

MAT I TLC

ORA 52

Titolo nota

15/11/2006

Succ. per ricomenta

SPIRALEGGIANTI

$$a_{n+1} = \frac{2}{a_n + 1}$$

$$f(x) = \frac{2}{x+1}$$

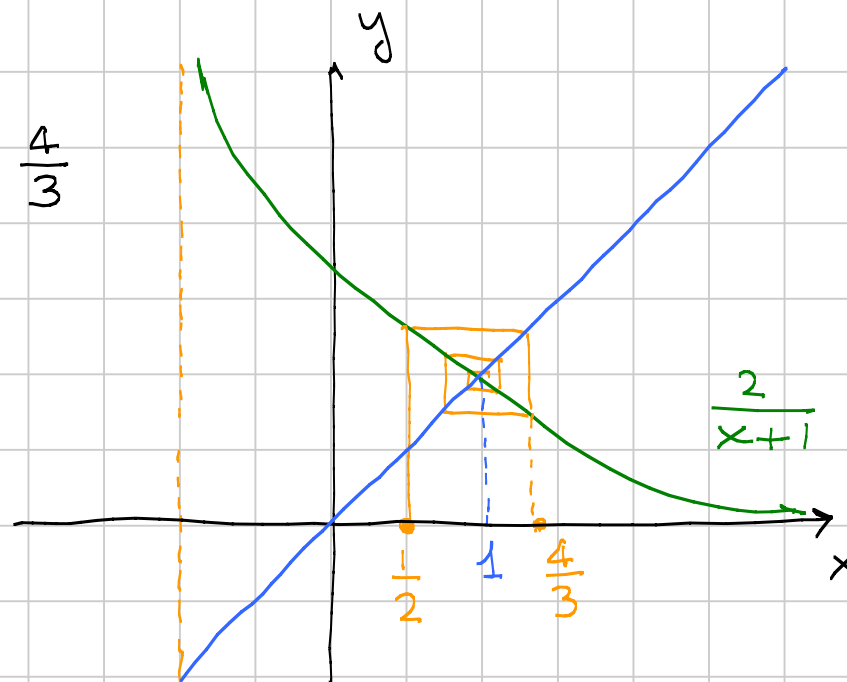
$$f(x) = x ; \quad \frac{2}{x+1} = x$$

$$2 = x^2 + x ; \quad x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}$$
$$a_1 = \frac{2}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{4}{3}$$



Idea: $a_n \rightarrow 1$ "spiraleggiando"

PIANO

PIANO
DELLE
2
SOTTO
SUCC.

$$(i) \quad \frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{4}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad] \text{ Induzione oppure utilizzo della funzione}$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} a_{2m+2} &\geq a_{2m} \\ a_{2m+3} &\leq a_{2m+1} \end{aligned} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \begin{aligned} [\text{la s.succ. dei pari \u00e8 cresc.}] \\ [\text{la s.succ. dei dispari \u00e8 decr.}] \end{aligned}$$

$$(iii) \quad \begin{aligned} a_{2m} &\rightarrow l \in \mathbb{R} \\ a_{2m+1} &\rightarrow m \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad] \text{ SOLITO TED. SUCC. MONOTONE}$$

$$(iv) \quad l = m = 1$$

Dim di (iv)

$$a_{n+1} = \frac{2}{a_n + 1}$$

Non si pu\u00f2 passare al limite come nel caso monotono

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= \frac{2}{a_{2m} + 1} \\ \downarrow & \quad \downarrow \\ m &= \frac{2}{l+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2m+2} &= \frac{2}{a_{2m+1} + 1} \\ \downarrow & \quad \downarrow \\ l &= \frac{2}{m+1} \end{aligned}$$

Ho ottenuto il sistema

$$\begin{cases} m = \frac{2}{l+1} \\ l = \frac{2}{m+1} \end{cases} \quad \begin{cases} lm + m = 2 \\ ml + l = 2 \end{cases}$$

sottraggo e ottengo $m = l$ e quindi $l = \frac{2}{l+1} \Rightarrow l = \frac{1}{-2}$ No

Punti (i) e (ii) con la funzione

Considero $f(x) = \frac{2}{x+1}$. È una funzione decrescente per $x > -1$.

Dim (i) per inclusione. $m=0$ $\frac{1}{2} \leq a_0 \leq \frac{4}{3}$ $a_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Ok}$.

[P.I.] Hp. $\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{4}{3}$ Tesi: $\frac{1}{2} \leq a_{n+1} \leq \frac{4}{3}$

Dim. P.I. prendo l'Hp e applico $f(x)$:

$$\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{4}{3}$$

Inverto i versi perché f è decrescente

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \geq f(a_n) \geq \frac{4}{3}$$

" "

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{\frac{4}{3} + 1} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{4}{3} \geq a_{n+1} \geq \frac{6}{7} \geq \frac{1}{2}$$

Dim punto (ii) Rafforzo il punto (ii) dicendo che

$$a_{2n} \leq a_{2n+2} \leq 1, \quad 1 \leq a_{2n+3} \leq a_{2n+1}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{4}{3}, \quad a_2 = \frac{6}{7}$$

$$a_0 \leq a_2 \leq 1$$

$$a_1 \geq a_3 \geq 1$$

$$a_2 \leq a_4 \leq 1$$

$$a_3 \geq a_5 \geq 1$$

Applico f

Applico f

Applico f

$$\dots \quad a_4 \leq a_6 \leq 1 \quad \dots$$

$$\overset{a_1}{\underset{''}{f(a_0)}} \geq \overset{a_3}{\underset{''}{f(a_2)}} \geq \overset{1}{\underset{''}{f(1)}}$$

$$\overset{a_1}{\underset{''}{f(a_0)}} \leq \overset{a_3}{\underset{''}{f(a_3)}} \leq \overset{1}{\underset{''}{f(1)}}$$

PIANO CON LA DISTANZA

Idea: la distanza tra a_n e 1 decresce ad ogni passaggio.

Pongo $d_n = |a_n - 1|$ ← Distanza tra a_n e 1

$$(i) d_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

BANALE

$$(ii) d_{n+1} \leq d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(iii) d_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$$

SOLITO

$$(iv) l = 0 \quad [\text{cioè } a_n \rightarrow 1]$$

NON SEGUE DA (i) + (iii)

x_n DECRESCENTE e $x_n \geq 0 \not\Rightarrow x_n \rightarrow 0$

Dim (ii)

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 1| = \left| \frac{2}{a_{n+1}} - 1 \right| =$$

$$= \left| \frac{2 - a_{n+1}}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{1 - a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{|1 - a_n|}{a_{n+1}} = \frac{d_n}{\boxed{a_{n+1}}} \leq d_n$$

≥ 1

(i), (ii), (iii) OK il punto (iv) NO

Nel (ii) abbiamo dimostrato che

$$d_{n+1} = \frac{d_n}{\boxed{a_{n+1}}} \leq \frac{2}{3} d_n$$

$\geq \frac{3}{2}$ perché già
sappiamo che $a_n \geq \frac{1}{2}$

coeff. < 1
↑
STRETTO

Ho in realtà dimostrato che $d_{n+1} \leq \boxed{\frac{2}{3}} d_n$

PIANO CORRETTO

(i) $\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{4}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{2}{3} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n d_0$

(iv) $d_n \rightarrow 0$

(i) Fatto sopra per induzione usando la funzione

(ii) Fatta sopra usando che $a_n \geq \frac{1}{2}$

(iii) Segue dal punto (ii) per induzione

$$d_1 \leq \frac{2}{3} d_0, \quad d_2 \leq \frac{2}{3} d_1 \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} d_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 d_0$$

$$d_3 \leq \frac{2}{3} d_2 \leq \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 d_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 d_0$$

quindi dopo n passaggi $d_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n d_0$ [FARE
INDUZIONE
FORMALMENTE]

(iv) $0 \leq d_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n d_0$

↓
0

↓
0

↓
0

si usa che $\frac{2}{3} < 1$

CARABINIERI!