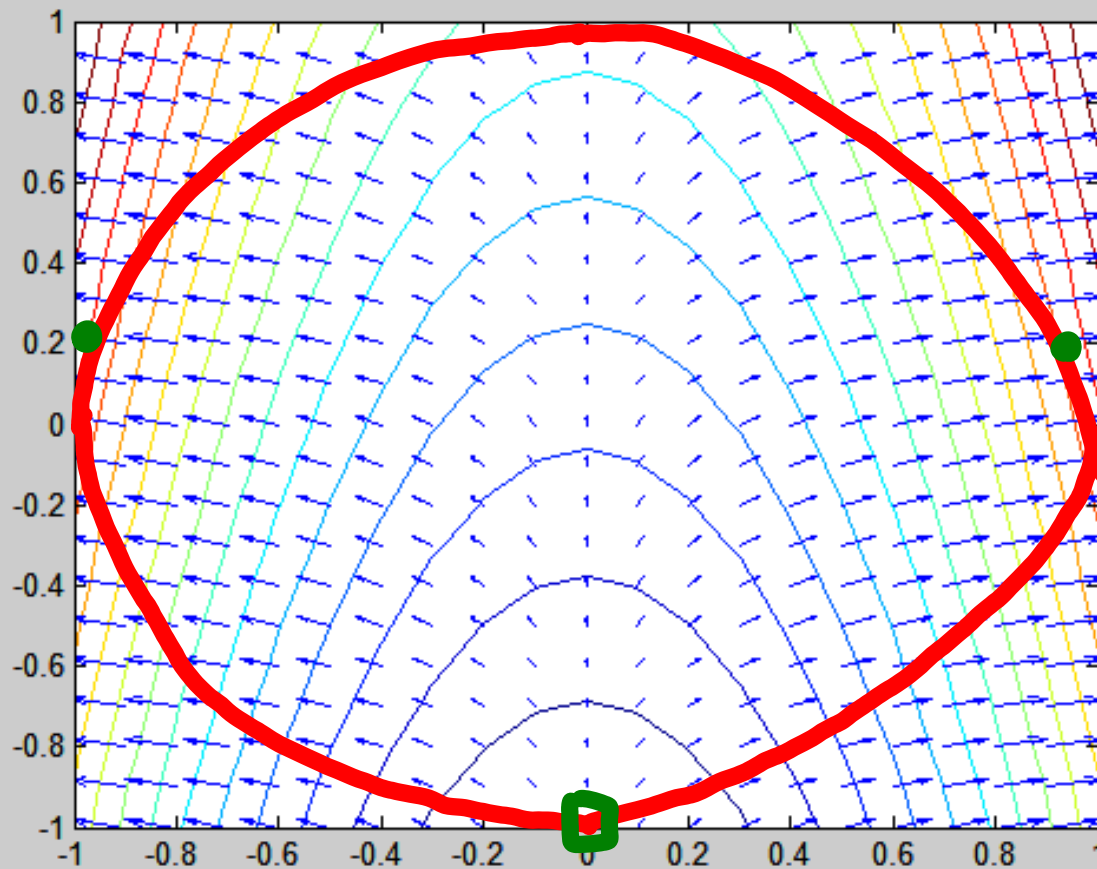


MAT I TLC

ORA 63



$$\nabla f(x, y) =$$
$$= (6x, 1)$$

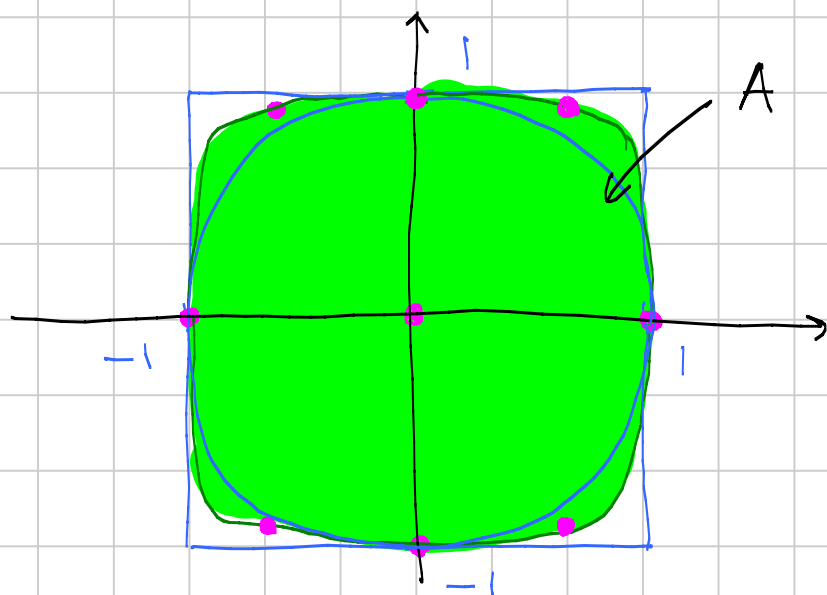
Esempio 3 $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1\}$

Come è fatto l'insieme A ? Si vede che

$$x \in [-1, 1] \text{ e } y \in [-1, 1]$$

$\Rightarrow$ l'insieme A è contenuto nel quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$

$\Rightarrow A$ è limitato



Dico che il cerchio $\subseteq A$

Sia infatti $(x,y) \in$ cerchio

$$x^2 + y^2 \leq 1. \text{ Ma allora}$$

$$x^4 + y^4 \leq x^2 + y^2 \leq 1$$

perché x, y stanno in $[-1, 1]$

Ogni punto del cerchio è anche punto dell'insieme A

Discorso analogo vale per gli insiemi

$$x^k + y^k \leq 1 \quad \text{con } k \text{ esponente PAR}$$

— 0 —

$\Rightarrow$ Max / min esistono

$$\text{Sing. int. : } \emptyset ; \text{ stat. int. : } \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0)$$

Bordo : è l'insieme di equazione

$$\underbrace{x^4 + y^4 - 1}_{\phi(x, y)} = 0$$

1º SISTEMA

$$\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{NO SOLUÇ.}$$

2º SISTEMA

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x = 2\lambda x^3 \\ 4y = 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \begin{cases} x(1-2\lambda x^2) = 0 \\ y(1-\lambda y^2) = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

1ª eq,

$$x(1-2\lambda x^2) = 0$$

$$x = 0$$

3ª eq,

$$y^4 = 1$$

$$y = \pm 1$$

$$1-2\lambda x^2 = 0$$

2ª eq,

$$y(1-\lambda y^2) = 0$$

$$y = 0$$

$$1-\lambda y^2 = 0$$

$$\downarrow$$

$$(0, 1), (0, -1)$$

$$\downarrow 3^a \text{ eq.}$$

$$x^4 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$\downarrow$$

$$(1, 0), (-1, 0)$$

$$\downarrow$$

$$x^2 = \frac{1}{2\lambda}, y^2 = \frac{1}{\lambda}$$

$$\downarrow 3^a \text{ eq.}$$

$$x^4 + y^4 = 1$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1$$

$$\frac{5}{4\lambda^2} = 1 \quad \lambda^2 = \frac{4}{5}$$

$$\lambda = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Se } \lambda = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad x^2 = \frac{1}{2\lambda} < 0$$

$$y^2 = \frac{1}{\lambda} < 0 \quad \Rightarrow \text{No SOLUZ.}$$

$$\text{Se } \lambda = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad x^2 = \frac{\sqrt{5}}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{\sqrt[4]{5}}{2}$$

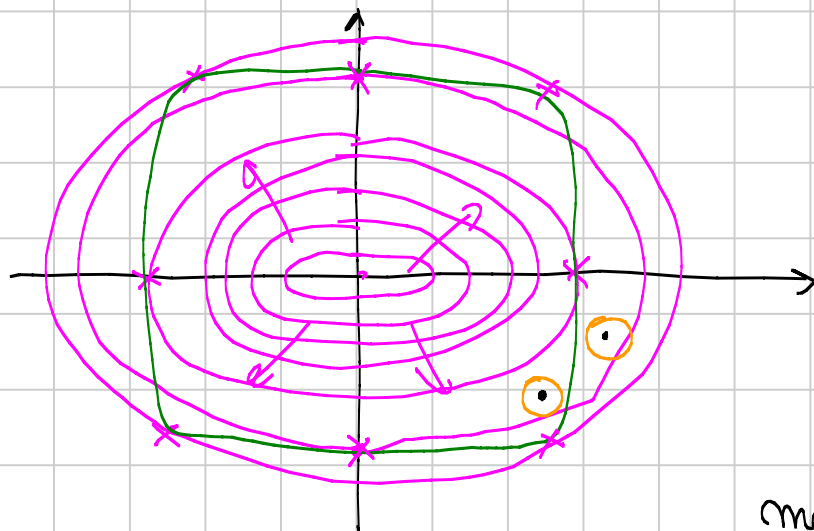
$$y^2 = \frac{1}{\lambda} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \pm \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{2}}$$

4 punti
permutando
i segni

Sostituendo si vede quali sono max/min,

linee di livello

$$x^2 + 2y^2 = \lambda \quad \text{famiglia di ellissi}$$



Perché ero sicuro che il sistema 2° aveva almeno 2 soluzioni?

Consideriamo il problema

$$\begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \{ x^2 + 2y^2 : \underbrace{x^4 + y^4 = 1}_{\substack{\text{L'insieme è il} \\ \text{solo bordo}}} \}$$

Il solo bordo è limitato ed è chiuso

$\Rightarrow$ max e min sul bordo esistono $\Rightarrow$ devo avere almeno 2 soluzioni tra il 1° ed il 2° sistema.

Utilizzo misto di param. e moltiplicatori

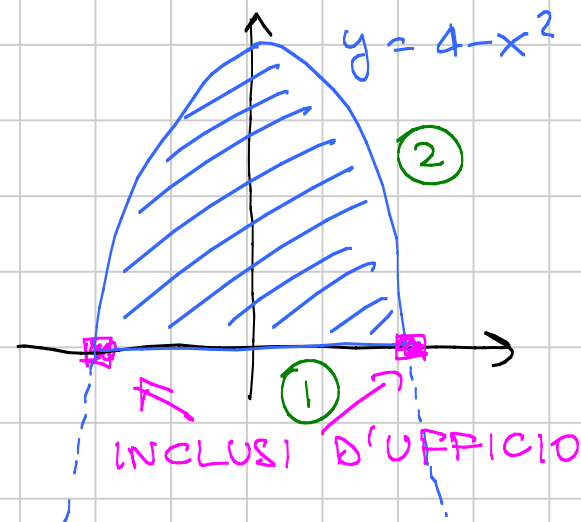
$$\max_{\min} \{ x^2 + y^2 - 2y : 0 \leq y \leq 4 - x^2 \}$$

Uno vuolebbe:

→ usare la param. sul pezzo ①

→ usare i moltiplicatori sul pezzo ② con eq. $\phi(x, y) =$
 $y + x^2 - 4 = 0$

Si può fare, ma



1° bisogna scartare i candidati che vengono a trovarsi nella parte di parabola non compresa nel pezzo ②

2° bisogna includere d'UFFICIO gli estremi del pezzo considerato (BORDO DEL BORDO)

Avremmo dovuto risolvere i sistemi

1° SISTEMA ... $\Rightarrow$ NO SOLUZIONI

2° SISTEMA $\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 2y - 2 = \lambda \\ y = 4 - x^2 \end{cases}$ $x(\lambda - 1) = 0$

$$\begin{array}{lcl} x(\lambda - 1) = 0 & & \\ \swarrow \quad \searrow & & \\ x = 0 & \lambda = 1 & \\ \downarrow 3^a \text{ eq.} & \downarrow 2^a \text{ eq.} & \\ y = 4 & 2y - 2 = 1 ; 2y = 3 ; y = \frac{3}{2} & \\ \downarrow & & \downarrow 3^a \text{ eq.} \\ (0, 4) & x = \pm \dots & \end{array}$$

Esempio Boh?

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^3 = x^2 \}$$

$$\phi(x, y) = y^3 - x^2$$

1° SISTEMA

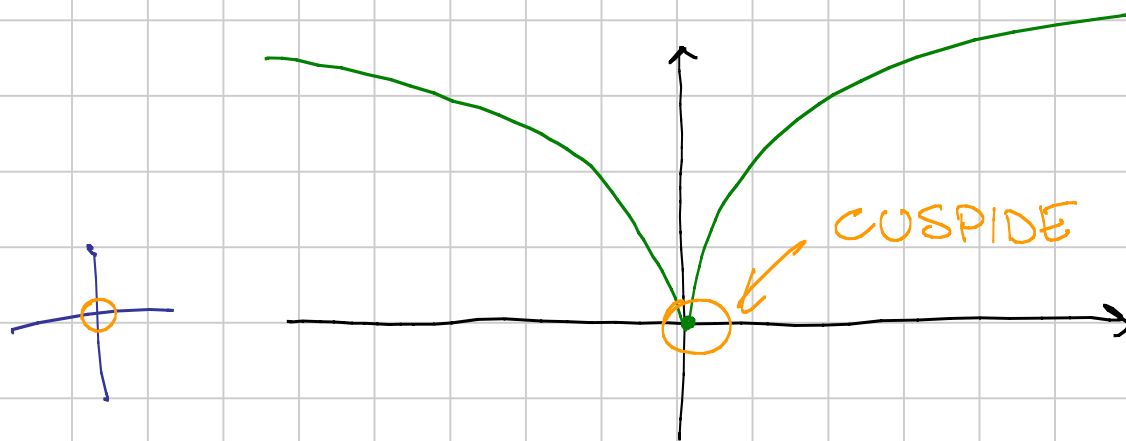
$$\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x = 0 \\ 3y^2 = 0 \\ y^3 = x^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow (0, 0)$ è
soluzione del
sistema

$$y^3 = x^2$$

$$y = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$$

FUNZIONE PARI



Brutalmente: la
soluzione del 1° sistema
di solito corrisponde
a "brutte" dell'in-
sieme $\phi(x, y) = 0$