

# MAT I TLC

ORA 54

Esempio 1  $a_1 = 1000$   $a_{n+1} = \frac{n^{1000}}{2^n} a_n$

[Se uno prova a calcolare i primi termini]

$$a_2 = \frac{1^{1000}}{2^1} a_1 = \frac{1}{2} a_1 = 500, \quad a_3 = \frac{2^{1000}}{2^2} 500 = 500 \cdot 2^{998}$$

$$a_4 = \frac{3^{1000}}{2^3} a_3 = \frac{3^{1000}}{2^3} 2^{998} \cdot 500 = 500 \cdot 2^{995} \cdot 3^{1000}$$

DIVENTANO ENORMI ]

In realtà  $a_n \rightarrow 0$

PIANO 1

(i)  $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  INDU8.

(ii)  $a_n \rightarrow 0$  RAPPORTO

## PIANO 2 con monotonia

(i)  $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii)  $a_{n+1} \leq a_n$  definitivamente [non appena  $\frac{n^{1000}}{2^n} \leq 1$ ]

(iii)  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(iv)  $l = 0$

INDUZIONE

SOLITO

SOLITO

— 0 — 0 —

Esempio 2

$$a_{n+1} = n a_n^2$$

$$a_1 = 1$$

PIANO (i)  $a_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii)  $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii)  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv)  $l = +\infty$

(i)  $a_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  INDUZIONE

(ii)  $a_n \rightarrow +\infty$

$$a_{n+1} = n a_n^2 \geq n$$

$\downarrow$   $\downarrow$   
 $+\infty$   $+\infty$

Se  $a_{n+1} \rightarrow +\infty$ , anche  $a_n \rightarrow +\infty$

Esempio 3

$$a_{n+1} = n a_n^2$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} = n a_n^2 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ l = +\infty \cdot l = +\infty \end{array}$$

No !!!

$$a_2 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

$$a_4 = 3 \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{3}{64} < \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$$

In questo caso  $a_n \rightarrow 0$  e si dimostra con il seguente

PIANO (i)  $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \geq 1$

(ii)  $a_n \rightarrow 0$  [ (i) + carabinieri ]

Dim (i) per induzione  $a_n \geq 0$  è immediato.

Dim. quindi solo che  $a_n \leq \frac{1}{2^n}$

$\boxed{n=0}$   $a_0 \leq \frac{1}{2}$  OK.

$\boxed{\text{P.I.}}$  Hp  $a_n \leq \frac{1}{2^n}$  Tesi  $a_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

$$a_{n+1} = n \cdot a_n^2 \leq n \cdot \frac{1}{2^{2n}} \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{2^{n+1}}$$

$\uparrow$                        $\uparrow$   
 Uso Hp                      SPERO

$$\frac{n}{2^{2n}} \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{2^{n+1}} ;$$

$$n \cdot 2^{n+1} \stackrel{?}{\leq} 2^{2n} ;$$

$$\boxed{n \stackrel{?}{\leq} 2^{n-1}}$$

VERA perché si dimostra a sua volta per induzione (FATTO la 1ª settimana).

Provo a farlo con la monotonia

$$a_{n+1} = na_n^2$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

PIANO (i)  $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$  BANALE

(ii)  $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq 1$

(iii)  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$  BANALE

(iv)  $l = 0$

Provo a dim (ii)

$$a_{n+1} \stackrel{?}{\leq} a_n; \quad na_n^2 \stackrel{?}{\leq} a_n; \quad na_n \stackrel{?}{\leq} 1$$

$$a_n \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{n}$$

Nel momento in cui facciamo il punto (ii) non sappiamo se è vera.

(i.5)  $a_n \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$  Induzione ...

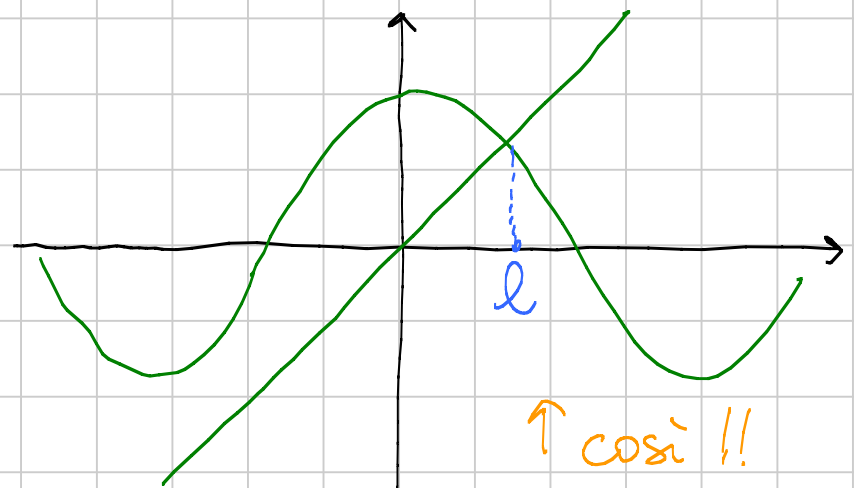
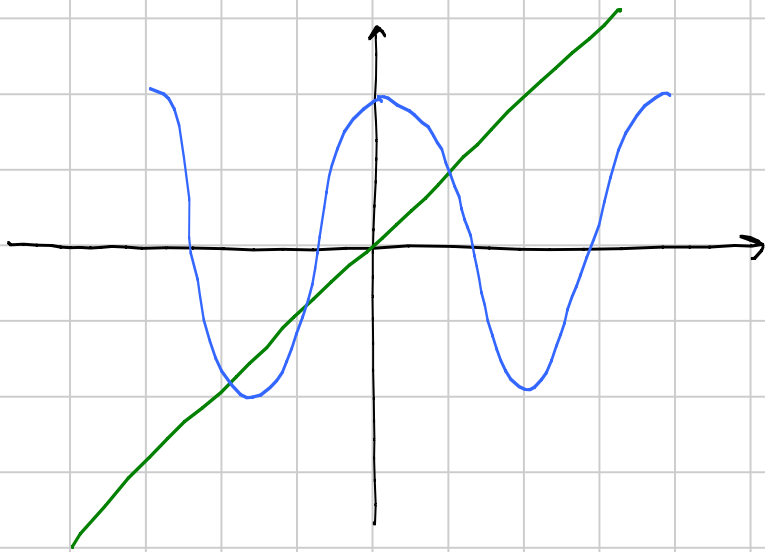
P.I. Hp:  $a_n \leq \frac{1}{n}$  Tesi:  $a_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$

SPERO: NO!!!

↓

$$a_{n+1} = na_n^2 \leq n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1}$$

Esempio 4 Quante soluzioni ha l'eq.  $x = \frac{1}{2} \cos x$  ?



Quale di questi?

Studio la funzione  $g(x) = x - \frac{1}{2} \cos x$ ;  $g'(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin x$   
 $\geq \frac{1}{2} > 0$

$\Rightarrow g$  strett. cresc.  $\Rightarrow$  iniettiva  $\Rightarrow$  al max 1 soluz. che  
chiamo  $l$ .

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \cos a_n$$

$$a_0 = 6002$$

Idea :  $a_n \rightarrow l$  (soluz. dell'eq. prec.) spiraleggiando.

PIANO Pongo  $d_n = |a_n - l|$  N.B.  $\frac{1}{2} \cos l = l$

(i)  $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n$   $\leftarrow$  DA FARE

(ii)  $d_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0$  (ci) + induzione)

(iii)  $d_n \rightarrow 0$  (quindi  $a_n \rightarrow l$ ) (ci) + carabinieri)

Dim di (i) Sia  $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - l| = |f(a_n) - f(l)|$$

$$= |f'(\xi)| |a_n - l| \leq \frac{1}{2} |a_n - l|$$

$$|f'(\xi)| = \left| \frac{1}{2} \sin \xi \right| = \frac{1}{2} |\sin \xi| \leq \frac{1}{2} = \frac{1}{2} d_n$$

— 0 —

In particolare possiamo ottenere la soluz. dell'eq.

$x = \frac{1}{2} \cos x$  come limite di una succ. def. per ricor.

— 0 — 0 —

Es. 1 (HARD)

$$a_{n+1} = \cos(a_n) \quad a_0 = 2006$$

[equivale a scrivere 2006 in una calcolatrice  
e poi continuare a schiacciare cos]

$$x = \cos x$$



Es. 2 (HARD)

$$a_{n+1} = \arctan a_n$$

$$a_0 = 2006 \quad [\text{Facile: } a_n \rightarrow 0]$$

Hard: cosa fa  $\sum a_n$  ???