

MAT I TLC

Titolo nota

ORA 58

19/11/2006

$$f(x, y) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

↑ ↑
numeri

$$f(x)$$

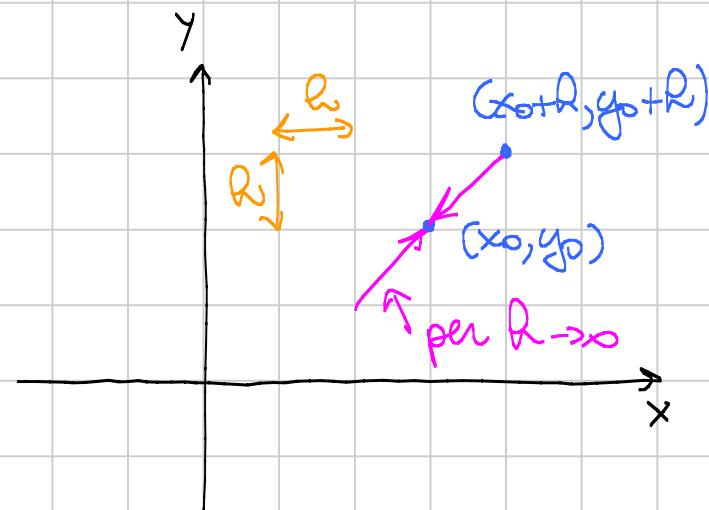
↑
vettore

numeri
↓ ↓
 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

DERIVATE PARZIALI E DIREZIONALI

Sia $f(x, y)$ e sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

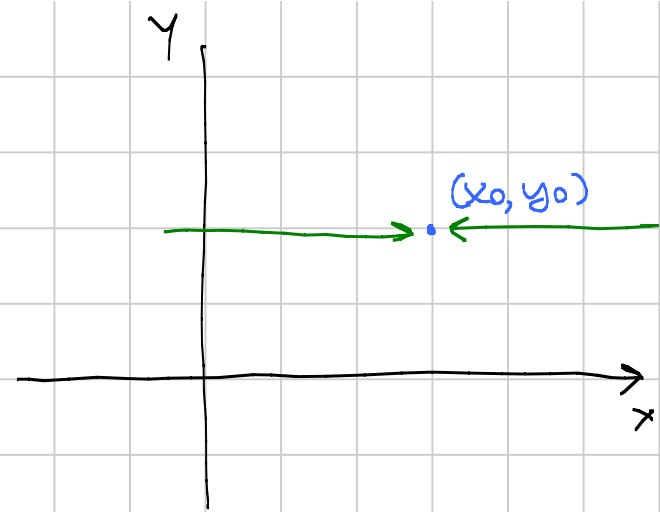


$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se esiste ed è reale si dice
DERIVATA PARZIALE RISPETTO A x
nel punto (x_0, y_0) e si indica con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad f_x(x_0, y_0).$$

Analogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$



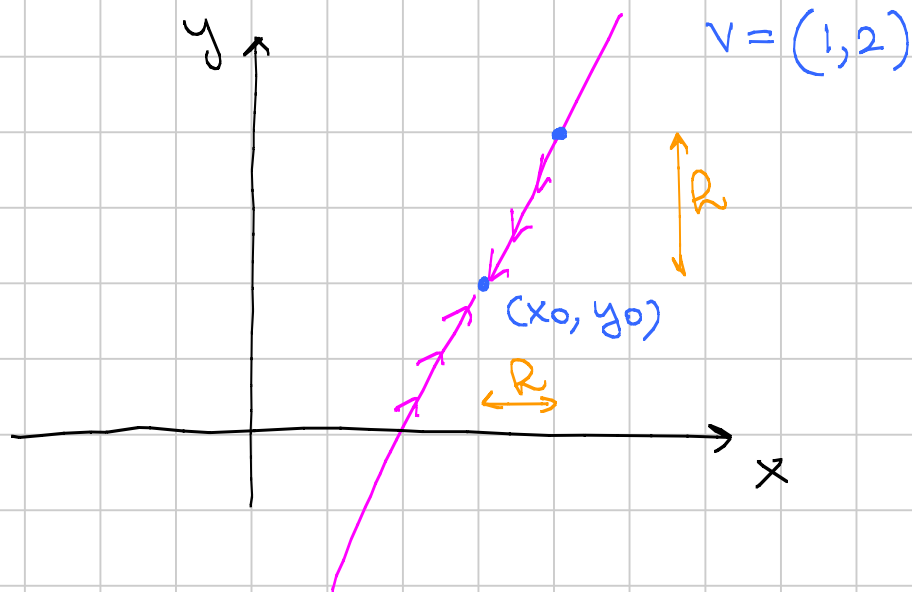
Più in generale posso fissare un vettore $V = (\alpha, \beta)$ $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ e considerare

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha R, y_0 + \beta R) - f(x_0, y_0)}{R}$$

se esiste ed è $\in \mathbb{R}$ si dice

DERIVATA DI f LUNGO
LA DIREZIONE V e
si indica con

$$\frac{\partial f}{\partial V}(x_0, y_0)$$



Le derivate parziali sono esempi particolari di derivate d'irez.

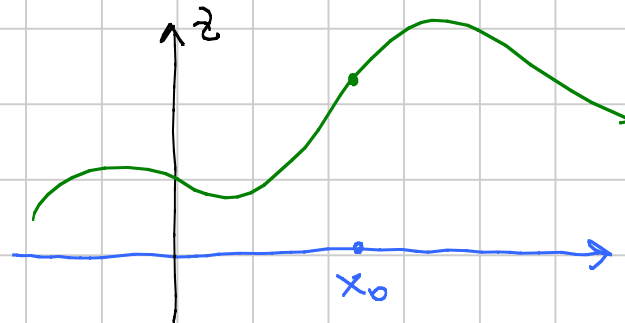
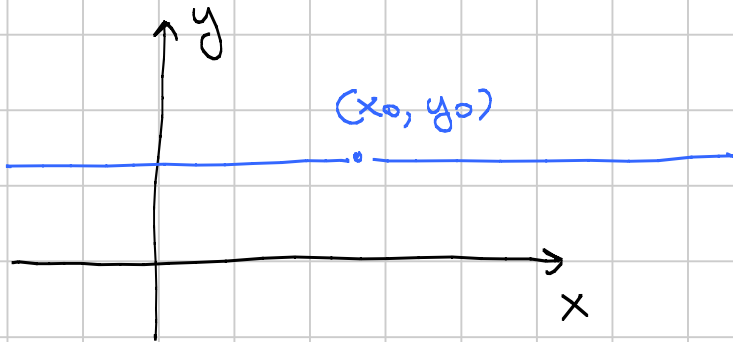
f_x è la derivata nella direzione data da $(1, 0)$] BASE
 f_y " " " " $(0, 1)$] CANONICA

Der. d'irez. in notazione vett.

$x_0 \in \mathbb{R}^2$ (idem se $x_0 \in \mathbb{R}^k$)
 $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h v) - f(x_0)}{h}$$

Significato geometrico delle derivate parz. e d'irez.



La derivata parziale è la derivata nel punto x_0 della funzione di 1 variabile che rappresenta la quota di un omينو che percorre la linea passante per (x_0, y_0) e // asse x sul grafico

— o — o —

Cosa succede se prendo $v = (2, 0)$?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h, y_0) - f(x_0, y_0)}{2h} \cdot 2 = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Conseguenza: le derivate direzionali + interessanti sono quelle corrispondenti a direzioni date da vettori (tutte le altre sono semplicemente dei multipli)

— o — o —

Come si calcolano?

$$f(x, y) = x^2 + 3xy - 5y^4$$

$$x^2 + 3kx - 5k^4$$

$$f_x = 2x + 3y$$

$$f_y = 3x - 20y^3$$

$$f_{xx} = 2, \quad \boxed{f_{xy} = 3}, \quad \boxed{f_{yx} = 3}, \quad f_{yy} = -60y^2$$

— 0 — 0 —

$$f(x, y) = x \sin y^2$$

$$f_x = \sin y^2$$

$$f_y = x \cdot \cos y^2 \cdot 2y = 2xy \cos y^2$$

$$f_{xx} = 0, \quad \boxed{f_{xy} = 2y \cos y^2}, \quad \boxed{f_{yx} = 2y \cos y^2}, \quad f_{yy} = 2x [y \cos y^2]'$$
$$= 2x [\cos y^2 - y \cdot \sin y^2 \cdot 2y]$$

A priori uno può aspettarsi che le derivate parziali di una funz. di 2 variabili sono

deriv. prime $\rightarrow 2$

" seconde $\rightarrow 4$

" terze $\rightarrow 8$

" k -esime $\rightarrow 2^k$

e per una funz. di n variabili
le deriv. k -esime sono
 n^k

Teorema di inversione dell'ordine di derivazione. Nei casi decenti

si ha che $f_{xy} = f_{yx}$

diciamo se f_{xy} e
 f_{yx} esistono e
sono continue

Conseguenza Anche per una derivata
 k -esima di una funzione di n variabili quello che conta
è quante volte si deriva rispetto a ciascuna variabile, e non
l'ordine in cui si eseguono le derivate.

Esempio $n=2$ $k=4$ derivate quarte. Quante e quali sono?

$$f_{xxxx} = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$$

$$f_{yyyy} = \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$$

↓
5

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} = f_{xxx y} = f_{xx y x} = f_{x y x x} = f_{y x x x}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} = f_{x y y y} = f_{y x y y} = f_{y y x y} = f_{y y y x}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = f_{xx yy} = f_{xy xy} = f_{xy y x} = f_{yx xy} = f_{yx y x} = f_{yy x x}$$

In generale le deriv. k -esime di una funz. di 2 variabili sono $k+1$ (risp. a x posso derivare $0, 1, 2, \dots, k$ volte)

$\underbrace{\hspace{10em}}_{k+1 \text{ possibilità}}$