

Teo. WEIERSTRASS : $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto (chiuso + limitato)
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continua.
Sotto queste ipotesi esistono max e min di f in A .

Ricerca p.ti max / min

↗ p.ti stat. interni : $\nabla f = 0$

→ p.ti sing. interni : ∇f N.E.

↘ Bordo di A → metodo PARAMETRIZZAZIONE

↳ metodo dei MOLTIPLICATORI di LAGRANGE

Def. Sia $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. L'insieme

$$V = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Phi(x, y) = 0 \}$$

l'equazione che descrive
l'insieme ✓

si dice LUOGO DI ZERI della funzione Φ .

Esempio V = cerchio con centro in $(0, 0)$ e raggio 1.

Equazione $x^2 + y^2 = 1$

$$\underbrace{x^2 + y^2 - 1}_{\Phi(x, y)} = 0$$

Teorema del moltiplicatore di LAGRANGE

Sia V il luogo di zeri di una funzione $\Phi(x, y)$. Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Allora i p.ti di max/min della funzione f nell'insieme V si trovano in una delle seguenti 2 categorie

* soluzioni del seguente sistema (1° SISTEMA)

$$\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases}$$

Questo sistema cerca i p.ti
di V in cui $\nabla \phi$ si annulla

3 equazioni

2 incognite: (x, y)

↓

IN GENERE NON
CI SONO SOLUZIONI

* punti di V in cui ∇f è multiplo di $\nabla \phi$, cioè

$$\nabla f = \lambda \nabla \phi$$

↑ NUMERO (il MOLTIPLICATORE)

Questo si riduce a risolvere il sistema (2° SISTEMA)

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \nabla f = \lambda \nabla \phi \\ \text{stare in } V \end{array} \right\}$$

3 equazioni

3 incognite: x, y, λ

⇒ IN GENERE HA NUMERO
FINITO DI SOLUZIONI

Operativamente, stiamo considerando un problema di max/min.
Il bordo dell'insieme è un certo V con
equazione $\phi(x,y) = 0$.

Risolve il 1° sistema; le eventuali soluz. le metto tra i
candidati ad essere pti di max/min.

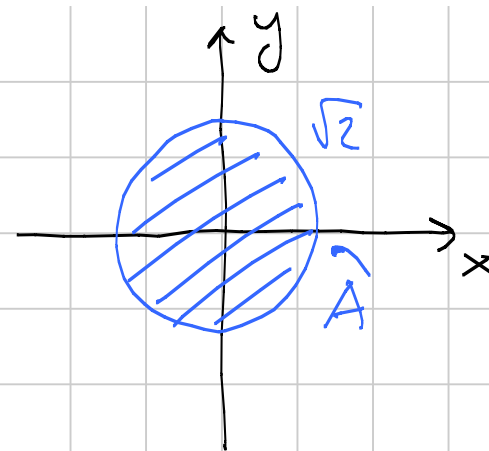
PUNTI SINGOLARI SUL BORDO

Risolve il 2° sistema: trovo varie terne x, y, λ . Dimentico il λ ,
e le coppie (x,y) risultanti le includo
tra i candidati.

PUNTI STAZIONARI RELATIVAMENTE AL BORDO
(non sono pti in cui $\nabla f = 0$)

Esempio 1

$$\begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \left\{ \underbrace{x+2y}_{f(x,y)} : \underbrace{x^2+y^2 \leq 2}_{\text{Descrizione insieme}} \right\}$$



* $W \Rightarrow$ max e min esistono

* sing. interni : $\emptyset$

* stat. interni : $\nabla f(x,y) = (1, 2)$
non si annulla mai : $\emptyset$

* bordo : è la circonferenza di equazione $x^2+y^2=2$, cioè

$$\underbrace{x^2+y^2-2}_{\phi(x,y)} = 0$$

Risolvere i 2 sistemi

1° SISTEMA

$$\begin{cases} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

$\rightarrow x=0$
 $\rightarrow y=0$ } INCOMP.
con 3° eq.

2° SISTEMA

$$\begin{cases} f_x = \lambda \Phi_x \\ f_y = \lambda \Phi_y \\ \Phi = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

$$1^a \text{ eq} \rightarrow x = \frac{1}{2\lambda}$$

$$2^a \text{ eq} \rightarrow y = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Sostituisco nella 3}^a \rightarrow \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 2 \Rightarrow \frac{5}{4\lambda^2} = 2$$

$$x^2 + y^2 = 2$$

$$8\lambda^2 = 5$$

$$\lambda^2 = \frac{5}{8}$$

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

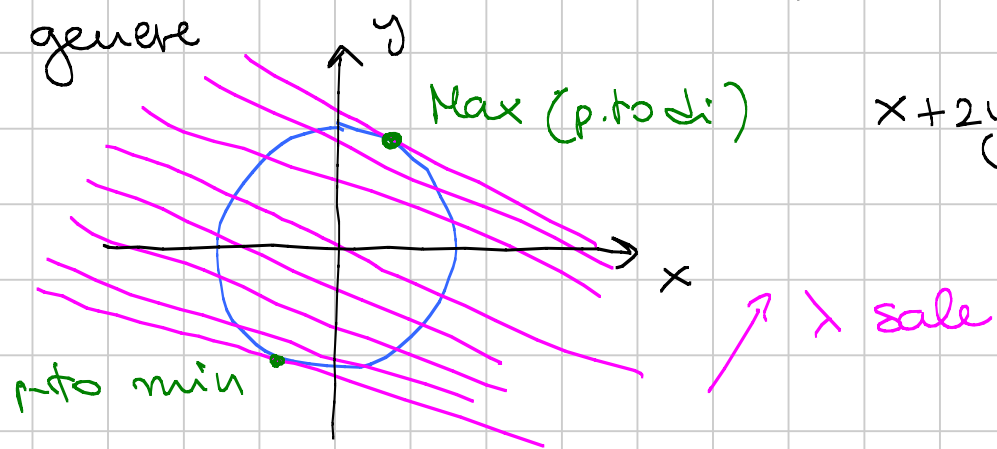
$$\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow y = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

I candidati sono $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$

Uno sarà p.to di max, uno sarà p.to di min.

Con le linee di livello potevamo prevedere un comport. del genere



$$x + 2y = \lambda$$

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{\lambda}{2}$$

Esempio 2 $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \}$ $f(x, y) = 3x^2 + y$

$$\max_{\min} \{ f(x, y) : (x, y) \in A \}$$

$W \Rightarrow$ max e min esistono $\nearrow$ stat. int. : $\nabla f(x, y) = (6x, 1) : \emptyset$
 $\searrow$ sing. int. : $\emptyset$

Bordo : equazione del bordo

$$\underbrace{x^2 + y^2 - 1 = 0}_{\phi(x, y)}$$

1° SISTEMA

$$\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Nessuna soluz.

2° SISTEMA

$$\begin{cases} p_x = \lambda \phi_x \\ p_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases}; \begin{cases} 36x = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \leftarrow \text{NON SEMPLIFICARE LA } x$$

1ª eq. $x(3-\lambda) = 0$

$x = 0$

3ª eq.

$y = \pm 1$

$(0, 1), (0, -1)$

$\left(\frac{\sqrt{35}}{6}, \frac{1}{6}\right), \left(-\frac{\sqrt{35}}{6}, \frac{1}{6}\right) \leftarrow$

$\lambda = 3$

2ª eq.

$1 = 6y \Rightarrow y = \frac{1}{6}$

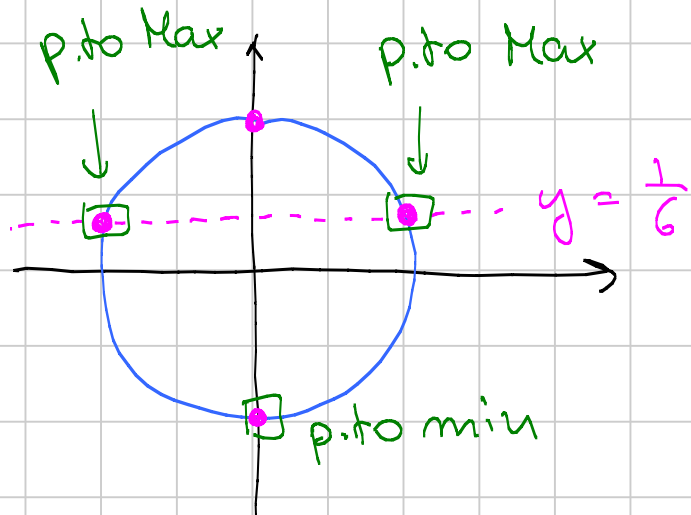
3ª eq.

$x^2 + \frac{1}{36} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{35}{36}$

$\Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{35}}{6}$

Non serve nemmeno trovare λ

Ho ottenuto 4 candidati che vanno a seguire nell'insieme A



$$f(0,1) = 1$$

$$f(0,-1) = -1$$

$$\begin{aligned} f\left(\pm \frac{\sqrt{35}}{6}, \frac{1}{6}\right) &= \cancel{2} \cdot \frac{35}{36 \cdot 12} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{35}{12} + \frac{1}{6} = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

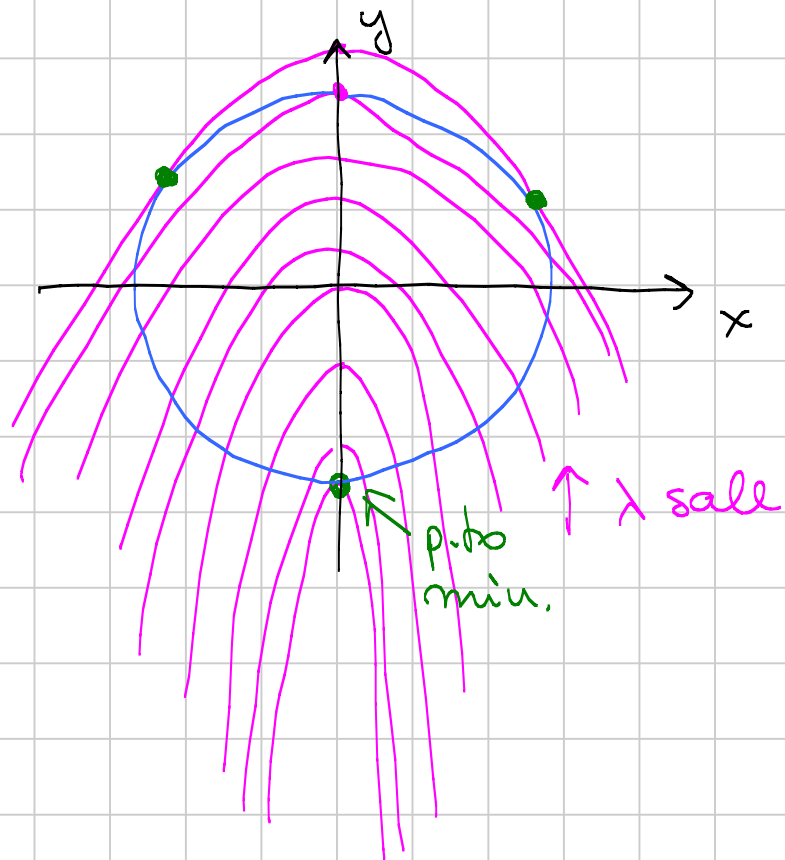
$$\max = \frac{37}{12}$$

$$\text{p.ti di max} \quad \left(\pm \frac{\sqrt{35}}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

$$\min = -1$$

$$\text{p.to di min} \quad (0,-1)$$

Con le linee di livello



$$3x^2 + y = \lambda$$

$$y = \lambda - 3x^2$$