
Essendo $\perp$ a 2 linee
tra di loro tangenti,
saranno per forza
paralleli

Cosa accade se A NON è limitato?

Weierstrass non vale +, quindi max/min possono anche non esistere. INF e SUP esistono comunque.

Esempio 1 $f(x,y) = x^2 + y^2$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=0$, x enorme) max N.E.

$\inf = \min = 0$ p.to di min = $(0,0)$

($f(0,0) = 0$, $f(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \neq (0,0)$)

Esempio 2 $f(x,y) = x^2 - y^2$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=0$, x enorme)

$\inf = -\infty$ ($x=0$, y enorme)

Max e min N.E.

Esempio 3 $f(x, y) = x^6 + y^6$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=0$, x enorme)

Max e min N.E.

$\inf = -\infty$ ($y=0$, x enormemente negativo)

Esempio 4 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=0$, x enorme)

$\inf = -\infty$ ($y=x$, x enorme)

$f(x, x) = x^2 + x^2 - 3x^2 = -x^2$

Esempio 5 $f(x, y) = x^2 + y^2 + 5xy$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=0$, x enorme)

$\inf = -\infty$ ($y=-x$, x enorme) $\rightarrow$ diventa $x^2 + x^2 - 5x^2 = -3x^2$

Esempio 6 $f(x,y) = xy$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=x, x \text{ enorme}$) $\leadsto$ DIVENTA x^2
 $\inf = -\infty$ ($y=-x, x \text{ enorme}$) $\leadsto -x^2$
 in alternativa ($y=1 \nearrow x \text{ enorme}$
 $\searrow x \text{ enorm. neg.}$)

Esempio 7 $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty \dots \dots \inf = \min = 0$ p.to di min : $(0,0)$

È ovvio che $f(0,0) = 0$. Devo dim. che $f(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \neq (0,0)$.

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{y}{2} + \underbrace{\frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4}}_{\text{AGGIUNTO E TOLTO}} + y^2$$

$$= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

È chiaro che $f(x, y) \geq 0$ sempre ed è $= 0 \Leftrightarrow$ i 2 termini sono $= 0$, cioè se

$$\begin{cases} x + \frac{y}{2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{l'unica solus. è } (0, 0)$$

Esempio 8 $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$, $\inf = \min = 0$ p.ti di min: tutta la retta $y = -x$

$$f(x, y) = (x + y)^2 = 0 \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$



Esempio 9 $f(x, y) = e^x + e^y$

$$A = \mathbb{R}^2$$

$\sup = +\infty$ ($y = x$, x enorme) $\max$ N.E.
 $\inf = 0$ $\min$ N.E.

↓ ① $f(x, y) > 0$ sempre $e^x + e^y > 0 + 0 = 0$

② $y = x \leadsto$ DIVENTA $2e^x$ x enorm. neg.

Esempio 10 $f(x, y) = x^2 + y^4 + x^2 y$

$$A = \mathbb{R}^2$$

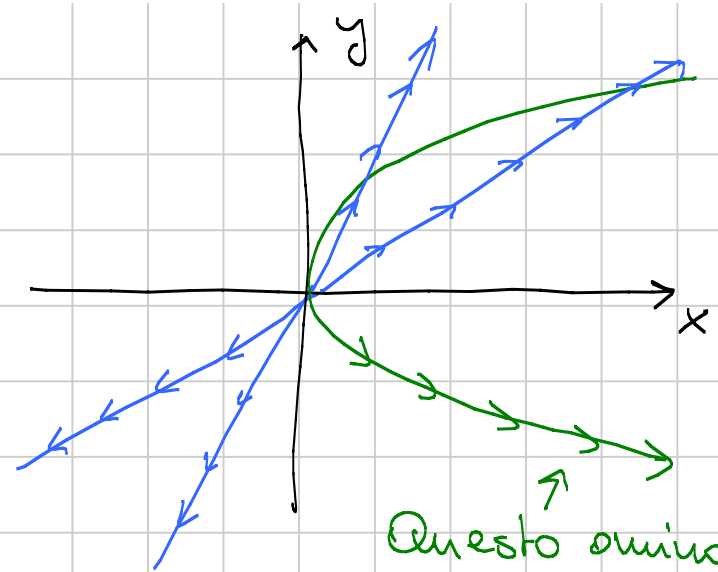
$\sup = +\infty \dots$ Provo $y = -x \leadsto$ DIVENTA $x^2 + x^4 - x^3$
comanda x^4 per $x \rightarrow \pm\infty$

Provo + in generale $y = ux \leadsto$ DIVENTA $x^2 + u^4 x^4 - ux^3$
su ogni retta la funzione tende a $+\infty$ "dai 2 lati"

Prendo $x = y^2$... DIVENTA

$$y^4 + y^4 + y^5$$

prendo y enorm.
neg. e vado a $-\infty$
perchè comanda y^5



Questo omnis
va a $-\infty$

Esempio 11 $f(x, y) = x^2 + y^4 + xy^2$

$$\inf = \min = 0$$

p.to di min : $(0, 0)$

$$x^2 + xy^2 + y^4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} - \frac{y^4}{4} + y^4$$

$$= \left(x + \frac{y^2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^4 \geq 0 \text{ sempre}$$

PIANO TANGENTE

In 1 variabile

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

$$h = x - x_0$$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

eq. retta tangente

In 2 variabili

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + o(\quad)$$

$$\downarrow h = x - x_0$$

$$\downarrow k = y - y_0$$

EQ. PIANO
TANGENTE

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$