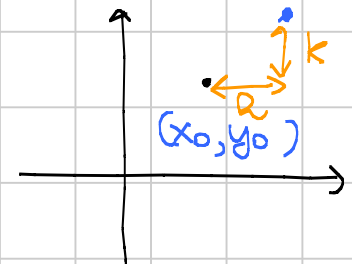


GRADIENTE, DIFFERENZIALE, PIANO TANGENTE

In 1 variabile $f(x_0 + R) = f(x_0) + f'(x_0)R + o(R)$



In 2 variabili:

$$f(x_0 + R, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)R + f_y(x_0, y_0)k + o(\sqrt{R^2 + k^2})$$

Una funzione $r(R, k)$ è $o(\sqrt{R^2 + k^2})$ se

$$\lim_{(R, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{r(R, k)}{\sqrt{R^2 + k^2}} = 0 \quad [\text{Limite in 2 variabili}]$$

Se succede la formula riquadrata si dice che f è differentiabile in (x_0, y_0) .

N.B. In più variabili può succedere che una funzione $f(x, y)$ abbia in un p.to (x_0, y_0) tutte le derivate parziali e direzionali, ma tuttavia non sia differenziabile e neppure continua in (x_0, y_0) .

GRADIENTE Il gradiente di f nel p.to (x_0, y_0) è il vettore che ha come componenti le derivate parziali di f nel punto

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$

↑
NABLA

$$f(x_0 + R, y_0 + K) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)R + f_y(x_0, y_0)K + o(\sqrt{R^2 + K^2})$$

$$\underbrace{(f_x, f_y)}_{\nabla f} \cdot \underbrace{(R, K)}_{\text{prod. scalare}} \quad \text{||} \quad \underbrace{\sqrt{R^2 + K^2}}_{\|(R, K)\|}$$

Riscriviamo tutto in notazione vettoriale.

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad R \in \mathbb{R}^n \quad R = (R_1, \dots, R_n) \text{ incremento}$$

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0)}_{\text{GRADIENTE}} \cdot R + o(\|R\|)$$

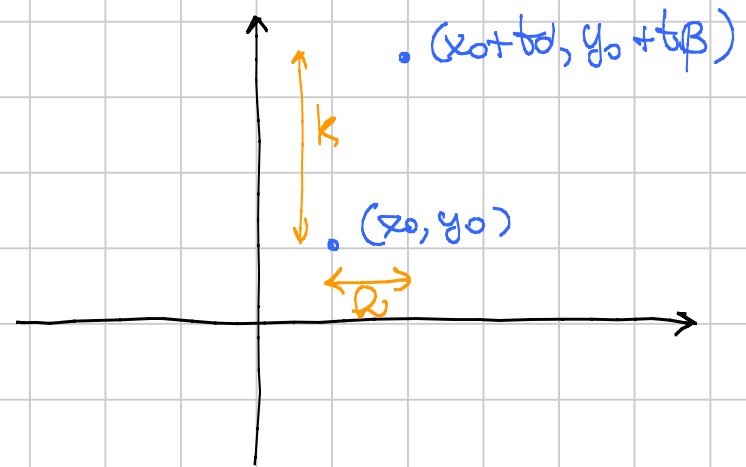
prod. scalare tra vettori
n-dimensionali

GRADIENTE E DERIVATE DIREZIONALI

$$f(x_0 + R, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(\cdot)R + f_y(\cdot)k + o(\sqrt{R^2 + k^2})$$

Quando mi muovo nella dir. data da $v = (\alpha, \beta)$
ho che $R = t\alpha$ $k = t\beta$ (con t che poi tenderà a 0)

$$\begin{aligned} f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) &= f(x_0, y_0) + \\ &+ f_x(\cdot)t\alpha + f_y(\cdot)t\beta \\ &+ o(t) \end{aligned}$$



$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) - f(x_0, y_0)}{t} = f_x(x_0, y_0)\alpha + f_y(x_0, y_0)\beta$$

$(f_x, f_y) \cdot (\alpha, \beta)$

Notte le derivate parziali e la direzione v , posso calcolare la derivata nella direz. v .

In notaz. vettoriale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) &= \underbrace{\nabla f(x_0)}_{\substack{\uparrow \\ \text{prodotti} \\ \text{di numeri}}} \cdot \underbrace{v}_{\substack{\uparrow \\ \text{prod. scalare}}} \\ &= \|\nabla f(x_0)\| \cdot \|v\| \cdot \cos \theta \quad \substack{\uparrow \\ \text{angolo compreso}} \end{aligned}$$

Limitiamoci alle direzioni date dai versori $\|v\| = 1$.

La deriv. direz. dipende SOLO dal coseno dell'angolo compreso

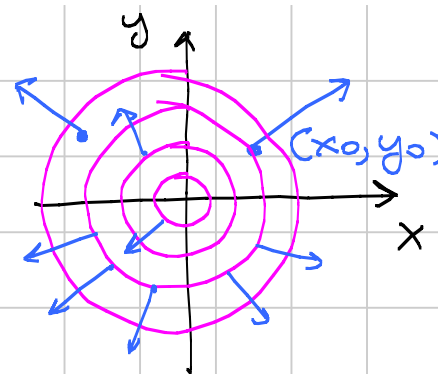
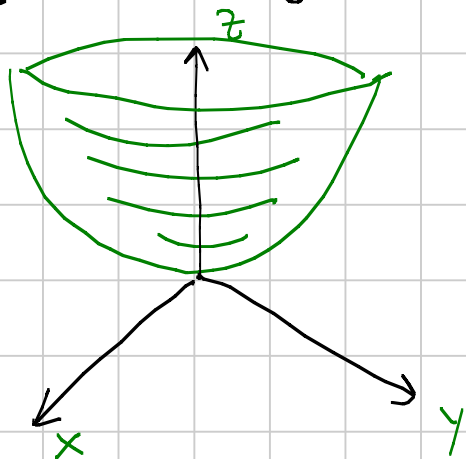
In particolare : $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$ è MASSIMA quando $\cos\theta = 1$, cioè quando $\theta = 0$, cioè quando la dir. v è $\parallel$ al gradiente con lo stesso verso;

$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$ è MINIMA quando $\theta = 180^\circ$, cioè quando v è parallelo al gradiente, ma nella direz. opposta

$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = 0$ quando $v \perp \nabla f$.
 $\uparrow$
perp.

SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL GRADIENTE È la direzione anzitutto nella quale la funzione sale maggiormente

Esempio 1 $f(x,y) = x^2 + y^2$



Come sono messi gradiente e linee di livello?

∇f è $\perp$ alle linee di livello e punta nella direzione in cui λ sale

$$\nabla f(0,0)$$

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$$

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$