

VETTORI m-DIMENSIONALI

 $\mathbb{R}^m$ $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$$

↑
vettore↑ ↑
componenti (sono numeri)

$$(1, 2, 3) \neq (1, 3, 2)$$

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

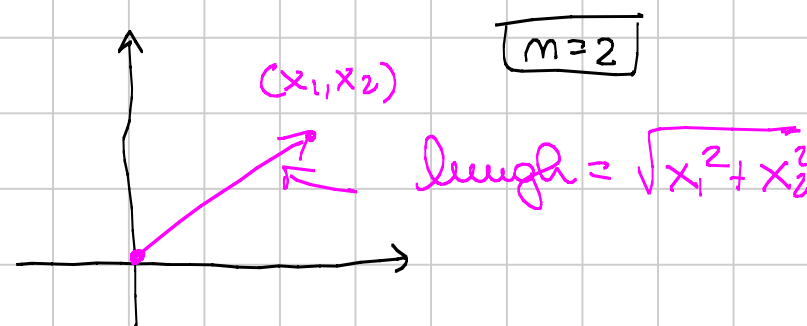
$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad \text{somma di 2 vettori}$$

$$\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \quad \text{prodotto di un numero } \lambda \text{ per un vettore } \vec{x} : \text{viene un vettore}$$

NORMA DI UN VETTORE

$$|\vec{x}| = \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \text{lunghezza del vettore}$$

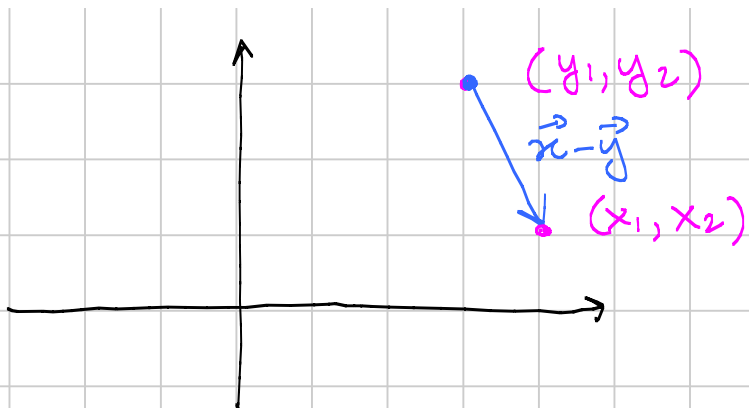


DISTANZA TRA 2 VETTORI

$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

$$= \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

$$\vec{x} - \vec{y} = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$$



lunghezza di $\vec{x} - \vec{y}$ = norma di $\vec{x} - \vec{y}$
 $= \text{dot}(\vec{x}, \vec{y})$

PRODOTTO SCALARE

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

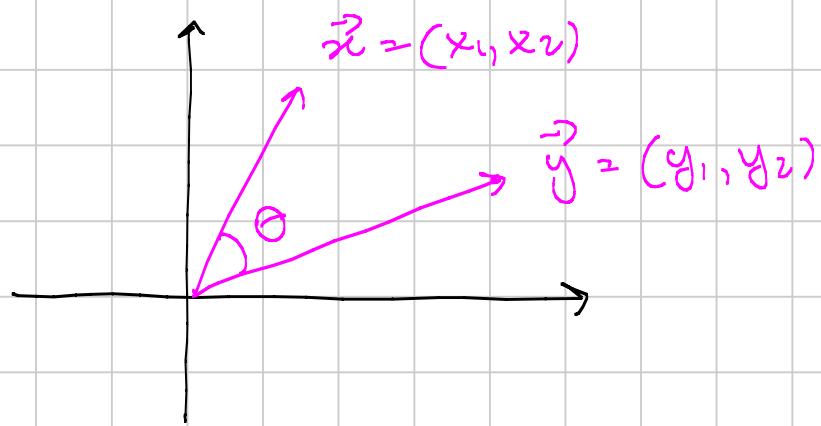
$(\vec{x}, \vec{y}) \equiv$

Il prodotto scalare ha in INPUT 2 vettori
 e il risultato è un numero

SIGNIFICATO GEOMETRICO

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \theta$$

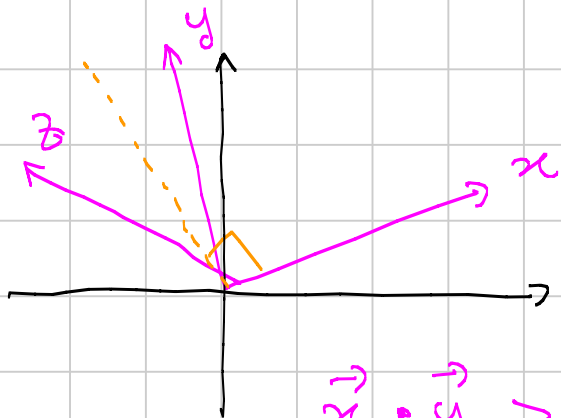
$\uparrow$ prod. scal. $\uparrow$ prod. numeri $\leftarrow$ angolo compreso tra i 2 vettori



Conseguenze:
 2 vettori non nulli sono
 perpendicolari $\Leftrightarrow \cos \theta = 0$
 $\Leftrightarrow$ il prodotto scalare è $= 0$.

$\vec{x} \cdot \vec{y} > 0 \Leftrightarrow$ l'angolo compreso è $< 90^\circ$

$\vec{x} \cdot \vec{y} < 0 \Leftrightarrow$ l'angolo compreso sta tra 90° e 180°



$$\vec{y} \cdot \vec{z} > 0$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} > 0, \quad \vec{x} \cdot \vec{z} < 0$$

VERSORI Un versore è un vettore di lunghezza 1.

In generale, se $\vec{x}$ è un vettore non nullo $\vec{x} \neq \vec{0} = (0, \dots, 0)$ allora
$$\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$
 è un versore

Legame tra norma e prodotto scalare

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\| &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 + \dots + x_n \cdot x_n} \\ &= \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}\end{aligned}$$

Proprietà del prodotto scalare (seguono dalla def.)

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) &= \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z} & \vec{x} \cdot \vec{y} &= \vec{y} \cdot \vec{x} \\ \vec{x} \cdot (\lambda \vec{y}) &= \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y})\end{aligned}$$

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y})$$

$$= \vec{x} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{x} + \vec{y} \cdot \vec{y}$$

uguali

$$= \underbrace{\|\vec{x}\|^2}_0 + \underbrace{\|\vec{y}\|^2}_0 + \underbrace{2\vec{x} \cdot \vec{y}}_0$$

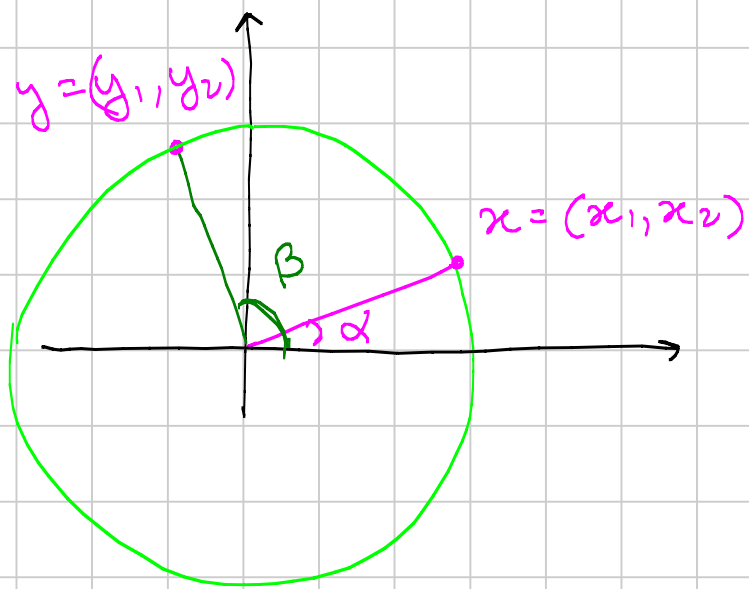
Dim. nel caso $n=2$ della formula $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \theta$

Posso dividere per $\|\vec{x}\|$ e $\|\vec{y}\|$

$$\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \cdot \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} = \cos \theta$$

vettori

basta dunque dimostrare
che il prodotto scalare di 2
vettori è $\cos \theta$



$$x_1 = \cos \alpha, \quad x_2 = \sin \alpha$$

$$y_1 = \cos \beta, \quad y_2 = \sin \beta$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \cos(\beta - \alpha)$$

Angolo compreso
tra i 2 vettori

Funzione di 2 o più variabili

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

(2 variabili in partenza, 1 in arrivo)

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Notazione con le componenti

$$f(\underbrace{x, y}_{\text{componenti}}) = x^2 + 3xy, \quad f(\overset{\uparrow}{x}, \overset{\uparrow}{y}, \overset{\uparrow}{z}) = \dots$$

numeri

Notazione vettoriale

$$f: \mathbb{R}^{18} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(\overset{\uparrow}{\vec{x}}) \text{ oppure anche } f(\overset{\uparrow}{x})$$

vettore

vettore

Si intende che $x \in \mathbb{R}^{18}$

$$x = (\overset{\uparrow}{x_1}, \overset{\uparrow}{x_2}, \dots, \overset{\uparrow}{x_{18}})$$

numeri

GRAFICI

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{GRAFICO}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$" = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$" = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w = f(x, y, z)\}$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$" = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}$$