

MAT I TLC

Titolo nota

ORA 50

14/11/2006

SUCCESIONI PER RICORRENZA

$$a_{n+1} = 2a_n - 1$$

$$a_0 = 2$$

$$a_1 = 2a_0 - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3, \quad a_2 = 2a_1 - 1 = 5, \quad a_3 = 2a_2 - 1 = 9, \dots$$

Per calcolare a_{2006} occorre calcolare tutti i termini precedenti.

In generale possiamo pensare a succ. definite da

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

legge RICORSIVA
(RICORSIONE)

$$a_0 = \alpha$$

Valore iniziale
SUCC. AUTONOMA / PRIMO ORDINE
(dipende solo dal prec.)

$$a_{n+1} = 2a_n + 6a_{n-1}$$

In questo caso servono 2 valori per partire

$$a_0 = \alpha, a_1 = \beta$$

SECONDO ORDINE!
dipendenza dai 2 termini precedenti

A questo punto si parte

$$a_2 = 2a_1 + 6a_0 = 2\beta + 6\alpha, a_3 = \dots$$

$$a_{n+1} = 2a_n - n$$

$$a_0 = 2$$

NON AUTONOMA

In questo la legge di passaggio da a_n ad a_{n+1} cambia di volta in volta

$$a_1 = 2a_0 - 0 = 4, a_2 = 2a_1 - 1 = 7, a_3 = 2a_2 - 2 = 12$$

↑
USO RICORRENZA
con $n=0$

↑
 $n=1$

↑
 $n=2$

Autonoma: a_{n+1} dipende SOLO da a_n

Non autonoma: a_{n+1} dipende da a_n e da n

Ci limiteremo a succ. per ric. del 1° ordine, autonome e non autonome.

Esempio 1 $a_{n+1} = a_n^2$, $a_0 = \frac{1}{2}$ Qual è il limite di a_n ?

[In questo caso non è difficile trovare una formula **ESPLICITA** per a_n , ma noi studiamo il problema senza **RICAVARLA**]

PIANO

(i) $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ " " "

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(iv) $l = 0$

Dim (iii)

Grazie ai punti (i) e (ii) sappiamo che a_n è deb. dec. e limitata inf. $\Rightarrow$ esiste il limite ed $l \in \mathbb{R}$

(teo succ. monotone)

Dim (iv)

$$a_{n+1} = a_n^2$$

Dal p.to (iii) so che $a_n \rightarrow l$

$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$l = l^2$$

$$l = l^2; l^2 - l = 0, l(l-1) = 0$$

$$l = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \leftarrow \text{UNICA POSSIBILITÀ}$$

$\square$ incompatibile con il punto (i)

Dim (i)

$a_n \geq 0$ ovvia perché faccio sempre quadrati

$$a_n \leq \frac{1}{2}$$

Induzione

$[n=0]$ $a_0 \leq \frac{1}{2}$ O.K.; $[P.I.]$ Hp $a_n \leq \frac{1}{2}$ Tesi $a_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

se $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$, allora

$$0 \leq a_n^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$0 \leq a_{n+1} \leq \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$$

Dim (ii) Devo dim. che $a_{n+1} \leq a_n$, cioè che

$$a_n^2 \leq a_n, \quad a_n^2 - a_n \leq 0, \quad a_n(a_n - 1) \leq 0$$

Vera $\Leftrightarrow 0 \leq a_n \leq 1$, ma questo segue dal punto (i)

Esempio 2 $a_{n+1} = a_n^2, \quad a_0 = 3$

- PIANO
- (i) $a_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
 - (iv) $l = +\infty$

Dim (iii) Teo. succ. monotone

Dim (iv) Supponiamo per assurdo che sia $l \in \mathbb{R}$. Allora

$$\boxed{a_{n+1}} = \boxed{a_n^2}$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$l = l^2$$

$$l = l^2 \Rightarrow l = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \left. \begin{array}{l} \text{entrambi} \\ \text{incompatibili} \\ \text{con (i)} \end{array} \right\}$$

L'unica possibilità è che sia $l = +\infty$

Dim (i) Induzione

Dim (ii) Devo dim. che $a_{n+1} \stackrel{?}{\geq} a_n$, $a_n^2 \geq a_n, \dots$

$a_n(a_n - 1) \geq 0$ vera se $\boxed{a_n \geq 1}$ oppure $a_n \leq 0$
 $\uparrow$
grazie al punto (i)
questa è verificata

Dimostrazione alternativa dei punti (i) e (ii).

Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$. È una funzione (deb.) crescente per $x \geq 0$

Dim (i) per indus. $a_0 \geq 3$ ok.

P.I. Hp: $a_n \geq 3$ applico $f(x)$

$$f(a_n) \geq f(3)$$

" "

$$a_{n+1} \geq 3 \geq 3 \leftarrow \text{Tesi}$$

Dim (ii) per indus. $a_2 \geq a_1$ vera? $3 \geq 3$ ok.

Hp. $a_{n+1} \geq a_n$ applico $f(x)$

$$f(a_{n+1}) \geq f(a_n)$$

" "

$$a_{n+2} \geq a_{n+1} \leftarrow \text{Tesi'}$$

Esempio 3

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$$

$$a_0 = 0$$

PIANO

$$(i) \quad 0 \leq a_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(iii) \quad a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \quad \leftarrow (i) + (ii) + \text{teo. succ. monot.}$$

$$(iv) \quad l = 3$$

Dim (iv)

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \sqrt{2a_n + 3} \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & \sqrt{2l + 3} \end{array}$$

$$l = \sqrt{2l + 3}; \quad l^2 = 2l + 3; \quad l^2 - 2l - 3 = 0; \quad (l - 3)(l + 1) = 0$$

$$l = \begin{array}{l} 3 \\ -1 \end{array} \quad \leftarrow \text{LIMITE}$$

-1 incomp. con (i) $\nearrow$ NON ACCETTABILE
come solus.
dell'eq.

Per i punti (i) e (ii) considero la funzione $f(x) = \sqrt{2x+3}$.

Questa funzione è crescente (almeno per $x \geq 0$) e $f(3) = 3$

Hp $\rightarrow$ $0 \leq a_n \leq 3$ applico $f(x)$

$$f(0) \leq f(a_n) \leq f(3)$$

Tesi $\rightarrow 0 \leq \sqrt{3} \leq a_{n+1} \leq 3$ e questo dimostra (i)

Punto (ii) $a_1 \geq a_0$ $\sqrt{3} \geq 0$ OK.

Hp $\rightarrow$ $a_{n+1} \geq a_n$ applico $f(x)$

$$f(a_{n+1}) \geq f(a_n)$$

$$a_{n+2} \geq a_{n+1} \leftarrow \text{Tesi}$$