

MAT I TLC

ORA 53

Commenti sul piano con la distanza

$$d_n = |a_n - 1| \quad f(x) = \frac{2}{x+1} \quad f(1) = 1$$

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 1| = |f(a_n) - f(1)| \quad f(a) - f(b) = f'(\xi)(a-b)$$

$$= |f'(\xi)| \cdot |a_n - 1|$$

$$= |f'(\xi)| \cdot d_n \quad \xi \text{ sta tra } a_n \text{ e } 1$$

Se io so già che $\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{4}{3}$, allora

anche $\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{4}{3}$



$$f'(\xi) = -\frac{2}{(\xi+1)^2}, \text{ quindi } |f'(\xi)| = \frac{2}{(\xi+1)^2} \leq \frac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{8}{9}$$

Ho dimostrato che

$$d_{n+1} \leq |f'(\xi)| \cdot d_n \leq \overset{<1}{\boxed{\frac{8}{9}}} d_n \quad \text{Basta per concludere.}$$

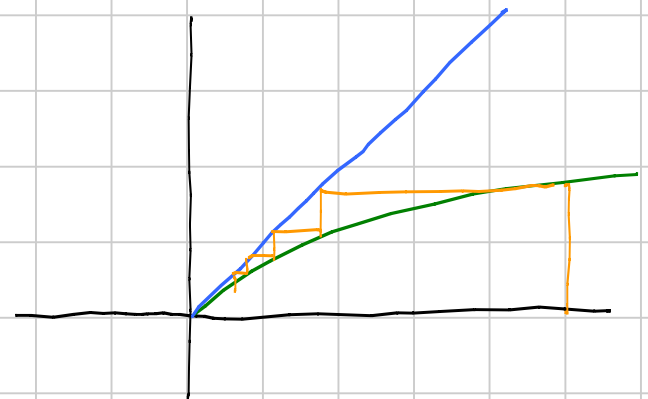
— 0 — 0 —

La distanza può essere utile anche quando la succ. è monot.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \arctan a_n \quad a_0 = 2006$$

Volevamo dim. che $a_n \rightarrow 0$

$$\text{Pongo } d_n = |a_n - 0| = |a_n|$$



$$f(x) = \frac{1}{2} \arctan x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2}$$

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 0| = |f(a_n) - f(0)|$$

$$= |f'(\xi)| \cdot |a_n - 0|$$

$$= |f'(\xi)| \cdot d_n \leq \boxed{\frac{1}{2}} d_n$$

$< 1 \Rightarrow$ Basta per concludere

$$|f'(\xi)| = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\xi^2} \leq \frac{1}{2}$$

il den. è
minimo per $\xi=0$

Fatto con Lagrange
segue da (i) per induz

(ii) variabili.

PIANO Posto $d_n = |a_n - 0|$

→ (i) $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

→ (ii) $d_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

→ (iii) $d_n \rightarrow 0$

SUCC. PER RICORRENZA NON AUTONOME

Esempio 1

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{n+2006}}$$

$$a_0 = 6002 \quad \left[a_1 = \frac{6002}{\sqrt{2006}} \right]$$

PIANO CON LA MONOTONIA

$$(i) \ a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ciii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(iv) $l=0$

Dim (i)] Induzione tranquilla

Div (ii)

$$a_{n+1} \overset{?}{\leq} a_n$$

$$\frac{a_n}{\sqrt{n+2006}}$$

	$\cup$	
$\cap$		a_n

$$, \quad a_n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+2006}} \right) \geq 0$$

↓ ↓

≥ 0 > 0

per (i)

per (i)

Dim (ii) Teo. succ. monotone

Dim (iv)

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{n+2006}}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$

$l = 0$

— 0 —

PIANO 2 (i) $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ INDUZIONE
(ii) $a_n \rightarrow 0$

Dim di (ii) Uso criterio del rapporto per la succ.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{a_n}}{\sqrt{n+2006}} \cdot \frac{1}{\cancel{a_n}} \rightarrow 0 < 1 \Rightarrow \text{La succ. } a_n \rightarrow 0.$$

Esempio 2

$$a_{n+1} = \frac{15n+3}{6n-2} a_n \quad ; a_7 = \frac{1}{7}$$

PIANO 2

(i) $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ INDUZIONE

(ii) $a_n \rightarrow +\infty$

Dim di (ii)

Uso criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{15n+3}{6n-2} \frac{\cancel{a_n}}{\cancel{a_n}} \rightarrow \frac{15}{6} > 1 \Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$$

— 0 — 0 —

Esempio 3

$$a_{n+1} = \frac{5a_n + \sin a_n + \cos n!}{n+7 - \arctan n}$$

$$a_0 = 8$$

Idea: $a_n \rightarrow 0$

PIANO (i) $-100 \leq a_n \leq 100 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq 100$

(ii) $a_n \rightarrow 0$

Dim. di (i) Induzione **$n=0$** $-100 \leq 8 \leq 100$ Ok.

P.I. Hp. $|a_n| \leq 100$ Tesi: $|a_{n+1}| \leq 100$

Dim. $|a_{n+1}| = \left| \frac{5a_n + \sin a_n + \cos n!}{n+7 - \arctan n} \right|$ $\arctan n \leq n$
per disug. classica

$$\leq \frac{502}{7} \leq 100$$

Dim (ii) Dimostrare che $a_n \rightarrow 0$ è equivalente a dim. che $|a_n| \rightarrow 0$, il che a sua volta è equivalente a dimostrare che $|a_{n+1}| \rightarrow 0$

Ragionando come nel punto ci) abbiamo che

$$\begin{array}{c} \textcircled{0} \leq \textcircled{|a_{n+1}|} = |\text{Mostro}| \leq \boxed{\frac{502}{n+7-\arctan n}} \\ \downarrow \qquad \qquad \searrow \qquad \qquad \downarrow \\ \textcircled{0} \qquad \qquad \textcircled{0} \text{ Carabinieri} \qquad \qquad \textcircled{0} \end{array}$$